Math 305.

Math 305

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT

900000066823

zed by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NOUVELLE MECANIQUE OU STATIQUE,

DONT LE PROJET FUT DONNÉ EN M. DC. LXXXVII.

Ouvrage posthume de M. VARIGNON, *des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal, & Professeur des Mathématiques au College Mazarin.*

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, ruë S. Jacques, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE

DES SECTIONS CONTENUES dans ce Volume.

SECTION. VI. *Des Poids ſoûtenus ſur des ſurfaces inclinées*, page 1.
SECT. VII. *De la Vis*, 125
SECT. VIII. *Du Coin*, 149
SECT. IX. *Corollaire general de la Théorie précedente*, 174
SECT. X. *De l'Equilibre des Liqueurs*, 224
Problêmes, 299
Machines ſans frottement, 408
Examen de l'Opinion de M. Borelli, 453

Fautes à corriger.

Page 315. *lig.* 3. au deſſus, *liſ.* au deſſous.
Page 358. *lig.* 9. $3\frac{101093}{1000000}$, *liſ.* $3\frac{1009093}{10000000}$.
Pag. 360. *lig.* 18. $3\frac{101093}{10000000}$, *liſ.* $\frac{1009093}{10000000}$.
Ibid. lig. 23. $15\frac{59190816934137490178881}{705000000000000000000000}$, *liſ.* $15\frac{2173267057265498023155124}{283000000000000000000000}$.
Ibid. lig. dern. corrigez comme deſſus ligne 23.
Page 361. *lig.* 2. *corrigez encore de même.*
Ibid. lig. 3. cinq ſeptiémes, *liſ.* trois huitiémes.
Page 368. *lig.* 9. ainſi, *liſ.* auſſi.
Ibid. lig. 14. eu, *liſ.* en.
Page 411. *lig.* 3. AM à MA, *liſ.* AN à MA.
Page 413. *lig. prem.* ſuivie, *lig.* ſuive.
Page 420. *lig.* 28. ſAPO, *liſ.* ſAPQ.
Page 421. *lig.* 33. le poids E, *liſ.* le poids F.
Page 422. *lig.* 34. NC. *liſ.* NK.

Digitized by Google

ORDRE DES FIGURES.

TOME II.

SECTION IV.

Planche XXIX.	page 70
XXX.	76
XXXI.	118
XXXII.	124
XXXIII.	124

SECTION VII.

XXXIV.	148

SECTION VIII.

XXXV.	172

SECTION IX.

XXXVI.	190
XXXVII.	206
XXXVIII.	206
XXXIX.	206
XL.	212
XLI.	222

SECTION X.

XLII.	246
XLIII.	258
XLIV.	278
XLV.	288
XLVI.	296

SECONDE PARTIE.

Problêmes.

Pl. XLVII.	page 302
XLVIII.	310
XLIX.	320
L.	338
LI.	354
LII.	364
LIII.	368
LIV.	370
LV.	384
LVI.	394
LVII.	406

MACHINES

sans frottement.

LVIII.	416
LIX.	422
LX.	426
LXI.	432
LXII.	448

EXAMEN

de l'Opinion de M. Borelli.

LXIII.	476
LXIV. & derniere,	478

NOUVELLE

Digitized by Google

NOUVELLE MECANIQUE.

TOME SECOND.

SECTION VI.

Des Poids soûtenus sur des surfaces inclinées.

DEFINITION XXV.

UN plan qui n'eſt ni vertical, ni horiſontal, s'appelle un *plan incliné*; l'angle qu'il fait avec l'horiſon s'appelle ſon *angle d'inclinaiſon*; la verticale compriſe entre ſon extrémité ſuperieure & l'horiſontale qui paſſe par l'inferieure, s'appelle ſa *hauteur*, & la partie de cette horiſontale compriſe entre ce plan & ſa hauteur, s'appelle ſa *baſe*.

Suivant cela, ſi des ſurfaces S, V, on prend la moyenne Pro. 29

pour un plan incliné à l'horiſon GK, & HG, pour la *longueur* de ce plan compriſe entre l'horiſontale GH & la verticale HK, l'on aura HGK pour ſon *angle d'inclinaiſon*, HK pour ſa *hauteur*, & GK pour ſa *baſe*.

COROLLAIRE.

Toutes les ſurfaces courbes pouvant être regardées comme faites d'une infinité de petits plans infiniment petits differemment inclinez ſuivant les directions de ceux qui les touchent en ces points ou parties infiniment petites regardées comme s'évanouiſſant en points ; il ſuit de la precedente Déf. 25. que l'inclinaiſon d'une ligne ou ſurface courbe quelconque varie dans tous ſes points, & que ſon inclinaiſon en chacun d'eux eſt toujours celle de ſa tangente droite ou de ſon plan touchant en ce point : de ſorte qu'en chaque point O de la ſurface courbe SOV, cette ſurface peut paſſer pour le plan incliné HG qui la touche en ce point O, ayant là HGK pour ſon angle d'inclinaiſon, HK pour ſa hauteur, & GK pour ſa baſe, en prenant HG pour la longueur de ce plan.

DEFINITION XXVI.

On appellera ici & dans la ſuite, *baſe* d'un corps ou d'un poids, ce qu'il aura de ſa ſurface appliquée à celle ſur laquelle il ſe trouvera : par exemple, ici O ſera la *baſe* du poids EO, ſoit que O ſoit un point, ou une ſurface, ſelon la figure & la poſition de ce poids.

Suivant ce langage, un poids aura autant de *baſes* qu'il touchera de ſurfaces differentes en des endroits differens ; c'eſt pour cela que dans la ſuite nous lui donnerons deux *baſes*, lorſqu'il ſera ſoutenu entre deux ſurfaces, une pour chacune.

Ce langage extraordinaire n'eſt que pour abreger nos expreſſions, & rendre par-là nos demonſtrations plus courtes & moins embarraſſées.

la baſe du poids EON ; & la charge ou impreſſion réſultante du concours d'action de ces deux forces ſur cette ſurface, ſera encore à chacune d'elles comme cette diagonale AD à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme BACD.

III. *Reciproquement ſur quelque ſurface que ce ſoit encore, ſi le parallelogramme BACD a encore ſes côtez AB, AC, entr'eux en raiſon de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, ſur les directions deſquelles on ſuppoſe ces côtez ; & que la diagonale AD de ce parallelogramme ſoit perpendiculaire à cette ſurface quelconque SV en quelque point O de la baſe du poids EON : ce poids ſera toûjours alors ſoûtenu ſur cette ſurface par la puiſſance R en équilibre avec lui.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Les Corol. 8. 9. du Lem. 3. font voir que pour que la puiſſance R ſoutienne le poids EON ſur la ſurface quelconque inclinée SV, l'impreſſion ou la force réſultante du concours d'action de cette puiſſance & de la peſanteur de ce poids ſur lui, doit être dirigée ſuivant une perpendiculaire menée du point A à cette ſurface, laquelle perpendiculaire paſſe par la baſe de ce poids. Donc cet équilibre étant ici ſuppoſé entre la puiſſance R & le poids EON ſur cette ſurface SV ou HG, & la diagonale AD y étant auſſi ſuppoſée perpendiculaire à cette même ſurface, & la ſeule qu'on y puiſſe mener du point A ; l'impreſſion réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON ſur lui, doit être ici ſuivant cette diagonale AD, & cette diagonale paſſer par la baſe de ce poids EON. Donc auſſi (*Lem.* 3. *Corol.* 4.) cette force ou impreſſion de A vers D ſuivant AD perpendiculaire en O à la ſurface SV, qui en ce cas d'équilibre la ſoutient ainſi toute entiere, c'eſt-à-dire, la charge de cette ſurface en ce point O, réſultante ſur elle du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, doit être ici à chacune de ces deux forces generatrices de celle-là, comme cette diago-

nale AD eſt à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme BACD. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Puiſque (*Hyp.*) la puiſſance R & la peſanteur du poids EON ſont ici entr'elles comme les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD ; l'impreſſion réſultante de leur concours d'action ſur ce poids, doit être (*Lem.* 3. *part.* 4. *&* *Corol.* 1. *nomb.* 1.) de A vers D ſuivant la diagonale AD de ce parallelogramme comme (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) ſi ce corps au lieu d'être pouſſé ou tiré par ces deux forces à la fois, ne l'étoit en ce ſens que par une ſeule qui fût égale à ce qu'il lui en réſulte du concours d'action de ces deux-là. Donc dans le cas d'équilibre ici ſuppoſé entre la puiſſance R & le poids EON ſur la ſurface SV, cette diagonale doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) perpendiculaire à cette ſurface en quelque point O de la baſe de ce poids ; & (*Déf.* 27.) la charge de cette ſurface, égale (*Ax.* 4.) à cette force ou impreſſion réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, que cette ſurface ſoûtient toute entiere d'une réſiſtance directement oppoſée, être (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 2.) à chacune de ces deux forces generatrices de celle-là, comme cette diagonale AD à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme BACD, ainſi que dans la précedente part. 1. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Puiſque l'on ſuppoſe encore ici la puiſſance R & la peſanteur du poids EON en raiſon des côtez AB, AC, du parallelogramme BACD, pris ſur leurs directions ; & que de plus la diagonale AD de ce parallelogramme eſt perpendiculaire à la ſurface SV ou HG en quelque point O de la baſe du poids EON ; l'impreſſion réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur de ce poids EON ſur ce corps, doit être ici (*Lem.* 3. *part.* 4. *&* *Corol.* 1. *nomb.* 1.) de A vers D ſuivant cette diagonale AD, & conſequemment être auſſi

DEFINITION XXVII.

Si du point A de concours des directions quelconques AM, AR, du poids EO & de la puiſſance R qui le retiendroit en équilibre ſur la ſurface quelconque SV, on imagine une perpendiculaire AD à cette ſurface, à laquelle on va voir (*Th.* 26. *Corol.* 1. 2.) que pour cet équilibre cette perpendiculaire doit paſſer par quelqu'un des points O de la baſe du poids; & ſi d'un point quelconque D de cette perpendiculaire AD, on mene une autre perpendiculaire DM à la direction AM de ce poids EO. La force qu'on a vû dans les Corol. 8. 9. du Lem. 3. & qu'on va voir encore dans les part. 1. 2. du Th. 26. devoir réſulter du concours d'action de ce poids EO & de la puiſſance R ſur la ſurface SV ſuivant AD, ſera appellée la *charge* de cette ſurface; & la réſiſtance directement oppoſée que (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 2) cette ſurface y fera, s'appellera ſa *réſiſtance totale*, ou ſa *réſiſtance directe*, ou ſimplement ſa *réſiſtance*; ce qu'elle en fera (*Lem.* 3. *Corol.* 6. 7.) de M vers A ſuivant la direction MA du poids EO, s'appellera ſa *réſiſtance verticale*; & on appellera ſa *réſiſtance horiſontale* ce qu'elle en fera de même (*Lem.* 3. *Corol.* 6. 7.) de D vers M ſuivant DM.

Les efforts ſuivant AM, MD, directement oppoſez & égaux à ces réſiſtances verticale & horiſontale, s'appelleront auſſi les *charges* des plans GK, HK, auſquels ces efforts ſont (*Hyp.*) perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Les ſurfaces, ſoit planes, ſoit courbes, s'appelleront SV dans la ſuite, pour faire quadrer chaque demonſtration à toutes à la fois avec moins de figures & de diſcours: on prendra HG pour la longueur de la plane ou du plan touchant de la courbe au point O de ſa charge; & par conſequent (*Déf.* 25. *& ſon Corol.*) la verticale HK pour ſa hauteur, & l'horiſontale KG pour ſa baſe.

On prend ici à l'ordinaire pour une ſurface inclinée

quelconque, & pour ſa baſe horiſontale, les ſections SV, GK, faites par un même plan vertical qui les coupe perpendiculairement toutes deux : il en ſera de même de la hauteur HK de cette ſurface.

Enfin lorſqu'il s'agira de deux ſurfaces inclinées entre-elles, on les ſuppoſera toûjours avoir de telles ſections de leurs baſes en ligne droite.

THEOREME XXVI.

Fondamental de la preſente Section 6.

FIG. 205. 206. 207. 208.

Quelques ſoient la ſurface inclinée SV, le poids mobile EON, la puiſſance R qui lui eſt appliquée, & les directions FC, ER, de ce poids & de cette puiſſance ; & conſequemment auſſi quelqu'angle RAC que ces deux directions faſſent entre-elles : ſoit imaginé un parallelogramme BACD fait de côtez AB, AC, pris ſur les directions ER, FC, de la puiſſance R & du poids EON depuis le point A de concours de ces mêmes directions.

I. *S'il y a équilibre entre cette puiſſance R & ce poids EON, ſoûtenu par elle ſur la ſurface SV, & que la diagonale AD de ce parallelogramme BACD ſoit perpendiculaire à cette ſurface, & la ſeule qu'on lui puiſſe ainſi mener du point A (la raiſon de cette exception paroîtra dans le Scholie ſuivant) cette diagonale AD paſſera toûjours par quelque point O de la baſe du poids EON ; & l'impreſſion ou la charge réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, ſur la ſurface SV, ſera toûjours à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme BACD.*

II. *En ce cas d'équilibre ſur quelque ſurface SV que ce ſoit, ſans en excepter preſentement aucune, ſi les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD ſont entr'eux comme la puiſſance R & la peſanteur du poids EON, ſur les directions deſquelles on ſuppoſe ces côtez ; la diagonale AD de ce parallelogramme ſera perpendiculaire à cette ſurface SV en quelque point O de*

(*Hyp.*) perpendiculaire à la ſurface SV par quelqu'un des points O de la baſe du poids EON. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) ce poids doit être ici en équilibre avec la puiſſance R ſur cette ſurface SV. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

PART. I. Au lieu de la ſurface SV imaginons pour un moment une puiſſance T, qui avec une corde ZT dirigée ſuivant DA prolongée de ce côté-là, ſoûtienne avec la puiſſance R le poids EON preſentement ſoûtenu avec des cordes ſeulement. Il eſt manifeſte que puiſque (*Hyp.*) la droite TD eſt perpendiculaire en O à la ſurface SV, & la ſeule (*Hyp.*) qu'on lui puiſſe mener par le point A; non ſeulement cette ſurface SV ne peut ſuppléer la puiſſance T, & ſoûtenir en ſa place avec la puiſſance R le poids EON, à moins (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) que cette perpendiculaire AO ne paſſe par quelque point de la baſe de ce poids; mais encore qu'alors la réſiſtance ou (*Déf.* 27.) la charge de cette ſurface ou de ſon point O ſeroit (*princip. gener. Corol.* 2.) égale à la puiſſance T. Or cette puiſſance T (à la place de la réſiſtance de cette ſurface SV) ſoûtenant ainſi avec la puiſſance R le poids EON, ou (ce qui revient au même) ſe trouvant ainſi ſoûtenue par le concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, comme ſi elle étoit un poids dirigé ſuivant AT, & ſoûtenu avec des cordes AR, AC, par deux puiſſances R, C, dont celle-ci (C) fût égale à la peſanteur du poids EON, & de même direction AC que cette peſanteur : cette puiſſance T (dis-je) ainſi ſoûtenue, ſeroit alors (*Th.* 1. *part.* 3. 4.) à la puiſſance R & à la peſanteur du poids EON, comme la diagonale AD du parallelogramme BACD eſt à chacun de ſes côtez AB, AC, correſpondans ſur leurs directions. Donc non ſeulement cette diagonale AD perpendiculaire (*Hyp.*) en O à la ſurface SV reſtituée au lieu de la puiſſance T, doit paſſer ici par la baſe du poids EON; mais encore la charge de cette

ſurface y doit être auſſi à la puiſſance R & à ce poids EON, comme cette diagonale AD du parallelogramme BACD eſt à chacun de ſes côtez AB, AC, correſpondans ſur les directions de cette puiſſance R & de ce poids EON. *Ce qu'il falloit encore* 1°. *demontrer.*

PART. II. En ſuppoſant encore ici la puiſſance T au lieu de la ſurface SV, dont elle ſupplée la réſiſtance en équilibre (*Hyp.*) avec la puiſſance R & le poids EON, comme ſi cette puiſſance T étoit un poids ſoûtenu ſeulement avec des cordes AR, AC, par deux puiſſances R, C, dont la ſeconde (C) fût égale à la peſanteur du poids EON, & de même direction AC que cette peſanteur; la part. 4. du Th. 1. fait voir que puiſque (*Hyp.*) les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD ſont ici entr'eux comme la puiſſance R & la peſanteur du poids EON, la direction TA de la puiſſance T doit être en ligne droite avec la diagonale AD de ce parallelogramme. Or les Corol. 8. 9. du Lem. 3. font voir auſſi qu'afin que la ſurface SV ſupplée cette puiſſance T par ſa réſiſtance, la direction TA prolongée de cette même puiſſance T doit être perpendiculaire en quelque point O de la baſe du poids EON. Donc en ce cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur la ſurface SV remiſe en ſa place au lieu de la puiſſance T, la diagonale AD du parallelogramme BACD doit être perpendiculaire à cette ſurface SV en quelque point O de la baſe du poids EON, & la réſiſtance de cette ſurface alors égale (*prins. gen. Cor.* 2.) à la puiſſance T, être auſſi pour lors (*Th. 1. part.* 4.) à la puiſſance R & au poids EON, comme cette diagonale AD du parallelogramme BACD eſt à chacun de ſes côtez AB, AC, correſpondans ſur leurs directions. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *démontrer.*

PART. III. Puiſqu'on ſuppoſe encore ici les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD ſur les directions de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, & en raiſon de ces deux forces; la part. 6. du Th. 1. fais voir qu'une puiſſance T appliquée au poids EON par le moyen d'une

d'une corde ZT dirigée ſuivant la diagonale DA prolongée de ce parallelogramme, & qui ſeroit à la puiſſance R & à ce poids EON, comme cette diagonale AD eſt à chacun des côtez correſpondans AB, AC, de ce parallelogramme, demeureroit en équilibre avec cette puiſſance R & ce poids EON ainſi ſoûtenu avec des cordes ZT, ER, par ces deux puiſſances T, R. Donc ſi au lieu de la puiſſance T, de qui la direction TD paſſe (*Hyp.*) par le point O de la ſurface du poids EON, une autre ſurface immobile SV ſe preſente pour ſoûtenir ce poids par une baſe dans laquelle ſoit ce point O, & perpendiculairement à cette direction TD ou AD; cette ſurface SV (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) ſoûtiendra effectivement le poids EON en équilibre avec la puiſſance R. *Ce qu'il falloit encore* 3°. *démontrer.*

Ce qu'on voit ici des ſurfaces convexes SV, s'entendra ſans peine des concaves: tout ce qui précède ſe démontrera préciſément de même. Les cas où le point A de concours des directions de la puiſſance R & du poids EON ſe trouveroit hors l'étendue de ce poids, ſe réſoudront auſſi comme les précedens: le Lem. 3. *& ſes Corollaires font voir que la diverſité quelconque des ſituations de ce point A, ne doit rien changer aux raiſonnemens précédens, non plus qu'aux conſequences qu'on en va déduire; c'eſt-à-dire, que tout cela doit également convenir à toutes les ſituations poſſibles du point A de concours des directions du poids EON & de la puiſſance R. C'eſt pourquoi on n'en exprime point ici les figures, de peur d'en multiplier inutilement le nombre.*

On n'exprime point non plus la figure d'aucune ſurface horiſontale, parce que la ligne de direction de quelque poids que ce ſoit, lui étant toûjours perpendiculaire, il ſe ſoûtient deſſus de lui même, & ſans le ſecours d'aucune puiſſance, par la même raiſon qu'il en a beſoin (comme on vient de le voir) pour demeurer en repos ſur quelqu'autre ſurface que ce ſoit. Le preſent Th. 26. *ne laiſſe pourtant pas de s'étendre encore juſques-là, ainſi qu'on le verra dans les Corollaires.*

COROLLAIRE I.

La part. 2. fait voir qu'aucun poids EON ne peut être ſoûtenu par aucune puiſſance R ſur aucune ſurface SV, à moins que la diagonale AD du parallelogramme BADC qui auroit ſes côtez AB, AC, en raiſon de cette puiſſance & de la peſanteur de ce poids ſur leurs directions, ne tombe perpendiculairement ſur cette ſurface, & ne paſſe en même tems par quelqu'un des points de la baſe de ce poids.

COROLLAIRE II.

Mais auſſi ſuivant la partie 3. dès que l'un & l'autre arrivera, la puiſſance R appliquée alors à ce poids EON, ne manquera pas de le ſoûtenir ſur cette ſurface SV.

COROLLAIRE III.

Lorſque le poids ne touche la ſurface qu'en un point, comme lorſqu'il ne s'y appuye que ſur un de ſes angles, ou que ſur un point de la convexité de ſa courbure, ſelon qu'il eſt angulaire, ou d'une ſurface courbe; alors n'y ayant qu'une ſeule perpendiculaire poſſible à cette ſurface ſur la baſe de ce poids ainſi réduite à un point, il ſuit du Corol. 1. qu'il n'y a point de puiſſance capable de le ſoûtenir en cet état, à moins que le concours des lignes de direction de cette puiſſance & de la peſanteur de ce poids, ne ſe faſſe en quelque point de cette perpendiculaire, c'eſt-à-dire, à moins que la direction de cette puiſſance ne paſſe par le point où cette perpendiculaire & la direction du poids ſe rencontrent; & qu'ainſi lorſque ce poids eſt ſpherique, ces deux lignes paſſant toûjours par ſon centre, il n'y a point de puiſſance capable de le ſoûtenir ſur quelque ſurface inclinée que ce ſoit, à moins que la ligne de direction de cette puiſſance ne paſſe auſſi par le centre de cette Sphere.

La raiſon de cela vient, ſuivant le Corol. 1. de ce que lorſqu'un corps ne touche ou ne s'appuye que par un ſeul

de ſes points ſur la ſurface inclinée, le concours de ſa direction & de celle de la puiſſance qui lui eſt appliquée, ne ſe peut faire auſſi qu'en un ſeul point d'où l'on puiſſe mener une perpendiculaire à la ſurface par la baſe de ce poids. Il en eſt tout autrement lorſque le poids eſt de figure & de ſituation à toucher en pluſieurs points la ſurface inclinée, parce qu'alors on y peut trouver auſſi pluſieurs points d'où l'on peut tirer de telles perpendiculaires à cette ſurface par la baſe de ce poids.

COROLLAIRE IV.

Il n'y a point non plus de puiſſance R quelle qu'elle ſoit, qui puiſſe ſoûtenir aucun poids EON ſur quelque ſurface SV que ce puiſſe être, à moins que la direction AR de cette puiſſance ne ſe trouve dans le complement NAO (à deux angles droits) de l'angle CAO compris entre la direction AC de ce poids, & la droite AO menée du point A perpendiculairement à la ſurface SV. Car,

1°. Si cette direction AR de la puiſſance R, ſe confondoit avec AN, elle ne feroit plus aucun angle avec AC: ainſi (*Ax. 4. & Lem. 3. Corol. 2.*) cette puiſſance R porteroit ſeule tout le poids EON ſans le ſecours de la ſurface SV; ce qui eſt contre l'hypotheſe.

2°. Si cette ligne AR de direction de la puiſſance R, ſe confondoit avec AO, ou ſi elle ſortoit de l'angle NAO, la diagonale AD du parallelogramme BACD, ſe trouveroit alors vers G obliquement à HG; ce qui feroit neceſſairement (*Lem. 3. Corol. 7. 8. 9.*) tomber le poids EON de ce côté-là; ce qui eſt encore contre l'hypotheſe.

Donc la direction AR de la puiſſance R doit toûjours ſe trouver dans le complement NAO de l'angle CAO: de ſorte que le complement à deux droits eſt tout l'eſpace du mouvement que cette direction AR peut avoir, c'eſt-à-dire, tout l'eſpace dans lequel doivent être compriſes toutes les directions AR des puiſſances R capables de ſoûtenir le poids EON ſur le point O de la ſurface SV.

Par un raiſonnement à peu près ſemblable, on prouvera qu'en cas d'équilibre la direction AC du poids ne peut jamais ſe rencontrer dans l'angle RAO.

COROLLAIRE V.

En cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur la ſurface SV, le plan BAC, ou le parallelogramme BACD fait de côtez AB, AC, qui (*Hyp.*) leur ſont proportionnels ſur leurs directions, eſt toujours perpendiculaire à cette ſurface; puiſque (*part.* 2.) la diagonale AD de ce parallelogramme l'eſt toujours à cette même ſurface SV.

COROLLAIRE VI.

En cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur la ſurface SV, la part. 1. fait voir que ſi la diagonale AD d'un parallelogramme BACD fait de côtez pris ſur les directions de cette puiſſance & de ce poids, la charge de cette même ſurface, qui lui réſulte du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, ſera toûjours alors à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD eſt à chacun des côtez AB, AC, qui répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme BACD; & conſequemment que dans cette part. 1. ces côtez AB, AC, de ce parallelogramme ſont toûjours entr'eux comme la puiſſance R & le poids EON, ainſi qu'on l'a ſuppoſé dans la part. 2. D'où l'on voit que le parallelogramme BACD fait de côtez AB, AC, pris ſur les directions de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, doit toûjours être ici le même, ſoit qu'on y ſuppoſe ces côtez en raiſon de ces forces comme dans la part. 2. ou qu'on en ſuppoſe la diagonale perpendiculaire à la ſurface SV par la baſe du poids EON.

COROLLAIRE VII.

Les part. 1. 2. font voir qu'en cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur la ſurface SV, l'im-

Digitized by Google

preſſion que cette puiſſance & la peſanteur de ce poids font enſemble ſur cette ſurface, c'eſt-à-dire, la charge de cette ſurface, réſultante du concours d'action de ces deux forces ſur elle, eſt toûjours à chacune de ces forces comme la diagonale AD du parallelogramme BACD, perpendiculaire à cette ſurface, eſt à chacun des deux côtez AB, AC, qui leur répondent ſur leurs directions dans ce parallelogramme BACD; l'on aura toûjours alors cette charge de la ſurface SV, la puiſſance R, & la peſanteur du poids EON, en raiſon des trois parties AD, AB, AC, de leurs directions, ou (à cauſe que BD=AC dans le parallelogramme BACD) en raiſon des trois côtez AD, AB, BD, du triangle BAD. Donc une quelconque de ces trois forces ſera toûjours moindre que la ſomme des deux autres, chacun des trois côtez d'un triangle quelconque étant toûjours plus petit que les deux autres pris enſemble.

COROLLAIRE VIII.

Ç'a donc été une mépriſe que de dire, comme a fait un Auteur du premier ordre, qu'*il eſt certain que le poids O ne peſe ſur le plan AD que la difference qui eſt entre la force qu'il faut à le ſoûtenir ſur ce plan, & celle qu'il faut pour le ſoûtenir en l'air; comme s'il peſe cent livres, & qu'il n'en faille que quarante pour le ſoûtenir ſur le plan AD, ce plan en porte ſoixante ſeulement.* A ce compte ce poids de 100 livres ſeroit égal à la ſomme de 40+60 faite de la puiſſance requiſe pour le ſoûtenir ſur le plan AD, & de la charge de ce plan; ce que le précedent Corol. 7. fait voir être faux, auſſi-bien que cette propoſition d'un autre Auteur: *Gravitatio in planum horiſontale ad gravitationem in planum inclinatum, eſt ut ſecans AD ad exceſſum ſecantis ſupra radium AB*; laquelle expreſſion ne ſignifie en Latin que ce qu'on vient de voir en François de l'autre Auteur. Fig. 109.

COROLLAIRE IX.

Fig. 205. 206 207. 208. Puiſque (*Corol.* 7.) en cas d'équilibre entre la puiſſance R & la peſanteur du poids EON ſur la ſurface quelconque SV, la charge de cette ſurface, réſultante du concours d'action de ces deux forces ſur elle, cette puiſſance R, & cette peſanteur du poids EON, ſont toûjours entr'elles comme les trois côtez AD, AB, BD, du triangle BAD; & que ces trois côtez ſont toûjours entr'eux (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme les ſinus des trois angles ABD, ADB, BAD, qui leur ſont oppoſez dans ce triangle, ou (*Def.* 9. *Corol.* 2.) comme les ſinus des trois angles BAC, CAD, BAD, complemens ou égaux à ceux-là: la charge de cette ſurface SV, réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON ſur elle, doit toûjours être à chacune de ces deux forces en cas d'équilibre entr'elles (*Hyp.*) ſur cette ſurface SV, comme le ſinus de l'angle BAC compris entre leurs directions, eſt à chacun des ſinus des angles CAD, BAD, que ces directions reciproquement priſes, font avec la perpendiculaire AD menée de leur concours A à la ſurface SV.

COROLLAIRE X.

Donc en cas d'équilibre la puiſſance R eſt toûjours auſſi au poids EON, comme le ſinus de l'angle CAD eſt au ſinus de l'angle BAD, c'eſt-à-dire, en raiſon reciproque des ſinus des angles que leurs directions font avec la perpendiculaire AD menée de leur concours A à la ſurface SV ſur laquelle on les ſuppoſe ici en équilibre.

COROLLAIRE XI.

De ce que ſuivant les part. 1. 2. la charge de la ſurface SV, réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON en équilibre ſur elle, eſt alors à chacune de ces deux forces comme la diagonale AD du parallelogramme BACD (fait comme dans celle qu'on voudra des part. 1. 2.) eſt à chacun de ſes côtez AB,

Digitized by Google

AC, pris ſur leurs directions ; il eſt viſible que plus l'angle BAC (compris entre ces directions) ſera grand, la diagonale AD en étant d'autant moins grande (quoiqu'en raiſon differente) par rapport aux mêmes côtez AB, AC, de ce parallelogramme BACD, moins auſſi ſera grande la charge de la ſurface SV, ſur laquelle la même puiſſance R & le même poids EON ſeront ainſi en équilibre entr'eux ; & que cet angle BAC peut augmenter à tel point que cette charge ſera ſi petite qu'on voudra, ſans cependant (*Lem. 9. part.* 3.) pouvoir devenir moindre que la difference du poids & de la puiſſance : le cas de la moindre charge ſera lorſque la direction de cette puiſſance R, directement oppoſée à celle du poids EON, rendra (*Déf.* 11.) l'angle BAC infiniment obtus : auquel cas la ſurface inclinée SV ou HG ſe trouvera horiſontale, & le poids EON plus grand de cette valeur que la puiſſance R ; ou s'il lui eſt égal, cette charge ſera nulle, & la ſurface SV ſe trouvera au contraire verticale, cette égalité, qui exige par tout (*Corol.* 8.) les angles BAD, CAD, égaux entr'eux, exigeant ainſi AD horiſontale, & conſequemment HG (ſa perpendiculaire en O) verticale lorſque l'angle BAC eſt infiniment obtus.

On entend ici par une ſurface horiſontale *ou* verticale, *un plan qui le ſoit, ou bien un point d'une ſurface courbe, dont le plan touchant en ce point, ſoit horiſontal ou vertical.*

COROLLAIRE XII.

Le précedent Corol. 11. peut encore ſe déduire du Corol. 7. par le moyen du Corol. 2. du Lem. 7. Car ce Corol. 7. fait voir en general qu'en cas d'équilibre entre la puiſſance R & la peſanteur du poids EON ſur la ſurface SV, la charge de cette ſurface, réſultante du concours d'action de ces deux forces ſur elle, eſt toûjours à chacune de ces deux forces, comme le ſinus de l'angle BAC compris entre leurs directions, eſt à chacun des ſinus des angles CAD, BAD, que ces directions reciproquement priſes, font avec la perpendiculaire AO ou AD

menée de leur concours A à cette ſurface SV. Or lorſque l'angle BAC eſt infiniment obtus, c'eſt-à-dire (*Lem. 6. Corol.* 4.) lorſque les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD ſe trouvent en ligne droite, la diagonale AD de ce parallelogramme ſe trouvant alors confondue avec un de ces deux côtez, ſçavoir, avec celui qui exprime la plus grande des deux forces, dont ils ſont les directions, & conſequemment (*Déf.* 11.) un des deux angles CAD, BAD, ſe trouvant alors infiniment aigu, le Corol. 2. du Lem. 7. fait voir qu'alors le ſinus de l'angle infiniment obtus BAC, doit être égal à la difference des ſinus de ces deux-là. Donc auſſi pour lors la charge de la ſurface SV, réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON en équilibre entr'eux (*Hyp.*) ſur elle, doit être égale à la difference de ces deux forces; & le reſte comme dans le précedent Corol. 11.

Il ſuit de tout ce qui précede, que la charge d'une ſurface inclinée quelconque, ſur laquelle un poids auſſi quelconque eſt ſoûtenu par quelque puiſſance que ce ſoit, n'eſt pas toûjours la même, mais qu'elle varie avec l'angle que font entr'elles les directions du poids & de la puiſſance, & augmente à meſure que cet angle devient plus aigu.

Pour abreger nos expreſſions, la charge réſultante du concours d'action de la puiſſance R & du poids EON ſur la ſurface SV en cas d'équilibre entr'eux ſur cette ſurface, étant (démonſtrat. de la part. 2.) *ſuivant AO perpendiculaire à cette même ſurface en O; ce point O de cette ſurface SV, lequel ſoûtient ainſi cette charge toute entiere, ſera appellée dans la ſuite* le point ſur lequel le poids EON eſt ſoutenu, *quand même ce poids toucheroit cette ſurface en d'autres points. C'eſt auſſi de cette maniere qu'il faut entendre cette expreſſion, s'il nous eſt arrivé de nous en être déja ſervis.*

COROLLAIRE XIII.

Il ſuit auſſi du Corol. 10. qu'il faut d'autant moins de force R pour ſoûtenir un poids EON ſuivant la même direction

direction AR ſur quelque ſurface SV que ce ſoit, que cette ſurface, ſi elle eſt plane, ou que ſon plan touchant au point O, auquel la perpendiculaire AO la rencontre, eſt plus incliné, ou que l'angle d'inclinaiſon de ce plan avec l'horiſon eſt plus petit, quoiqu'en raiſon differente; parce que la raiſon du ſinus de l'angle CAD au ſinus de l'angle BAD en eſt d'autant moindre; & comme cet angle d'inclinaiſon, tel qu'eſt HGK dans les Fig. 205. 206. peut diminuer à l'infini, la force R qu'il faut pour ſoûtenir un poids quelconque EON ſuivant la même direction AR ſur quelque ſurface SV que ce ſoit, peut auſſi diminuer à l'infini: de ſorte que lorſque cette ſurface ſera infiniment inclinée, c'eſt-à-dire, horiſontale, du moins dans le point où la perpendiculaire AO la rencontre, cette force R ſera nulle, ou réduite à zero, c'eſt-à-dire, qu'il n'en faudra plus alors pour ſoûtenir le poids EON ſur cette ſurface. La raiſon en eſt évidente; puiſque la réſiſtance de cette ſurface alors perpendiculaire à la direction de ce poids, lui étant directement oppoſée, en ſoûtiendra ſeule (*ax.* 4.) toute la peſanteur.

FIG. 205. 206.

COROLLAIRE XIV.

Cela ſe peut encore démontrer ſans le ſecours des ſinus, ſi l'on conſidere, par exemple, dans les Fig. 205. 206. dont le plan HG ſoit auſſi le touchant d'une ſurface courbe en celui O de ſes points ſur lequel le poids EON eſt ſoutenu: ſi l'on conſidere, dis-je, que les perpendiculaires AD en O ſur HG, & AC en P ſur l'horiſontale GK, rendent toûjours les angles HGK, CAD, égaux entre-eux; & qu'ainſi à meſure que le premier d'inclinaiſon HGK diminuera par l'approche du plan HG vers l'horiſon GK, l'autre CAD diminuera auſſi par l'approche de la diagonale AD du parallelogramme BACD vers ſon côté vertical AC, ou du côté AC vers AD, ſi l'équilibre ſe fait ſur un même point O de la ſurface HG ou SV: ce qui changeant ce parallelogramme en un autre d'un moindre rapport de AB (ſuppoſée de direction conſtante)

à AC, le poids EON ſucceſſivement ſoûtenu ſur le même plan HG (*Hyp.*) par differentes puiſſances R dirigées toutes ſuivant la même direction AR, les exigera pour cela (*part.* 1.) toûjours moindres à meſure que l'angle d'inclinaiſon HGK diminuera, & enfin nulles lorſque cet angle le ſera, c'eſt-à-dire, lorſque ce plan HG ſera horiſontal, ou que la ſurface SV le ſera au point touché par ce plan, ſur lequel point ce même poids EON ſeroit ainſi ſucceſſivement ſoûtenu par differentes puiſſances R toutes de même direction AR.

COROLLAIRE XV.

Au contraire pour ſoûtenir ce poids EON ſur le même point O d'une ſurface quelconque toûjours également inclinée en ce point, mais ſuivant differentes directions AR des puiſſances R capables de l'y ſoûtenir chacune ſuivant la ſienne ; il ſuit du Corol. 10. qu'il leur faut d'autant plus de force que l'angle DAB partie (*Corol.* 4.) de l'angle DAN, compriſe entre la perpendiculaire AO à la ſurface SV, & la direction AB de la puiſſance R qui ſoûtient ce poids EON, differe davantage de l'angle droit ; parce que le ſinus de cet angle DAB en étant (*Déf.* 9.) d'autant moindre, la raiſon du ſinus de l'angle CAD (*Hyp.*) toûjours le même, en ſera d'autant plus grande à celui-là : & comme cet angle DAB peut être plus ou moins grand qu'un angle droit, & en differer de plus en plus juſqu'à ce que AB (*Corol.* 4.) ſe confonde avec AN ou avec AO, ſans que AB ſorte de l'angle NAO ; la puiſſance R qui ſoûtient (*Hyp.*) ce poids EON, doit (*Corol.* 10.) augmenter ou diminuer de part & d'autre juſques-là ; mais differemment ſelon que AB s'approche de AN ou de AO. Car,

1°. Cette puiſſance R ne peut jamais être plus grande (*Corol.* 4. 10.) par l'approche de cette direction AB vers AN, qui rende l'angle DAB plus grand qu'un droit, que lorſque cette direction AB ſe confond avec AN, puiſque

Digitized by Google

l'angle DAB (alors égal à DAN) differant pour lors de l'angle droit le plus qu'il en puiſſe differer de ce côté-là, ſans que AB ſorte (*Corol.* 4.) de l'angle DAN, la raiſon du ſinus de l'angle DAC au ſinus de DAB, c'eſt-à-dire (*Corol.* 10.) la raiſon de la puiſſance R au poids EON, ſe trouve la plus grande qu'elle puiſſe être en cas de l'angle DAB plus grand qu'un droit. Mais cet angle DAB ſe trouvant alors complement de CAD à deux droits, & conſequemment (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) de même ſinus que lui; la puiſſance R devroit alors (*Corol.* 10.) être égale au poids EON qu'elle ſoûtiendroit. Donc cette puiſſance R, qui par l'approche de ſa direction AR vers AN depuis l'angle droit avec AO, doit toûjours augmenter, ne le peut que juſqu'à ſe trouver égale au poids EON qu'elle ſoûtiendroit ſur le point O de la ſurface SV: ſçavoir, lorſque AB ſeroit confondue avec AN, & que la puiſſance R ſeroit ainſi d'une direction directement contraire à celle du poids EON; auquel cas il eſt viſible (*ax.* 4.) que cette puiſſance ſoûtiendroit ſeule le poids ſans le ſecours de la ſurface SV, qui alors ne porteroit plus rien.

2°. Au contraire cette puiſſance R peut augmenter à l'infini par l'approche de ſa direction AR vers AO; parce que la raiſon du ſinus de l'angle CAD au ſinus de BAD augmentant à meſure que la ligne AB s'approche de AO en s'éloignant de la ſituation où elle feroit un angle droit avec AO; cette puiſſance R peut auſſi (*Corollaire* 10.) augmenter de ce côté-là juſqu'à ce que (*Corol.* 4.) ſa direction AB concoure avec AO en ſe confondant avec elle. Or en ce cas l'angle BAD (*Déf.* 11. *& Corol.* 3. *du Lem.* 6.) ſe trouvant infiniment petit, la raiſon du ſinus de l'angle fini CAD au ſinus de cet infiniment petit BAD, ſera (*Déf.* 9.) infinie; & conſequemment auſſi (*Cor.* 10.) celle de la puiſſance R au poids EON en équilibre (*Hyp.*) avec elle ſur le point O de la ſurface SV, c'eſt-à-dire, que cette puiſſance R devroit pour lors être infinie pour ſoûtenir ainſi le poids fini quelconque EON ſur le point O de la ſurface HG ou SV. Donc cette puiſſance R peut

effectivement augmenter à l'infini dans le mouvement que la direction AR peut avoir depuis la ſituation où elle feroit un angle droit avec AO perpendiculaire à cette ſurface, juſqu'au concours de ces deux mêmes lignes en une, & demeurer cependant toûjours en équilibre avec le même poids EON ſur le même point O d'une ſurface inclinée quelconque SV.

On vient de ſuppoſer dans ce Corol. 15. & on le ſuppoſera toûjours dans la ſuite, conformément au Corol. 4. qu'en cas d'équilibre entre la puiſſance quelconque R & le poids EON ſur la ſurface auſſi quelconque SV, la direction AB de cette puiſſance R ne peut jamais être au dehors de l'angle DAN: parce que ſi cette direction AB paſſoit dans quelqu'un des angles NAC, CAO, l'impreſſion réſultante du concours d'action de la puiſſance quelconque R & de la peſanteur du poids EON ſur ce poids, devant (Lem. 3. Corol. 2.) *le porter ſuivant une ligne qui du point A paſſeroit auſſi à travers de cet angle, ſans pouvoir jamais être perpendiculaire à la ſurface SV ſur laquelle AO l'eſt déja* (Hyp.) *& l'unique qui s'y puiſſe mener du point A par la baſe du poids EON: ce poids ne pourroit jamais alors* (Lem. 3. Corol. 8. & Th. 26. Corol. 1.) *faire équilibre ſur cette ſurface avec la puiſſance R, quelle qu'elle fût: ce qui ſeroit contre la preſente hypotheſe, dans laquelle on les y ſuppoſe en équilibre. C'eſt, dis-je, pour cela qu'on vient de ſuppoſer dans le précedent Corol. 15. & qu'on ſuppoſera toûjours dans la ſuite, qu'en cas d'équilibre entre une puiſſance R & un poids quelconque EON ſur une ſurface auſſi quelconque SV, la direction AB ou AR de cette puiſſance R ne peut jamais ſortir de l'angle DAN compris entre la direction AC du poids EON prolongée vers N, & la perpendiculaire AO ou AD menée du point A ſur la ſurface SV (par la baſe du poids EON) à laquelle, dans le preſent Th. 26. & dans tous ſes Corollaires on ſuppoſe qu'on n'en peut mener qu'une ſeule du point A, pour la raiſon qu'on en dira dans le Scholie ſuivant, de peur de digreſſion dans ce Théoreme-ci.*

Digitized by Google

COROLLAIRE XVI.

Tout le contenu du précedent Corol. 15. peut encore être démontré ſans le ſecours des ſinus. Imaginons d'abord la direction AR de la puiſſance R, perpendiculaire à la droite AX qu'on ſuppoſe l'être en O à la ſurface SV ou HG par la baſe du poids EON en équilibre ſur ce point O avec la puiſſance R; & conſequemment que le côté CD du parallelogramme BACD ſoit perpendiculaire à la diagonale AD de ce parallelogramme. Il eſt manifeſte que cette perpendiculaire CD eſt la plus courte de toutes les droites CD, C*d*, Cδ, &c. qu'on peut mener du même point C ſur cette diagonale prolongée, & que les plus éloignées de CD ſont les plus grandes. Par conſequent la puiſſance R qui ſoûtiendroit le poids EON en O ſur la ſurface quelconque SV, ſuivant AR, devant être à ce poids (*Corol. 6.*) comme AB ou CD eſt à AD, ſeroit ici la plus petite qui l'y pût ſoûtenir, & moindre que toute autre qui l'y ſoûtiendroit ſuivant toute autre direction A*r* ou Aρ, &c. parallele à C*d* ou Cδ, &c. cette nouvelle puiſſance en *r* ou en ρ, &c. devant alors (*Cor. 6.*) être à ce même poids EON en raiſon de C*d* ou Cδ, &c. côté du parallelogramme *b*AC*d* ou βACδ, &c. à ſon autre côté AC, le même pour tous ces parallelogrammes comme le poids EON eſt ici (*Hyp.*) toujours le même à ſoûtenir par chacune de ces puiſſances placées en R, *r*, ρ, &c. ſur le même point O de la ſurface SV. Donc, Pl. 210.

1°. Le côté C*d* du parallelogramme *b*AC*d* augmentant à meſure que l'angle AC*d* ou ſon égal NA*r* ſe trouve plus aigu, & cela juſqu'à ce que ce côté C*d* confondu avec CA, lui ſoit égal; la puiſſance en *r* pour ſoûtenir le poids EON ſur le même point O de la ſurface SV ſuivant une direction A*r* parallele à C*d*, doit toujours augmenter juſqu'à ce que cette direction A*r* ſoit confondue avec AN, ou ſa parallele C*d* avec CA; & à cet inſtant de confuſion être égale au poids EON, ſans pouvoir devenir plus grande de ce côté, C*d* ne pouvant devenir plus

grande que CA par l'approche de ſa paralléle Ar vers AN, au-delà de laquelle elle ne peut (*Corol.* 4.) paſſer en ſortant de l'angle DAN ſans rompre l'équilibre ſuppoſé. Donc depuis la ſituation de ſa direction AR perpendiculaire à AO, cette puiſſance R en r, doit toujours augmenter par l'approche de ſa nouvelle direction Ar vers AN, juſqu'à ce que cette direction Ar ſe trouve confondue avec AN ; & à cet inſtant de confuſion ſe trouver égale au poids EON, ſans pouvoir être plus grande de ce côté-là, ainſi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 1. du précedent Corol. 15.

2°. Au contraire, lorſque la direction Aρ de la puiſſance R en ρ, s'éloigne de la ſituation AR perpendiculaire à AO, en s'approchant de AO ; cette puiſſance en ce cas d'équilibre avec le poids EON ſur le point O de la ſurface SV, devant être (*Corol.* 6. à ce poids comme Aβ ou Cϛ à AC, il eſt viſible que plus la direction AC de cette puiſſance en ρ, ſera près de AO, ſa parallele Cϛ en devenant d'autant plus grande, quoiqu'en raiſon differente ; cette puiſſance en ρ en devra être d'autant plus grande pour ſoûtenir le même poids EON ſuivant cette direction Aρ ſur le même point O de la ſurface SV ; & être enfin infinie lorſque cette direction Aρ ſe trouvera confondue avec AX, ſa parallele Cϛ ſe trouvant alors infinie. C'eſt auſſi ce qu'on a déja vû dans le nomb. 2. du précedent Corol. 15.

COROLLAIRE XVII.

Fig. 198. 209. 210. Les nomb. 1. 2. du précedent Corol. 16. font voir non ſeulement que pour ſoûtenir un même poids EON ſur le même point O d'une ſurface quelconque SV toûjours également inclinée, ſuivant differentes directions AR, Ar, Aρ, &c. des puiſſances capables de l'y ſoûtenir chacune ſuivant la ſienne, il leur faut d'autant plus de force que les angles rAO, ρAO, &c. de leurs directions avec AO, different davantage de l'angle droit RAO, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 15. mais encore

que lorſque les differences rAR, ρAR, &c. en ſeront égales, ces forces (*Corol.* 6.) le ſeront auſſi entr'elles, les côtez Cd, Cδ, des parallelogrammes bACd, βACδ, alors également éloignez de CD perpendiculaire (*Hyp.*) ſur AX, ſe trouvant alors égaux entr'eux.

COROLLAIRE XVIII.

Il ſuit encore des Corol. 15. 16. que de toutes les directions AR, Ar, Aρ, &c. ſuivant leſquelles differentes puiſſances peuvent chacune ſuivant la ſienne ſoûtenir un même poids EON ſur un même point O d'une ſurface quelconque SV toûjours également inclinée; la direction AR perpendiculaire à AO; ou parallele au plan GH, qui ſoit auſſi le plan touchant en O de la ſurface SV propoſée, ſi cette ſurface eſt courbe, eſt celle qui exige la moindre de toutes ces puiſſances pour l'y ſoûtenir; & que la perpendiculaire AO à ce plan, eſt de toutes ces directions celle qui exige la plus grande de toutes ces puiſſances: la premiere ſuivant AR, doit être à ce poids EON (*Corol.* 10.) comme la longueur GH de ce plan eſt à ſa hauteur HK; & la ſeconde ſuivant AO, devroit (*nomb. 2. des Corol.* 15. 16.) être infinie.

COROLLAIRE XIX.

Pour les ſurfaces planes HG paralleles à la direction AC du poids EON, & pour les points des ſurfaces courbes SV, d'où l'on peut mener des plans touchans qui ſoient auſſi perpendiculaires à l'horiſon: la ligne de direction AR de la puiſſance R qui ſoûtient ce poids EON ſur ou contre ces plans, ou ces points de ſurfaces courbes, ne pouvant (*Corol.* 4.) s'éloigner de la ſituation où elle ſeroit perpendiculaire à AO, qu'en s'approchant de cette même AO perpendiculaire (*Hyp.*) en O à la ſurface HG ou SV, puiſque l'angle NAO en ce cas eſt droit; cette puiſſance R ne peut auſſi augmenter (*Cor.* 15. 16.) que dans ce mouvement de ſa direction, depuis AN, où elle ſeroit égale au poids EON, juſqu'en AO, où elle de- Fig. 107. 108.

vroit être infinie pour ſoûtenir ce poids fini quelconque EON contre le point O de la ſurface HG ou SV verticale en ce point, ſuivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) à cette ſurface en ce même point O.

Il eſt à remarquer que ſuivant l'avis qui précede le Corol. 13. *lorſqu'on dit ici qu'un poids eſt ſoûtenu ſur ou contre le même point d'une ſurface, l'on ne prétend pas dire qu'il ne la rencontre jamais qu'en un ſeul point : l'on entend ſeulement que la droite AD, qui du concours A des directions de ce poids EON & de la puiſſance R en équilibre avec lui ſur cette ſurface quelconque SV, tombe perpendiculairement ſur cette même ſurface, la rencontre toûjours dans le même point O tant que ce poids eſt ſoûtenu deſſus, quoique ce ſoit ſuivant differentes directions de puiſſances. La raiſon de cette précaution eſt évidente du côté des ſurfaces courbes, dont tous les points ont chacun un plan touchant d'une direction particuliere. Pour du côté des ſurfaces planes, on la reconnoîtra dans les Corol.* 35. 36. 37. *où l'on verra que dans l'hypotheſe du concours des lignes de direction des poids en quelque point de la Terre que ce ſoit, ils ne peſent pas toûjours également ſur ces plans, quoique la direction de la puiſſance appliquée à chacun d'eux, demeure toûjours la même, & quand même ces poids ſeroient de peſanteur conſtante, c'eſt-à-dire, chacun de peſanteur abſolue toûjours la même, malgré le Corol.* 37. *du Th.* 21. *Au contraire ils peſent toûjours également chacun ſur le même point de quelque ſurface que ce ſoit, & la charge de cette ſurface y eſt toûjours la même, à moins qu'on ne change la direction de la puiſſance, ou la ſituation de cette ſurface. C'eſt pour cela que dans les ſept précedens Corol.* 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. *où l'on examine ſéparément le changement que peuvent cauſer dans l'action du poids ſur une ſurface, & dans la charge de cette ſurface, les differentes inclinaiſons de la même ou de differentes ſurfaces ſur leſquelles ce poids ſeroit ſoûtenu, & les differentes directions des puiſſances qui l'y ſoûtiendroient, on a regardé ce poids comme appliqué non ſeulement à une même ſurface de même inclinaiſon, mais auſſi toûjours au même point de cette ſurface.*

COROL.

COROLLAIRE XX.

Puiſqu'en cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur quelque ſurface SV que ce ſoit, ſi du concours A des directions ER, FC, de cette puiſſance & de ce poids, on mene une perpendiculaire AO à cette ſurface, de laquelle perpendiculaire prolongée on prenne de A vers O une partie quelconque AD, ſur laquelle (comme diagonale) on faſſe un parallelogramme BACD compris entre ces directions; la puiſſance R, la peſanteur du poids EON, & la charge réſultante de leur concours d'action ſur cette ſurface SV, ſont entr'elles (*Corol.* 7.) en raiſon des trois côtez AB, BD, AD, du triangle BAD, ou comme les trois côtez CD, CA, AD, de ſon ſemblable CDA dans le parallelogramme BACD: il eſt manifeſte dans l'hypotheſe ordinaire où l'on regarde les verticales AC, HK, comme paralleles entr'elles, & comme faiſant l'une & l'autre des angles droits en P, K, avec l'horiſontale GK, de même que AO (*Hyp.*) en O avec HG, & dans laquelle par conſequent les trois triangles AOQ, GPQ, GKH, ſont ſemblables entr'eux, les deux premiers ayant les angles égaux en Q, & l'angle G étant commun aux deux derniers: il eſt, dis-je, manifeſte dans cette hypotheſe, FIG. 105. 106.

I. Que ſi la direction AR de la puiſſance R eſt parallele à la longueur HG du plan touchant en O de la ſurface quelconque SV, c'eſt-à-dire, ſi l'angle DAB, ou ſon égal ADC eſt droit; la reſſemblance qui ſe trouve alors entre les triangles DAC & le triangle OAQ qu'on vient de voir ſemblable ici au triangle KGH, y rendant auſſi les triangles DAC, KGH, ſemblables entr'eux, & conſequemment auſſi les trois côtez CD, CA, AD, du premier de ces deux-ci, en raiſon des trois homologues HK, HG, KG, du ſecond; la puiſſance R, la peſanteur du poids EON, & la charge réſultante de leur concours d'action ſur la ſurface SV, ſeront ici entr'elles en raiſon de ces trois côtez HK, HG, KG, du triangle KGH,

c'eſt-à-dire, comme la hauteur HK du plan HG, ſa longueur HG, & ſa baſe KG, ſont entr'elles. De ſorte qu'ici,

1°. La puiſſance R eſt au poids EON, comme la hauteur HK du plan HG eſt à ſa longueur HG.

2°. La même puiſſance R eſt à la charge de la ſurface SV, réſultante du concours d'action de la puiſſance R, & de la peſanteur du poids EON ſur cette ſurface, comme la hauteur HK du plan HG eſt à ſa baſe KG.

3°. La peſanteur du poids EON eſt à cette même charge de la ſurface SV ou HG, comme la longueur HG du plan de ce nom eſt à ſa baſe KG.

4°. L'effort d'un poids quelconque EON pour deſcendre le long d'un plan incliné HG, & en vertu duquel ce poids commenceroit effectivement à deſcendre, ſi on l'abandonnoit à lui-même, étant égal (*Ax.* 4.) à la puiſſance R, qui dirigée parallelement à la longueur HG de ce plan, retiendroit ce poids en repos ſur ce même plan; on voit (*nomb.* 1. 2. 3.) que cet effort, qu'un Auteur * appelle *Momentum liberum*, ce poids & ce que ce poids libre en feroit de perpendiculaire ſur ce plan HG, doivent toûjours être entr'eux comme ſont ici la puiſſance R, & ce poids EON, & la charge de la ſurface SV.

* Vitalis Jordanus.

II. Si la direction AR de la puiſſance R eſt parallele à la baſe KG du plan HG, c'eſt-à-dire, ſi l'angle BAC eſt droit, & conſequemment auſſi tous les autres angles du parallelogramme BACD, comme le ſont (*Hyp.*) les angles en P, K; la reſſemblance qui ſe trouve alors entre le triangle CDA, & le triangle QOA, qu'on vient de voir ſemblable ici au triangle HKG, y rendant auſſi les triangles CDA, HKG, ſemblables entr'eux, & conſequemment les trois côtez CD, CA, AD, du premier de ces deux-ci, en raiſon des trois homologues HK, KG, HG, du ſecond; la puiſſance R, la peſanteur du poids EON, & la charge réſultante du concours d'action perpendiculaire ſur la ſurface SV, ſeront ici entr'elles en raiſon de ces trois côtez HK, HG, KG, du triangle HKG, c'eſt-

Digitized by Google

à-dire, comme la hauteur HK du plan HG, ſa baſe KG, & ſa longueur HG, ſont entr'elles. De ſorte qu'ici,

1°. La puiſſance R eſt au poids EON, ou à ſa peſanteur, comme la hauteur HK du plan HG eſt à ſa baſe HG.

2°. La puiſſance R eſt à la charge de la ſurface SV, réſultante du concours d'action perpendiculaire de cette puiſſance & du poids EON ſur cette ſurface, comme la hauteur HK du plan HG eſt à ſa longueur HG.

3°. La peſanteur du poids EON eſt à cette même charge de la ſurface SV, comme la baſe KG du plan HG eſt à ſa longueur HG.

III. Si preſentement on ſuppoſe deux puiſſances R, *r*, qui ſoûtiennent ſucceſſivement un même poids EON ſur le même point O de la même ſurface SV, la premiere (R) ſuivant une direction parallele à la longueur HG du plan, & la ſeconde (*r*) ſuivant une direction parallele à la baſe KG de ce plan; les nomb. 1. des deux précedens art. 1. 2. font voir enſemble que la premiere (R) de ces deux puiſſances ſera ici à la ſeconde (*r*) comme la baſe KG du plan HG ſera à ſa longur HG. Car (*art.* 1. *nomb.* 1. R. EON :: HK. HG. Et (*art.* 2. *nomb.* 1.) EON. *r* :: KG. HK. Donc (en multipliant par ordre) R. *r* :: KG. HG. ainſi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XXI.

Dans la même hypotheſe des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, ſoient deux poids P, *p*, ſoûtenus par deux puiſſances R, *r*, ſur deux plans inclinez de longueurs L, *l*, deſquels les hauteurs ſoient H, *h*, les baſes B, *b*, & les charges C, *c*, réſultantes chacune du concours d'action perpendiculaire de chaque poids & de chaque puiſſance ſur chaque ſurface ou plan : Soient (dis-je) appellées

Les longueurs des plans,	L, *l*.
Leurs hauteurs,	H, *h*.
Leurs baſes,	B, *b*.

Leurs charges, C, c
Les poids, ou leurs peſanteurs, P, p
Les puiſſances qui les ſoûtiennent ſur ces plans, R, r.

Ces noms ſuppoſez, il ſuit de l'art. 1. du précedent Corol. 20. que ſi les directions des puiſſances R, r, ſont paralleles aux longueurs L, l, des plans ſur leſquels elles ſoûtiennent les poids P, p,

1°. L'on aura (*Cor. 20. art. 1. nomb. 1.*) R. P :: H. L = $\frac{P \times H}{R}$. Et r. p :: h. l = $\frac{p \times h}{r}$. Donc L. l :: $\frac{P \times H}{R}$. $\frac{p \times h}{r}$. D'où réſulte $\frac{L \times p \times h}{r} = \frac{l \times P \times H}{R}$, ou L×R×p×h = l×r×P×H. Ce qui donne tous les rapports poſſibles de deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, quelques autres rapports qu'on ſuppoſe entre les ſix autres grandeurs priſes ainſi deux à deux comparables entr'elles.

2°. L'on aura auſſi (*Corol. 20. art. 1. nomb. 2.*) R. C :: H. B = $\frac{C \times H}{R}$. Et r. c :: h. b = $\frac{c \times h}{r}$. Donc B. b :: $\frac{C \times H}{R}$. $\frac{c \times h}{r}$. D'où réſulte $\frac{B \times c \times h}{r} = \frac{b \times C \times H}{R}$, ou B×R×c×h = b×r×C×H. Ce qui donne tous les rapports poſſibles des huit grandeurs qui entrent en cette égalité, en les prenant deux à deux comparables entr'elles, comme dans le précedent nomb. 1.

3°. L'on aura de plus (*Corol. 20. art. 1. nomb. 3*). C. P :: B. L = $\frac{P \times B}{C}$. Et c. p :: b. l = $\frac{p \times b}{c}$. Donc L. l :: $\frac{P \times B}{C}$. $\frac{p \times b}{c}$. D'où réſulte $\frac{L \times p \times b}{c} = \frac{l \times P \times B}{C}$, ou L×C×p×b = l×c×P×B. Ce qui donne auſſi tous les rapports poſſibles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, en les prenant deux à deux quelconques comparables entr'elles, comme dans les précedens nomb. 1. 2.

Digitized by Google

COROLLAIRE XXII.

Les noms demeurans les mêmes que dans le précedent Corol. 21. auſſi-bien que l'hypotheſe des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans ; il ſuit auſſi de l'art 2. du Corol. 20. que ſi les directions des puiſſances R, r, ſont paralleles aux baſes B, b, des plans ſur leſquels elles ſoûtiennent les poids P, p ;

1°. L'on aura (*Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 1.) R. P :: H. B $= \frac{P \times H}{R}$. Et r. p :: h. $b = \frac{p \times h}{r}$. Donc B. b :: $\frac{P \times H}{R}$. $\frac{p \times h}{r}$. D'où réſulte $\frac{B \times p \times h}{r} = \frac{b \times P \times H}{R}$, ou $B \times R \times p \times h = b \times r \times P \times H$. Ce qui donne tous les rapports poſſibles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, en les prenant deux à deux quelconques comparables entr'elles, comme dans les nomb. 1. 2. 3. de l'art. 1.

2°. L'on aura auſſi *Corol.* 20. *art.* 2. *nomb.* 2.) R. C :: H L $= \frac{C \times H}{R}$. Et r. c :: h. $l = \frac{c \times h}{r}$. Donc L. l :: $\frac{C \times H}{R}$. $\frac{c \times h}{r}$ D'où réſulte $\frac{L \times c \times h}{r} = \frac{l \times C \times H}{R}$, ou $L \times R \times c \times h = l \times r \times C \times H$. Ce qui donne auſſi tous les rapports poſſibles entre deux quelconques comparables entr'elles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, quelques ſoient les rapports ſuppoſez des ſix autres de ces huit grandeurs, ainſi priſes deux à deux comparables entr'elles.

3°. L'on aura auſſi (*Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 3.) P. C :: B. L $= \frac{C \times B}{P}$. Et p. c :: b. $l = \frac{c \times b}{p}$. Donc L. l :: $\frac{C \times B}{P}$. $\frac{c \times b}{p}$. D'où réſulte $\frac{L \times c \times b}{p} = \frac{l \times C \times B}{P}$, ou $L \times P \times c \times b = l \times p \times C \times B$. Ce qui donne comme ci-deſſus tous les rapports poſſibles entre deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs compriſes dans cette égalité.

COROLLAIRE XXIII.

Les noms demeurant encore les mêmes que dans les précedens Corol. 21. & 22. auſſi-bien que l'hypotheſe des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans; il ſuit encore du Corol. 20. que ſi des deux puiſſances R, *r*, une d'entr'elles, par exemple, R, a ſa direction parallele à la longueur L de ſon plan, & l'autre *r* parallele à la baſe *b* du ſien;

I. L'on aura (*Corol.* 20. *art.* 1. *nomb.* 1.) H. L :: R. P $= \frac{L \times R}{H}$. D'où réſulte L $= \frac{P \times H}{R}$. L'on aura auſſi (*Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 1. 2. 3.) *h*. *b*. :: *r*. *p* $= \frac{b \times r}{h}$. De plus *r*. *c* :: *h*. *l* $= \frac{c \times h}{r}$. De plus encore *p*. *c* :: *b*. *l* $= \frac{c \times b}{p}$. Donc,

1°. L'on aura ici P. *p* :: $\frac{L \times R}{H}$. $\frac{b \times r}{h}$ D'où réſulte $\frac{P \times b \times r}{h} = \frac{P \times L \times R}{H}$, ou P×H×*b*×*r* = *p*×*h*×L×R.

2°. L'on aura auſſi L. *l* :: $\frac{P \times H}{R}$. $\frac{c \times h}{r}$. D'où réſulte $\frac{L \times c \times h}{r} = \frac{l \times P \times H}{R}$, ou L×R×*c*×*b* = *l*×*r*×P×H.

3°. L'on aura de plus L. *l* :: $\frac{P \times H}{R}$. $\frac{c \times b}{p}$. D'où réſulte $\frac{L \times c \times b}{p} = \frac{l \times P \times H}{R}$, ou L×R×*c*×*b* = *l*×*p*×P×H.

II. Le nomb. 2. de l'art. 1. du Corol. 20. donnera R. C :: H. B $= \frac{C \times H}{R}$. D'où réſulte auſſi H $= \frac{B \times R}{C}$. Et les nomb. 1. 2. 3. de l'art. 2. du même Corol. 20. donneront pa-

Digitized by Google

reillement $r.p::b.b=\frac{p\times h}{r}$. Deplus $c.r::l.h=\frac{l\times r}{c}$. Deplus encore $c.p::l.b=\frac{p\times l}{c}$. Donc,

1°. L'on aura ici $B.b::\frac{C\times H}{R}.\frac{p\times h}{r}$. D'où réſulte $\frac{B\times p\times h}{r}=\frac{b\times C\times H}{R}$, ou $B\times R\times p\times h=b\times r\times C\times H$.

2°. L'on aura auſſi $B.b::\frac{C\times H}{R}.\frac{p\times l}{c}$. D'où réſulte $\frac{B\times p\times l}{c}=\frac{b\times C\times H}{R}$, ou $B\times R\times p\times l=b\times c\times C\times H$.

3°. L'on aura de plus $H.b::\frac{B\times R}{C}.\frac{l\times r}{c}$. D'où réſulte $\frac{H\times l\times r}{c}=\frac{b\times B\times R}{C}$, ou $H\times C\times l\times r=b\times c\times B\times R$.

III. Le nomb. 3. de l'art. 1. du Corol. 20. donnera $P.C::L.B=\frac{C\times L}{P}$. D'où réſulte auſſi $L=\frac{B\times P}{C}$. Et les nomb. 1. 2. 3. de l'art. 2. du même Corol. 20. donneront pareillement $r.p::b.b=\frac{p\times b}{r}$. De plus $r.c::b.l=\frac{c\times b}{r}$. De plus encore $c.p::l.b=\frac{p\times l}{c}$. Donc,

1°. L'on aura ici $B.b::\frac{C\times L}{P}.\frac{p\times b}{r}$. D'où réſulte $\frac{B\times p\times b}{r}=\frac{b\times C\times L}{P}$, ou $B\times P\times p\times b=b\times r\times C\times L$.

2°. L'on aura auſſi $B.b::\frac{C\times L}{P}.\frac{p\times l}{c}$. D'où réſulte $\frac{B\times p\times l}{c}=\frac{b\times C\times L}{P}$, ou $B\times P\times p\times l=b\times c\times C\times L$.

3°. L'on aura de plus L. l :: $\frac{B \times P}{C}$. $\frac{c \times h}{r}$. D'où réſulte $\frac{L \times c \times h}{r}$ $= \frac{l \times B \times P}{C}$, ou $L \times C \times c \times h = l \times r \times B \times P$.

Toutes les équations trouvées pour le cas du preſent Corol. 23. dans les nomb. 1. 2. 3. de ſes art. 1. 2. 3. donneront (comme celles des précedens Corol. 21. 22.) tous les rapports entre deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs compriſes dans chacune de ces égalitez. On ne s'arrête point ici à détailler ces rapports particuliers, non plus que dans les Corol. 21. 22. ce détail étant facile aux moindres Géométres qui auront la curioſité d'y entrer.

COROLLAIRE XXIV.

FIG. 205. 206.

En cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur la ſurface quelconque SV dans la même hypotheſe des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, ſi après avoir prolongé RA, ou le plan HG, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en M dans les Fig. 205. 206. lequel plan GH ſoit le touchant de la ſurface courbe SV en celui O de ſes points ſur lequel le poids EON ſeroit ſoûtenu par la puiſſance R: ſi, dis-je, après cela on conſidere que les angles en O, K, ſont droits, & que l'angle G (*Corol.* 20.) eſt toûjours égal à l'angle DAC; l'on aura (*Déf.* 9. *Corol.* 1. 2.) le ſinus de l'angle BAD, ou de ſon égal, ou complement MAO, au ſinus total :: MO. AM. Et ce ſinus total au ſinus de l'angle DAC, ou de ſon égal G :: GH. HK. Donc (en multipliant par ordre les termes de ces deux analogies) le ſinus de l'angle BAD ſe trouvera être au ſinus de l'angle DAC :: MO×GH. AM×HK. Donc en general en cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur un point quelconque O de la ſurface inclinée SV ou HG; ce poids EON dans la preſente hypotheſe de ſa direction parallele à la hauteur HK de ce plan HG, quelle que ſoit la direction de la puiſſance

ce R, ſera auſſi toûjours (*Corol.* 10.) à cette puiſſance R :: MO×GH. AM×HK.

COROLLAIRE XXV.

Donc lorſque la direction AR de la puiſſance R ſera parallele à la longueur du plan GH, les lignes MO, AM, alors infinies, ſe trouvant pour lors égales entr'elles ; le poids EON ſera à cette puiſſance R :: GH. HK. c'eſt-à-dire, comme la longueur du plan GH eſt à ſa hauteur, ainſi qu'on l'a déja vû d'une autre maniere dans le nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 20.

COROLLAIRE XXVI.

Puiſqu'en general (*Corol.* 18. 19.) de toutes les puiſſances R capables de ſoutenir un même poids EON ſur un même point O de quelque ſurface fixe SV que ce ſoit, la moindre eſt toûjours celle dont la direction AR ſeroit parallele à GA ; il ſuit du précedent Cor. 25. & du nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 20. que dans l'hypotheſe des directions des poids paralleles aux hauteurs des plans, la moindre de toutes ces puiſſances R ſeroit auſſi celle qui ſeroit à ce même poids EON, comme la hauteur HK du plan GH eſt à ſa longueur HG.

Voilà juſqu'ici tout autant de Corollaires des part. 1. 2. *du preſent Th.* 25. *en voici preſentement quelques-uns de ſa part.* 3. *après quoi on en verra auſſi de toutes ſes trois parties enſemble. Nous y prendrons ſ pour la marque ou la caracteriſtique des ſinus, juſqu'à ce que nous avertiſſions du contraire.*

COROLLAIRE XXVII.

Quelles que ſoient les directions ER, FC, de la puiſſance R & du poids EON, auquel elle eſt appliquée ſur la ſurface inclinée quelconque SV, ſi la perpendiculaire AO à cette ſurface en O, menée du concours A de ces directions, paſſe par la baſe du poids EON, & qu'il ſoit à la puiſſance R comme le ſinus de l'angle RAO au ſinus

FIG. 105. 106. 107. 108.

de l'angle CAO, c'eſt-à-dire, en raiſon reciproque des ſinus des angles que leurs directions ſont avec AO; il ſuit de la part. 3. que cette puiſſance R ſoûtiendra ce poids EON en équilibre ſur le point O de la ſurface SV.

Pour le voir, ſoit ſur la diagonale AD, partie quelconque de AO prolongée vers D, la parallelogramme BACD, dont les côtez AB, AC, ſoient ſur les directions de la puiſſance R & du poids EON. L'angle ADB étant égal à ſon alterne CAD, ſi l'on prend ſ pour la caracteriſtique des ſinus, l'on aura pour lors ſBAD. ſADB :: ſBAD. ſCAD :: ſRAO. ſCAO (*Hyp.*) :: EON. R. Or (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) ſBAD. ſADB :: BD. AB :: AC. AB. Donc on aura auſſi pour lors EON. R :: AC. AB. c'eſt-à-dire, le poids EON à la puiſſance R, comme le côté AC eſt au côté AB du parallelogramme BACD, qui (*conſtr.*) les a ſur les directions de ce poids & de cette puiſſance, ayant auſſi (*Hyp.*) ſa diagonale AD perpendiculaire en O à la ſurface SV, & par la baſe de ce même poids. Donc (*part.* 3.) la puiſſance R ſoûtiendra ici en équilibre ce poids EON ſur ce point O de cette ſurface quelconque SV, ainſi qu'il le falloit faire voir.

COROLLAIRE XXVIII.

Fig. 210. Il ſuit de-là que toute puiſſance R qui peut ſoûtenir un poids quelconque EON ſur quelque point O d'une ſurface inclinée quelconque SV, ſuivant une ligne de direction AR, ou $A\rho$, qui faſſe au point A avec AR perpendiculaire à AO, ou parallele à la longueur HD du plan touchant en O la ſurface en queſtion, un angle RAr, ou $RA\rho$, moindre que RAN, l'y peut ſoûtenir encore ſur le même point O ſuivant une autre ligne de direction $A\rho$, ou Ar, laquelle paſſant de l'autre côté de cette perpendiculaire AR, faſſe avec elle un angle $RA\rho$, ou RAr, égal au premier RAr, ou $RA\rho$, c'eſt-à-dire, que ſi les deux angles quelconques RAr, $RA\rho$, ſont égaux entre-eux, & chacun moindre que l'angle RAN, la puiſſance

capable de ſoûtenir le poids EON ſuivant Ar ſur le point O de la ſurface inclinée quelconque SV, l'y ſoûtiendra auſſi ſuivant Aρ, & reciproquement.

Car il eſt viſible qu'on auroit alors $rAO + \rho AO = 2 \times RAO$, c'eſt-à-dire, les deux angles rAO, ρAO, égaux enſemble à deux droits RAO; & qu'ainſi chacun de ces deux-là ſeroit le complement de l'autre à deux droits; & conſequemment auſſi (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) que le ſinus de l'un ſeroit pour lors le ſinus de l'autre. Donc alors le ſinus de l'angle CAO ſeroit en même raiſon au ſinus de chacun des angles rAO, ρAO. Donc auſſi (*Corol.* 10. 27.) la même puiſſance R, qui dirigée ſuivant celle qu'on voudra des lignes Ar, Aρ ſoûtiendroit le poids EON ſur le point O de la ſurface SV, l'y ſoûtiendroit auſſi ſuivant l'autre de ces deux directions, tant qu'elles feront des angles égaux quelconques rAR, ρAR, avec AR (*Hyp.*) perpendiculaire ſur AO, ou parallele à GH, & chacun moindre que RAN.

COROLLAIRE XXIX.

Cela peut encore ſe démontrer ſans le ſecours des ſinus: car tant que les directions Ar, Aρ, feront des angles égaux de part & d'autre avec AR, leurs paralleles Cd, Cδ, en feront auſſi d'égaux avec CD parallele à AR. Par conſequent CD étant perpendiculaire en D ſur AO prolongée vers X, comme l'eſt (*Hyp.*) AR en A ſur la même AO, les lignes Cd, Cδ, ſeront égales entr'elles, & conſequemment auſſi Ab, Aβ, côtez qui leur ſont opppoſez dans les parallelogrammes $bACd$, $\beta AC\delta$. Donc (*part.* 2. 3.) la puiſſance R, qui dirigée ſuivant une quelconque des lignes Ar, Aρ, pourroit ſoûtenir le poids EON ſur un point quelconque O d'une ſurface fixe inclinée quelconque SV, pourroit auſſi l'y ſoûtenir ſuivant l'autre de ces deux directions, tant qu'elles feront des angles égaux de part & d'autre avec AR, & chacun moindre que l'angle RAN. Tout cela s'accorde avec la fin du Corol. 17.

Chacun de ces deux derniers Corollaires 28. 29. fait aſſez voir que tout ce qu'ils contiennent, ſeroit encore vrai, quand même chacun des angles rAR, pAR, ſeroit égal à RAN: mais la puiſſance R dirigée ſuivant Ar, ſe trouvant alors l'être ſuivant AN directement à contre-ſens du poids EON, le ſoûtiendroit alors ſeule (nomb. 1. des Corol. 15. 16.) *ſans le ſecours de la ſurface SV; ce qui ne ſeroit plus de la preſente hypotheſe, dans laquelle on ſuppoſe cette puiſſance & ce poids en équilibre entr'eux ſur cette ſurface. Le cas où l'angle ſeroit plus grand que RAN de ce côté-là, y ſeroit encore plus contraire; puiſqu'alors (ſuivant la reflexion qui eſt entre les Corol. 15. 16.) il n'y auroit plus du tout d'equilibre entre cette puiſſance & ce poids, bien loin de le ſoûtenir ſur la ſurface SV, ainſi qu'on le ſuppoſe ici.*

COROLLAIRE XXX.

Puiſque (*Corol.* 28.) de toutes les directions Ar, AR, Ap, &c. ſuivant leſquelles differentes puiſſances peuvent, chacune ſuivant la ſienne, ſoûtenir un même poids EON ſur le même point O d'une ſurface quelconque SV toûjours également inclinée en ce point O; la direction AR, perpendiculaire à AO, ou parallele au plan GH, eſt celle qui exige la moindre de toutes ces puiſſances pour l'y ſoûtenir: puiſqu'auſſi (*Corol.* 10. 18.) cette moindre puiſſance R dirigée ſuivant AR, eſt alors à ce même poids EON, comme le ſinus de l'angle CAO ou CAD eſt au ſinus de DAR ſuppoſé droit, c'eſt-à-dire, comme le ſinus de l'angle CAD eſt au ſinus total; il eſt viſible que toute autre puiſſance dirigée ſuivant celle qu'on voudra des autres directions Ar, Ap, &c. compriſes auſſi dans l'angle DAN, & en équilibre avec le même poids EON ſur le même point O de la même ſurface fixe SV, ſera à ce poids en plus grande raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total, ou que OQ à AQ; & conſequemment auſſi (en ſuppoſant la direction FC du poids EON parallele à la hauteur HK du plan HG) en plus grande raiſon que HK à HG, cette hypotheſe rendant les triangles rectangles

Digitized by Google

AOQ, GPQ, GKH, ſemblables entreeux ; & en general pour quelque hypotheſe que ce ſoit de paralleliſme ou de concours entr'elles des verticales FC, HK, en raiſon d'autant plus grande (*Corol.* 15. 16.) que la direction Ar, ou Ap, de cette puiſſance, fera un angle RAr, ou RAp, plus grand avec AR perpendiculaire (*Hyp.*) à AO, ou parallele à HG, ſans ſortir de l'angle OAN.

COROLLAIRE XXXI.

Cela étant, & d'un autre côté (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) la puiſſance requiſe ici pour ſoûtenir le poids EON ſur le point O de la ſurface SV ſuivant une direction Ar, ou Ap, non perpendiculaire à AO, devant être d'autant moindre que ce poids (quoiqu'en raiſon differente) que l'angle RAr ou RAp, de cette direction avec AR perpendiculaire (*Hyp.*) à AO, ſera moindre que l'angle RAN ; il ſuit en general qu'une même puiſſance peut ſoûtenir un même poids ſur un même point d'une ſurface inclinée fixe quelconque ſuivant deux directions differentes, pourvû qu'elle ſoit moindre que ce poids, & qu'elle lui ſoit cependant en plus grande raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total ; c'eſt-à-dire, dans l'hypotheſe ordinaire des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, pourvû que cette puiſſance moindre que ce poids, lui ſoit cependant en plus grande raiſon que le ſinus d'inclinaiſon G du plan GH au ſinus total, ou (*Déf.* 9. *Corol.* 1. *& Lem.* 8. *Corol.* 2.) que la hauteur HK de ce plan à ſa longueur HG.

COROLLAIRE XXXII.

En tout autre cas, c'eſt-à-dire, lorſque cette puiſſance eſt plus grande que ce poids, ou du moins lorſqu'elle lui eſt égale, ou bien lorſqu'elle lui eſt en même raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total ; elle ne peut le ſoûtenir ſur le même point O de la ſurface fixe SV, que ſuivant une ſeule direction. Car en ſuppoſant toûjours l'angle RAO ou RAD droit,

1°. Si cette puiſſance étoit plus grande que le poids EON, avec lequel on la ſuppoſe ici en équilibre ſur le point O de la ſurface SV, la direction de cette puiſſance non ſeulement ne pourroit être (*Corol.* 15. 16.) que dans l'angle droit RAD, telle qu'eſt ici A_1; mais encore cette direction A_1 y ſeroit unique, ne pouvant faire avec AD qu'un angle $_1$AD, dont le ſinus ſoit à celui de CAD comme le poids EON à cette puiſſance, ainſi qu'il eſt requis (*Corol.* 10.) pour leur équilibre ſuppoſé ſur le point O de la ſurface fixe SV.

2°. Si cette puiſſance étoit égale à ce poids EON, des deux directions également éloignées de AR, ſuivant leſquelles elle pourroit (*Corol.* 17.) ſucceſſivement ſoûtenir ce poids; il y en auroit neceſſairement une (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) ſuivant AN, ſuivant laquelle cette puiſſance ſoûtiendroit (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) ſeule ce poids ſans le ſecours de la ſurface SV; ce qui ſeroit ici contre l'hypotheſe.

3°. Si cette puiſſance étoit au poids en même raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total ou de l'angle (*Hyp.*) droit RAD, elle ne pourroit le ſoûtenir (*Corol.* 10.) que ſuivant AR.

4°. Enfin ſi cette puiſſance étoit à ce poids EON en moindre raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total ou de l'angle (*Hyp.*) droit RAD; elle ne pourroit plus du tout (*Corol.* 10.) faire équilibre avec ce poids ſur la ſurface SV, ne pouvant y avoir d'angle, au ſinus duquel celui de l'angle conſtant CAD puiſſe être en moindre raiſon qu'au ſinus total, c'eſt-à-dire, de ſinus plus grand que le total.

Donc (*nomb.* 1. 2. 3. 4.) lorſque cette puiſſance eſt plus grande que le poids EON, ou qu'elle lui eſt égale, ou bien lorſqu'elle lui eſt en même raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total; elle ne peut ſoûtenir ce poids quelconque ſur un même point quelconque de quelque ſurface fixe que ce ſoit, que ſuivant une ſeule direction, ainſi qu'on le vient d'avancer, & ſuivant aucune (*nomb.* 3.)

Digitized by Google

lorſque cette puiſſance eſt au poids EON en moindre raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total.

Au contraire (*Corol.* 3.) elle le peut toûjours ſoûtenir ſur ce même ponit de cette même ſurface fixe, ſuivant deux directions differentes également éloignées de AR perpendiculaire à AO, ou parallele au plan HG, tant qu'elle eſt moindre que ce poids, & qu'elle lui eſt cependant en plus grande raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total.

Juſqu'ici nous n'avons regardé le même poids que comme appliqué au même endroit de quelque ſurface que ce ſoit, ou que comme appliqué au même point d'un plan qui la toucheroit en ce point lorſqu'elle eſt courbe ; ce qu'on a vû pour toutes ſortes de ſurfaces revenir au même que ſi ce poids n'eût été appliqué qu'au même point d'une plane, ou d'un plan incliné quelconque : de ſorte que ce poids ſur differens points d'une même ſurface courbe, y doit être conſideré comme ſur differens plans touchans de cette ſurface en ces differens points ; ce qui étant compris dans ce qui précede de poids quelconques ſoûtenus chacun ſur un même point auſſi quelconque de quelque ſurface que ce ſoit, il ne nous reſte plus qu'à conſiderer ce poids ſucceſſivement ſoûtenu ſur differens points d'un plan incliné. Mais parce que hors l'hypotheſe ordinaire des directions des graves toutes paralleles entr'elles, ce poids n'auroit plus (Th. 21. Cor. 37.) *la même peſanteur ſur ces differens points d'un même plan, quand même tous ſes points y conſerveroient chacun la ſienne, c'eſt-à-dire, la même pour chacun de ces points ; nous n'appellerons ici* mêmes poids *que ceux qui ſeront de peſanteurs égales aux differens endroits où nous les placerons, quelques differens qu'ils ſoient d'ailleurs entr'eux, pour rendre encore ce qui ſuit general pour toutes les hypotheſes imaginables des directions des graves.*

COROLLAIRE XXXIII.

Soit preſentement un même corps, ou deux differens EON, FQM, de même peſanteur en differens points d'un même plan incliné HG ſur leſquels points ces corps ſoient- FIG. 211. 212.

ſoûtenus par deux puiſſances R, P, des directions quelconques ER, FP, qui concourent en A, B, avec les directions AB, BD, de ces poids, leſquelles concourent entr'elles en quelque point D que ce ſoit, lequel ſoit (ſi l'on veut) le centre de la Terre. Des points A, B, de concours des directions des puiſſances & des poids qu'elles ſoûtiennent, ſoient AO, BQ, perpendiculaires en O, Q, au plan HG; ſoient auſſi les directions des poids prolongées vers N, M.

Cela fait, le Corol. 10. fait voir qu'en ce cas d'équilibre entre les puiſſances R, P, & les poids EON, FQM, qu'elles ſoûtiennent ſur les points O, Q, du plan HG; que la puiſſance R ſera à la puiſſance P en raiſon compoſée de la directe des ſinus des angles DAO, DBQ, que les directions des poids qu'elles ſoûtiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, au plan GH; & de la reciproque des ſinus des angles RAO, PBQ, que les directions de ces puiſſances font avec ces mêmes perpendiculaires; c'eſt-à-dire (en prenant ſ pour la marque ou la caracteriſtique des ſinus) R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO.

Car en ce cas d'équilibre, ce Corol. 10. donne R. EON :: ſDAO. ſRAO. & FQM. P :: ſPBQ. ſDBQ. Donc les poids EON, FQM, étant pris ici pour leurs peſanteurs ſuppoſées égales entr'elles en O, Q; ſi l'on multiplie par ordre les termes de ces deux analogies, l'on aura ici R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO. ainſi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XXXIV.

Or les perpendiculaires AO, BQ, au plan HG, ſe trouvant ainſi paralleles entr'elles, ſi l'on prolonge BQ juſqu'à la rencontre de AD en S, l'on aura l'angle DAO ou SAO égal à ſon alterne ASB, outre DRQ=DBS. Donc (*Corol.* 33.) l'on aura pareillement ici R. P :: ſASB×ſPBQ. ſDBS×ſRAO. Mais (*Lef.* 9. *Cor.* 2.) ſASB=ſBSD, & (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) ſBSD. ſDBS :: DB. DS. Donc auſſi R. P :: BD×ſPBQ. DS×ſRAO.

COROL.

COROLLAIRE XXXV.

Puiſque dans l'équilibre ici ſuppoſé entre les puiſſances R, P, & les poids EON, FQM, ſuppoſez de même peſanteur ſur differens points O, Q, d'un même plan HG d'inclinaiſon quelconque ; le Corol. 33. donne R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO.

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles, & celles des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce ſoit ; les angles RAO, PBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſRAO, ſPBQ, l'on aura pour lors R. P :: ſDAO. ſDBQ. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, entr'elles en raiſon des ſinus des angles DAO, DBQ, que les directions des poids EON, FQM, qu'elles ſoûtiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, au plan GH.

2°. Si ce ſont les directions des poids EON, FQM, qui ſoient paralleles entr'elles, & non celles des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent ; les angles DAO, DBQ, ſe trouvant alors égaux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſDAO, ſDBQ, l'on aura pour lors R. P :: ſPBQ. ſRAO. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles RAO, PBQ, que leurs directions ER, FP, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan GH.

3°. Enfin ſi les directions des puiſſances ſont paralleles entr'elles, & celles des poids paralleles auſſi entr'elles, non ſeulement les angles RAO, PBQ, mais encore les angles DAO, DBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux comme dans les deux précedens nomb. 1. 2. l'on aura pour lors R=P, c'eſt-à-dire, que les puiſſances ſeront alors égales entr'elles, auſſi-bien que (*Hyp.*) les poids.

COROLLAIRE XXXVI.

Puiſque dans l'équilibre ici ſuppoſé le Corol. 34. donne R. P :: BD×ſPBQ. DS×ſRAO.

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles, & les directions des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce ſoit, ainſi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 35. les angles RAO, PBQ, ſe trouvant encore ici comme là, égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſRAO, ſPBQ, l'on aura pour lors R. P :: BD. DS.

2°. Si ce ſont les directions AD, BD, des poids EON, FQM, qui ſoient paralleles entr'elles, & non celles des puiſſances R, P, qui ſoûtiennent ces poids ſur les points O, Q, du plan HG, ainſi que dans le nomb. 2. du précedent Corol. 35. Cette hypotheſe rendant (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) l'angle D infiniment aigu, & conſequemment (*nom.* 6. *Corol.* 2.) BD, SD, toutes deux infinies & égales entr'elles, leur difference ſe trouvant alors infiniment petite ou nulle par rapport à elles : l'on aura pour lors R. P :: ſPBQ. ſRAO. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, en raiſon reciproque des ſinus des angles RAO, PBQ, que les directions des poids EON, FMQ, qu'elles ſoûtiennent, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan GH, ainſi qu'on l'a déja vû pour cette hypotheſe dans le nomb. 2. du précedent Corol. 35.

3°. Enfin ſi (comme dans le nomb. 3. du précedent Corol. 35.) les directions des puiſſances ſont paralleles entre-elles, & celles des poids paralleles auſſi entr'elles ; cette hypotheſe rendant non ſeulement BD=SD, comme dans le précedent nomb. 2. mais encore les angles RAO, PBQ, égaux entr'eux, comme dans le nomb. 1. l'on aura encore ici R=P, ainſi que cette même hypotheſe l'a déja donné dans le nomb. 3. du précedent Corol. 35.

COROLLAIRE XXXVII.

Le Corol. 37. du Th. 21. a fait voir que dans l'hypotheſe des directions des graves concourantes en quelque point que ce ſoit, par exemple, au centre de la Terre, chacun de ces corps peſeroit plus ou moins, ou (ſi l'on veut) tireroit plus ou moins fortement le fil ſans peſanteur auquel

il ſeroit verticalement ſuſpendu, ſelon qu'il ſe trouveroit alors plus ou moins éloigné de ce point de concours, quand même chacun des ſiens peſeroit également à toutes diſtances de celui-là : de ſorte qu'en appellant *Peſanteur abſolue* de chacun de ces poids ce que le fil vertical, ou la force qui le retiendroit, en auroit à ſoûtenir à chaque diſtance où le poids ſe trouveroit du point de concours des directions de tous les ſiens ; la peſanteur abſolue de ce même corps ſe trouveroit variable dans cette hypotheſe, c'eſt-à-dire, plus ou moins grande, ſelon que ce corps ſe trouveroit plus ou moins éloigné de ce concours : de ſorte, dis-je, que dans cette hypotheſe des directions des graves concourantes en quelque point que ce ſoit, des corps differens d'ailleurs pourroient être de même peſanteur abſolue par la ſeule varieté de leurs diſtances à ce point, ſçavoir, le moindre en maſſe être égal en peſanteur au plus grand, par ſon plus grand éloignement de ce point de concours.

Voilà, dis-je, ce que le Corol. 37. du Th. 21. fait voir. Voici preſentement ce qui ſuit du nomb. 1. des deux derniers Corol. 35. 36. Ils font voir de plus qu'un même corps, ou deux differens EON, FQM, de même peſanteur abſolue, ſur deux differens points O, Q, d'un même plan incliné HG, par de-là lequel les directions des graves concourreroient en quelque point D que ce fût, y peſeroient encore plus ou moins, ſelon qu'ils y ſeroient plus ou moins éloignez de ce point D : en ſorte qu'il faudroit ici une plus grande force à la puiſſance R pour ſoûtenir le poids EON en O, ſuivant quelque direction ER que ce fût, qu'à la puiſſance P pour le ſoûtenir en Q ſuivant une direction FP parallele à ER, quand même il ſeroit de même peſanteur abſolue en O, Q : puiſque le nomb. 1. du Corol. 35. donneroit alors R. P :: ſDAO. ſDBQ :: ſBSA. ſDBS. & que le nomb. 1. du Corol. 36. donneroit auſſi pour lors R. P :: BD. DS. c'eſt-à-dire, de part & d'autre, la puiſſance R plus grande que la puiſſance P.

Tout cela fait voir que l'hypotheſe des directions des graves EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce ſoit, auſſi-bien que celles de leurs parties, y doit cauſer une double variabilité de peſanteur par rapport aux puiſſances R, P, requiſes pour le ſoûtenir ſuivant des directions paralleles ſur des points O, Q, d'un plan HG, differemment éloignez du point D : c'eſt-à-dire, une double raiſon de diminution de peſanteur dans le plus proche FQM du point D, & une double d'augmentation dans le plus éloigné EON de ce point ; puiſque quand il n'y auroit point ici de plan HG, ni d'autre ſurface pour ſoûtenir les poids FQM, EON, chacun d'eux (*Th.* 21. *Corol.* 37.) peſeroit abſolument moins en Q qu'en O, & que quand même ils y auroient les mêmes peſanteurs abſolues, & qu'ils y peſeroient également ſans s'appuyer ſur le plan HG, ils peſeroient encore (*nomb.* 1. *des Corol.* 36. 37.) moins en Q qu'en O, y étant ſoûtenus par des puiſſances P, R, de directions paralleles entr'elles, c'eſt-à-dire, que nonobſtant cette égalité de peſanteurs abſolues, il faudroit encore par cette nouvelle raiſon une moindre puiſſance pour le ſoûtenir en Q qu'en O, ſuivant des directions paralleles entr'elles pendant que celles qu'il auroit en ces points, concourreroient en D.

On voit preſentement que dans l'hypotheſe des directions des graves concourantes en quelque point que ce ſoit, il y a bien de la difference entre un poids ſoûtenu ſur un même plan, & un poids ſoûtenu ſur le même point d'un plan, ou de toute autre ſurface quelconque. C'eſt auſſi pour cela qu'on a pris ſoin ci-deſſus de ne les pas confondre, & de faire remarquer cette difference dans la reflexion qui ſuit le Corol. 19. *où il s'agiſſoit, comme preſque par tout juſqu'ici des directions quelconques des graves en general : je dis* preſque, *n'y ayant que peu d'endroits où on les ait regardez comme paralleles entr'elles, & où on en a averti le Lecteur. Quant à ce cas particulier des directions des graves paralleles entr'elles, le Corollaire ſuivant va faire voir que cette difference s'y évanoüit ſur un même plan, & qu'un même poids y doit peſer également ſur tous les points*

Digitized by Google

de ce plan ; en ſorte qu'une même puiſſance l'y peut ſucceſſivement ſoûtenir ſur differens points ſuivant une même direction quelconque, c'eſt-à-dire, ſuivant des directions quelconques toutes paralleles auſſi entr'elles. En effet,

Il eſt à remarquer que lorſqu'en cas d'équilibre on ſuppoſera dans la ſuite les directions des poids paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, ou celles des puiſſances paralleles auſſi entr'elles vers tel côté qu'on voudra, & de même lorſqu'on ſuppoſera ces directions tant des poids que des puiſſances à volonté ; il faudra toûjours excepter les cas où les directions des poids ſeroient dans les angles RAO, PBQ, & où celles des puiſſances ſeroient hors des angles NAO, MBQ ; puiſque ſuivant le Corol. 4. & la reflexion italique qui le ſuit, l'équilibre ſuppoſé ſeroit impoſſible dans l'un & dans l'autre de ces deux cas.

COROLLAIRE XXXVIII.

Si les directions des poids, & celles de tous leurs points étoient toutes paralleles entr'elles, chacun de ces poids ſeroit non ſeulement par tout (*Th.* 21. *Corol.* 39.) de même peſanteur abſolue, mais encore peſeroit également (*nomb.* 3. *Corol.* 35. 36.) ſur tous les points d'un même plan incliné ; c'eſt-à-dire, que non ſeulement un même poids ſeroit alors de même peſanteur abſolue en differens points d'un même plan incliné, mais encore qu'une même puiſſance le pourroit ſucceſſivement ſoûtenir ſur tous ces differens points quelconques ſuivant des directions paralleles entr'elles.

La part. 1. du preſent Th. 26. fait voir de plus que tous ces differens points d'un même plan incliné, ſeroient toûjours alors également chargez du concours d'action de la puiſſance & du poids ſur eux, c'eſt-à-dire, que les charges perpendiculaires réſultantes de ce concours d'action ſur chacun des points de ce plan incliné, ſeroient alors toutes égales entr'elles.

COROLLAIRE XXXIX.

FIG. 211. 212. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le Corol. 33. c'eſt-à-dire, les poids EON, FQM, étant de même peſanteur abſolue, & le reſte tel qu'on voudra, ſi l'on appelle O, Q, les differentes charges perpendiculaires en ces points du plan HG, réſultantes chacune du concours d'action de la puiſſance & du poids ſuppoſez en équilibre ſur chacun de ces points O, Q, de ce plan HG; le Corol. 9. donnera O. EON :: ſRAD. ſRAO. & le poids FQM ou ſon égal (*Hyp.*) EON. Q :: ſPBQ. ſPBD. Donc (en multipliant par ordre) O. Q :: ſRAD×ſPBQ. ſPBD×ſRAO. C'eſt-à-dire (dans la preſente hypotheſe des poids égaux) que les differentes charges O, Q, du plan GH aux points de ces noms, ſont entr'elles en raiſon compoſée de la directe des ſinus des angles totaux RAD, PBD, & de la reciproque des ſinus des angles partiaux RAO, PBQ, quelques ſoient l'inclinaiſon de ce plan HG, & les directions des poids & des puiſſances qui lui cauſent ces deux charges. Donc,

I. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, ſans ſortir (*Corol.* 4.) des angles NAO, MBQ, quelles que ſoient encore les directions des poids EON, FQM, ainſi que dans le nomb. 1. des Corol. 35. 36.

1°. Les perpendiculaires (*part.* 1. 2.) AO, BQ, au plan HG, étant auſſi paralleles entr'elles, & ces deux paralleliſmes rendant les angles RAO, PBQ, égaux entr'eux, & conſequemment auſſi ſRAO=ſPBQ, l'on aura ici O. Q :: ſRAD. ſPBD. c'eſt-à-dire, les differentes charges O, Q, du plan HG, en raiſon des ſinus des angles RAD, PBD, compris chacun entre les directions de chaque puiſſance, & chaque poids ſoûtenu par elle ſur ce plan.

2°. Donc ſi l'on prolonge RA juſqu'à la rencontre en X de BD prolongée, le paralleliſme ſuppoſé entre les directions AR, BP, des puiſſances R, P, rendant l'angle

PBD=RXD=AXD, & conſequemment ſPBD=ſAXD, outre (*Def. 9. Corol. 2.*) ſRAD=ſXAD ; l'on aura pareillement ici O. Q :: ſXAD. ſAXD (*Lem. 8. Corol. 2.*) :: XD. AD. c'eſt-à-dire, les differentes charges en O, Q, du plan HG, en raiſon des côtez XD, AD, du triangle AXD.

3°. D'où l'on voit que la charge O du plan HG, doit être ici plus ou moins grande par rapport à ſa charge Q, ſelon que l'angle RAD (toûjours égal à PBQ) ſera plus ou moins petit ; puiſque l'angle XAD en devenant plus ou moins grand, le côté XD du triangle AXD en doit devenir auſſi plus ou moins grand par rapport à ſon autre côté AD.

II. Si outre les directions AR, BP, des puiſſances R, P, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, ſans ſortir (*Corol. 4.*) des angles NAO, MBQ, l'on veut (comme dans le nomb. 3. des Corol. 35. 36.) que les directions AD, BD, des poids (*Hyp.*) égaux EON, FQM, ſoient auſſi paralleles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra, ſans entrer dans les angles RAO, PBQ ; ces deux paralleliſmes joints à celui qui eſt (*part. 1. 2.*) entre les droites AO, BQ, rendant les angles RAD=PBD, RAO=PBQ, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſRAD =ſPBD, ſRAO=ſPBQ, l'on aura ici O=Q, c'eſt-à-dire, les charges en O, Q, du plan HG égales entr'elles, de même que le ſont (*Hyp.*) les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, & (*nomb. 3. des Corol. 35. 36.*) les puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent ſur ces points auſſi égales entr'elles.

Voilà juſqu'ici depuis le Corol. 33. incluſivement pour un même ou pour differens poids de même peſanteur abſolue, ſucceſſivement ſoûtenus ſur differens points d'un même plan incliné par des puiſſances quelconques dirigées à volonté, ſans ſortir (Corol. 4.) *des angles NAO, MBQ. Voici preſentement pour des poids de differentes peſanteurs abſolues, ſucceſſivement ſoûtenus ſur tous ces differens points par une mê-*

me ou par differentes puiſſances égales dirigées encore à volonté comme ci-deſſus.

COROLLAIRE XL.

Soient preſentement les poids EON, FQM, de peſanteurs abſolues differentes quelconques appellées auſſi EON, FQM, & encore ſucceſſivement ſoûtenus ſur differens points O, Q, d'un même plan incliné auſſi quelconque GH par une même puiſſance, ou par deux R, P, égales entr'elles, dirigées encore comme l'on voudra, ſans ſortir (*Cor.* 4.) des angles NAO, MBQ. En quelque point D que concourent les directions des poids EON, FQM, par de-là le plan HG ſans entrer dans les angles RAO, PBQ; le Corol. 10. fait encore voir qu'en ce cas d'équilibre la peſanteur abſolue du poids EON ſera à celle du poids FQM en raiſon compoſée de la directe des ſinus des angles RAO, PBQ, que les directions des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, menées des points A, B, au plan HG, & de la reciproque des ſinus des angles DAO, DBQ, que les directions de ces poids font avec ces mêmes perpendiculaires, c'eſt-à-dire, EON. FQM :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ ×ſDAO.

Car en ce cas d'équilibre ce Corol. 10. donne EON. R :: ſRAO. ſDAO. & P. FQM :: ſDBQ. ſPBQ. Donc les puiſſances R, P, étant ici ſuppoſées égales entr'elles, ou la même quelconque, l'on y aura (en multipliant par ordre les termes de ces deux analogies) EON. FQM :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO. ainſi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XLI.

Or (ainſi que dans le Corol. 34.) les perpendiculaires AO, BQ, ſe trouvant paralleles entr'elles, ſi l'on prolonge BQ juſqu'à la rencontre de AD en S; l'on aura l'angle DAO ou SAO égal à ſon alterne ASB, outre DBQ=DBS. Donc (*Corol.* 39.) l'on aura pareillement

ici

ici EON. FQM : : ſRAO×ſDBS. ſPBQ×ſASB. Mais (*Déf. 9. Corol. 2.*) ſASB=ſBSD, & (*Lem. 8. Corol. 2.*) ſDBS. ſBSD : : DS. BD. Donc auſſi EON. FQM : : DS× ſRAO. BD×ſPBQ.

COROLLAIRE XLII.

Puiſque dans l'équilibre ici ſuppoſé entre chacune des puiſſances (*Hyp.*) égales R, P, & chacun des poids EO, FQ, de peſanteurs abſolues quelconques ſur differens points O, Q, d'un même plan HG d'inclinaiſon auſſi quelconque, le Corol. 39. donne EON. FQM : : ſRAO× ſDBQ. ſPBQ×ſDAO.

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles, & celles des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce ſoit, les angles RAO & PBQ ſe trouvant alors égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſRAO, ſPBQ, ainſi que dans le nomb. 1. du Corol. 35. l'on aura pour lors EON. FQM : : ſDBQ. ſDAO. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles DAO, DBQ, que leurs directions AD, BD, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan HG.

2°. Si ce ſont les directions des poids EON, FQM, qui ſoient paralleles entr'elles, & non celles des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent ſur les points O, Q, du plan GH; les angles DAO, DBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſDAO, ſDBQ, ainſi que dans le nomb. 2. du Corol. 35. l'on aura pour lors EON. FQM : : ſRAO. ſPBQ. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, en raiſon des ſinus des angles RAO, PBQ, que les directions des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan GH, ſur les points O, Q, duquel ces poids ſont ſoûtenus par ces puiſſances.

3°. Si les directions de ces puiſſances ſont paralleles entr'elles, & celles des poids auſſi, non ſeulement les angles RAO, PBQ, mais encore les angles DAO, DBQ,

ſe trouvant alors égaux entr'eux, comme dans les précedens nomb. 1. 2. l'on aura pour lors EO=FQ, c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, alors égales entr'elles, auſſi-bien (*Hyp.*) que les puiſſances R, P, qu'on ſuppoſe les ſoûtenir ainſi ſur les points O, Q, du plan GH.

COROLLAIRE XLIII.

Puiſqu'auſſi dans l'équilibre ſuppoſé le Corol. 4. donne EON. FQM :: DS×ſRAO. DB×ſPBQ.

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles, & celles des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce ſoit, ainſi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 41. les angles RAO, PBQ, ſe trouvant encore égaux ici comme là, & par conſequent auſſi leurs ſinus ſRAO, ſPBQ, l'on aura pour lors EON. FQM :: DS. DB.

2°. Si ce ſont les directions AD, BD, des poids EON, FQM, qui ſoient paralleles entr'elles, & non celles des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent ſur les points O, Q, du plan incliné HG; cette hypotheſe donnant ici DS=DB, comme dans le nomb. 2. du Corol. 36. l'on aura ici EON. FQM :: ſRAO. ſPBQ. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, en raiſon des ſinus des angles RAO, PBQ, que les directions des puiſſances R, P, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan HG, ſur lequel elles les ſoutiennent, ainſi que dans le nomb. 2. du précedent Corol. 41.

3°. Enfin ſi les directions de ces puiſſances ſont paralleles entr'elles, & celles de ces poids auſſi; ayant alors ſRAO=ſPBD, & DS=DB, l'on aura auſſi pour lors EO=FQ, c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EO, FQ, alors égales entr'elles, ainſi que dans le nomb. 3. du précedent Corol. 41.

COROLLAIRE XLIV.

Toutes choſes demeurant ainſi les mêmes que dans le

Corol. 40. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, étant égales entr'elles, & le reſte tel qu'on voudra, les noms O, Q, des differentes charges du plan HG en O, Q, demeurant auſſi les mêmes que dans le Corol. 39. l'on aura (*Cor.* 9.) O. R :: ſDAR. ſDAO. & la puiſſance P ou ſon égale (*Hyp.*) R. Q :: ſDBQ. ſDBP. Donc (en multipliant par ordre) O. Q :: ſDAR×ſDBQ. ſDBP×ſDAO. c'eſt-à-dire (dans la preſente hypotheſe des puiſſances égales) les differentes charges O, Q, du plan HG, en raiſon compoſée de la directe des ſinus des angles totaux DAR, DBP, & de la reciproque des ſinus des angles partiaux DAO, DBQ.

COROLLAIRE XLV.

Or les perpendiculaires AO, BQ, au plan HG, ſe trouvant toûjours paralleles entr'elles, ſi l'on prolonge BQ juſqu'à la rencontre de AD en S, comme dans les Corol. 34. 41. l'on aura ici comme là, les angles DAO =ASB, & DEQ=DBS. Donc (*Cor.* 44.) O. Q :: ſDAR ×ſDBS. ſDBP×ſASB. Mais (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) ſASB= ſBSD, & (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) ſDBS. ſBSD :: DS. BD. Donc auſſi O. Q :: DS×ſDAR. BD×ſDBP.

COROLLAIRE XLVI.

Puiſque dans l'équilibre ici ſuppoſé des puiſſances égales R, P, avec les poids quelconques EO, FQ, ſur differens points O, Q, d'un même plan HG, dont les charges en ces points ſont auſſi appellées O, Q; le Corol. 44. donne O. Q :: ſDAR×ſDBQ. ſDBP×ſDAO.

1°. Si les directions AD : BD, des poids EON, FQM, ſont paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, ſans entrer dans les angles RAO, PBQ, les directions AR, BP, des puiſſances R, P, étant telles qu'on voudra, ſans ſortir (*Corol.* 4.) des angles NAO, MBQ; les angles DAO, DBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux, l'on aura pour lors O. Q :: ſDAR. ſDBP. c'eſt-à-dire, les charges O, Q, du plan HG, en raiſon des ſinus des

angles DAR, DBP, dans ce paralleliſme des directions des poids quelconques EON, FQM, ſoûtenus ſur differens points O, Q, d'un même plan HG par des puiſſances égales R, P, de directions quelconques, ainſi que le paralleliſme de directions des puiſſances quelconques, qui y ſoûtenoient des poids égaux, l'a donné dans le nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 39.

2°. D'où l'on voit que ſoit que des poids abſolument égaux, & de directions quelconques, ſoient ſoûtenus ſur differens points d'un même plan quelconque par differentes puiſſances de directions paralleles entr'elles; ou que des puiſſances égales de directions quelconques y ſoûtiennent des poids de differentes peſanteurs abſolues, & de directions paralleles entr'elles: les charges de ce plan en ces differens points, ſeront toûjours entr'elles comme les ſinus des angles compris chacun entre les directions de chaque puiſſance & de chaque poids ſoûtenu par elle, du concours deſquels chacune de ces charges réſulte.

3°. Si outre les directions AD, BD, des poids EON, FQM, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, ſans entrer dans les angles RAO, PBQ, les directions AR, BP, des puiſſances égales R, P, ſont auſſi paralleles entr'elles vers tel côté qu'on voudra, ſans ſortir (*Cor.* 4.) des angles NAO, MBQ; ce double paralleliſme rendant non ſeulement les angles DAO, DBQ, mais auſſi les angles DAR, DBP, égaux entr'eux pris ainſi deux à deux, rendra pour lors O=Q; c'eſt-à-dire, que les charges O, Q, du plan HG aux points de ces noms, ſeront alors pareillement égales, les puiſſances R, P, étant ſuppoſées l'être, ainſi que ce double paralleliſme a rendu ces chargeségales dans l'art. 2. du Corol. 39. où les poids EON, FQM, étoient ſuppoſez d'égales peſanteurs abſolues.

COROLLAIRE XLVII.

Puiſque dans la même hypotheſe du Corol. 40. c'eſt-à-dire, dans l'hypotheſe des puiſſances R, P, égales entre-

Digitized by Google

elles, le reſte étant tel qu'on voudra, le Corol. 45. donne O. Q :: DS×ſDAR. BD×ſDBP.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, ſont parallales entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, celles des puiſſances telles qu'on voudra, ainſi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 46. ce paralleliſme rendant ici DS=BD, comme dans les nomb. 2. des Corol. 36. 43. il donnera ici O. Q :: ſDAR. ſDBP. ainſi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 46.

2°. Si outre les directions AD, BD, des poids EON, FQM, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, celles AR, BP, des puiſſances (égales R, P,) ſont auſſi paralleles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra; ce double paralleliſme rendant non ſeulement DS=BD, mais auſſi ſDAR=ſDBP, donnera ici O=Q, c'eſt-à-dire, que les charges O, Q, du plan HG aux points de ces noms, ſeront ici égales entr'elles, ainſi que dans le nomb. 3. du précedent Corol. 46.

Depuis le Corol. 33. inclusivement, voilà, sur des poids d'égales pesanteurs absolues, soûtenus sur differens points d'un même plan par des puissances ou forces quelconques; & pour des poids de pesanteurs absolues differentes, que des puissances égales y soûtiendroient. Voici presentement pour des poids & des puissances quelconques qui, en équilibre sur ces points, y causeroient par leurs concours des charges égales au plan sur lequel ces differens équilibres se feroient.

COROLLAIRE XLVIII.

Les noms O, Q, des charges du plan GH en O, Q, demeurant toûjours les mêmes, ſi preſentement on ſuppoſe ces deux charges égales entr'elles, quelque ſoit le reſte, le Corol. 9. donnera R. O :: ſDAO. ſDAR. & la charge Q ou ſon égale (*Hyp.*) O. P :: ſDBP. ſDBQ. Donc (en multipliant par ordre) R. P :: ſDAO×ſDBP. ſDBQ×ſDAR. c'eſt-à-dire, que les puiſſances R, P, ſeront toûjours ici entr'elles en raiſon compoſée de la directe des ſi-

nus des angles partiaux DAO, DBQ, & de la reciproque des ſinus des angles totaux DAR. DBP.

COROLLAIRE XLIX.

Or on voit dans les Corol. 34. 41. 45. qu'en general ſDAO=ſASB=ſBSD, & ſDBQ=ſDBS. Donc (*Corol.* 48.) l'on aura pareillement ici R. P:: ſBSD×ſDBP. ſDBS×ſDAR. mais (*Lem.* 8. *Cor.* 2.) ſBSD. ſDBS:: BD. DS. Donc auſſi R. P:: BD×ſDBP. DS×ſDAR.

COROLLAIRE L.

Puiſque dans la preſente hypotheſe des charges égales O Q, du plan HG, le Corol. 48. donne R. P:: ſDAO× ſDBP. ſDBQ×ſDAR.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, ſont deux paralleles quelconques; & celles des puiſſances R, P, telles qu'on voudra, ce paralleliſme joint a celui des lignes AO, BQ, perpendiculaires (*part.* 1. 2.) au plan HG, rendant les angles DAO, DBQ, égaux entr'eux, l'on aura ici R. P:: ſDBP. ſDAR. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, en raiſon reciproque des ſinus des angles totaux DAR, DPB.

2°. Si non ſeulement les directions des poids ſont paralleles entr'elles, mais auſſi celles des puiſſances, ces deux paralleliſmes ajoûtez à celui qu'ont entr'elles les lignes AO, BQ, rendant les angles DAO=DBQ, & DBP =DAR rendront auſſi pour lors R=P, c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, égales entr'elles.

COROLLAIRE LI.

Dans la même hypotheſe des charges égales O, Q, du plan HG, le Corol. 49. donnant auſſi R. P:: BD× ſDBP. DS×ſDAR.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, ſont paralles ensr'elles, & non celles des puiſſances R, P; cette hypotheſe rendra ici BD=DS comme dans le nomb. 1. du Corol. 47. doit y rendre auſſi R. P: ſDBP. ſDAR.

Digitized by Google

c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles DAR, DBP, compris chacun entre les directions de chacune d'elles & du poids qu'elle ſoûtient.

2°. Si outre les directions AD, BD, des poids EON, FQM, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, celles AR, BP, des puiſſances R, P, ſont auſſi paralleles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra, ce double paralleliſme rendant non ſeulement DB=DS, mais encore DAR=DBP, doit auſſi rendre ici R=P, c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, égales entr'elles.

COROLLAIRE LII.

Dans la même hypotheſe des charges égales O, Q, du plan HG, le Corol. 9. donnera EON. O :: ſRAO. ſDAR. & la charge Q, ou ſon égale (*Hyp.*) O. FQM :: ſDBP. ſPBQ. Donc (en multipliant par ordre) EON. FQM :: ſRAO×ſDBP. ſPBQ×ſDAR. c'eſt-à-dire, les peſanteurs des poids EON, FQM, entr'elles en raiſon compoſée de la directe des angles partiaux, RAO, PBQ, & de la reciproque des ſinus des angles totaux DAR, DBP. Donc,

1°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles, celles des poids étant telles qu'on voudra, les angles RAO, PBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux, l'on aura pour lors ici EON. FQM :: ſDBP. ſDAR. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, en raiſon reciproque des ſinus des angles totaux DAR, DBP.

2°. Or ce cas de paralleliſme des directions AR, BP, des puiſſances R, P, rend auſſi ſDBP=ſDXA, & (*Déf. 9. Cor. 2.*) ſDAR=ſDAX. Donc (*nomb. 1.*) ce même paralleliſme rend pareillement ici EON. FQM :: ſDXA. ſDAX (*Lem. 8. Corol. 2.*) :: AD. XD. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, en raiſon des côtez AD, XD, du triangle AXD.

3°. D'où l'on voit que ſi outre les directions AR, BP, des puiſſances R, P, paralleles entr'elles, celles AD, BD, des poids EON, FQM, le ſont auſſi entr'elles, ce double parallelisme joint à celui (*part.* 1. 2.) des droites AO, BD, entr'elles, rendant les angles RAO=PBQ, & DBP=DAR, rendroit pareillement ici EON=FQM, c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, égales entr'elles.

COROLLAIRE LIII.

Les noms O, Q, des charges du plan HG aux points O, Q, demeurant toûjours les mêmes, il ſuit des Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. que,

I. Puiſque l'hypotheſe des poids EON, FQM, d'égales peſanteurs abſolues, quelque ſoit le reſte, donne (*Cor.* 33.) R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO.

1°. Le Corol. 9. donnant P. Q :: ſDBQ. ſDBP. Cette hypotheſe donnera auſſi R. Q :: ſDAO×ſPBQ. ſDBP× ſRAO.

2°. Le Corol. 9. donnant pareillement O. R :: ſDAR. ſDAO. cette même hypotheſe donnera O. P :: ſDAR× ſPBQ. ſDBQ×ſRAO.

II. Puiſque la même hypotheſe d'égales peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, donne de plus (*Corol.* 39.) O. Q :: ſRAD×ſPBQ. ſDPB×ſRAO.

1°. Le Corol. 9. donnant R. O :: ſDAO. ſRAD. cette hypotheſe de peſanteurs abſolues EON, FQM, égales entr'elles, donnera encore R. Q :: ſDAO×ſPBQ. ſDBP× ſRAO. ainſi que dans le nomb. 1. du précedent art. 1.

2°. Le Corol. 9. donnant pareillement Q. P :: ſDBP. ſDBQ. la même hypotheſe de peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, égales entr'elles, donnera encore auſſi O. P :: ſRAD×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO. comme dans le nomb. 1. du précedent art. 1.

III. Puiſque l'hypotheſe des puiſſances R, P, égales entr'elles, quelque ſoit le reſte, donne (*Corol.* 40.) EON. FQM :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO.

1°. Le

1°. Le Corol. 9. donnant FQM. Q :: ſPBQ. ſDBP. cette hypotheſe de R=P, donnera auſſi EON. Q :: ſRAO × ſDBQ. ſDBP × ſDAO.

2°. Le Corollaire 9. donnant pareillement O. EON :: ſRAD. ſRAO. cette même hypotheſe de R=P donnera auſſi O, FQM :: ſRAD × ſDBQ. ſPBQ × ſDAO.

IV. Puiſque la même hypotheſe de R=P donne de plus (*Corol.* 44.) O. Q :: ſRAD × ſDBQ. ſDBP × ſDAO.

1°. Le Corol. 9. donnant EON. O :: ſRAO. ſRAD. cette hypotheſe de R=P donnera encore EON. Q :: ſRAO × ſDBQ. ſDBP × ſDAO. ainſi que dans le nomb. 1. du précedent art. 3.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement Q. FQM :: ſDBP. ſPBQ. la même hypotheſe de R=P, donnera encore auſſi O. FQM :: ſRAD × ſDBQ. ſPBQ × ſDAO. comme dans le nomb. 2. du précedent art. 3.

V. Puiſque l'hypotheſe des charges O, Q, du plan HG en ſes points O, Q, égales entr'elles, quelque ſoit le reſte, donne (*Corol.* 48.) R. P :: ſDAO × ſDBP. ſDBQ × ſDAR.

1°. Le Corol. 9. donnant P. FQM :: ſDBQ. ſPBQ. cette hypotheſe de O=Q donnera auſſi R. FQM :: ſDAO × ſDBP. ſPBQ × ſDAR.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement EON. R :: ſRAO. ſDAO. cette même hypotheſe de O=Q donnera auſſi EON. P :: ſRAO × ſDBP. ſDBQ × ſDAR.

VI. Puiſque la même hypotheſe de O=Q donne de plus (*Corol.* 52.) EON. FQM :: ſRAO × ſDBP. ſPBQ × ſDAR.

1°. Le Corol. 9. donnant R. EON :: ſDAO. ſRAO. cette hypotheſe de O=Q donnera encore R. FQM :: ſDAO × ſDBP. ſPBQ × ſDAR. ainſi que dans le nomb. 1. du précedent art. 5.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement FQM. P :: ſPBQ. ſDBQ. cette hypotheſe de O=Q donnera encore auſſi EON. P :: ſRAO × ſDBP. ſDBQ × ſDAR. comme dans le nomb. 2. du précedent art. 5.

Toutes ces analogies réſultantes des Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. *par le moyen du Corol.* 9. *dans les ſix articles du preſent Corollaire* 53. *peuvent encore ſe détailler en pluſieurs autres, ſuivant les differentes hypotheſes qu'on y peut faire des angles qui y ſont compris : & cela de la maniere que les analogies de ces Corol.* 33. 39. 40. 44. 48. 52. *l'ont été ci-deſſus, & qu'on le va voir encore dans les deux Corollaires ſuivans.*

Voilà juſqu'ici pour des poids ſoûtenus ſur differens points d'un même plan : en voici preſentement de ſoûtenus ſur differens plans.

COROLLAIRE LIV.

FIG. 213. 214. Soient preſentement deux poids EO, FQ, de même peſanteur abſolue, & de directions AD, BD, concourantes en tel point D qu'on voudra, ſoûtenus ſur deux plans HG, HL, de hauteurs & de longueurs quelconques (ce n'eſt que pour épargner les figures qu'on marque ici ces plans comme s'ils étoient de même hauteur ; & que les directions, tant des poids, que des puiſſances, n'expriment pas ici toutes les hypotheſes qu'on en va faire : c'eſt à l'imagination du Lecteur à faire le reſte qu'il pourra ſe figurer ſans peine ſur ceci.) un ſur chacun, par deux puiſſances R, P, de directions quelconques ER, FP, qui prolongées concourent en A, B, avec celles des poids ; deſquels points A, B, ſoient AO, BQ, perpendiculaires en O, Q, à ces plans HG, HL. On trouvera ici, comme dans le Corol. 33. R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO. Donc,

1°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles entr'elles auſſi quelconques, dont la ſeconde BD prolongée rencontre OA prolongée en N, laquelle OA prolongée rencontre auſſi BP en V, & QB prolongée en M : ayant alors ſRAO = ſPVO = ſBVM, ſDAO = ſBNM, ſPBQ = ſMBV, & ſDBQ = ſMBN ; l'on aura pour lors R. P :: ſBNM× ſMBV. ſMBN×ſBVM. Or (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) ſBNM. ſMBN :: BM. MN. Et ſMBV. ſBVM :: MV. BM. Donc

auſſi pour lors R. P :: BM×MV. MN×BM :: MV. MN. quelques ſoient les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans ſur leſquels elles ſoûtiennent chacune un des poids EO, FQ ; ſçavoir, AR à HG, & BP à HL ; & ſi les directions AD, BD, ſont paralleles auſſi chacune à chacune des hauteurs de ces deux plans, ou à leur hauteur commune HK, s'ils ont la même : cette hypotheſe rendant les angles RAO=HOA=HQB=PBQ, DAO=HGK, DBQ=HLG ; & conſequemment auſſi ſRAO=ſPBQ, ſDAO=ſHGK (*Déf. 9. Corol. 2.*)=ſHGL, ſDBQ=ſHLG ; cette même hypotheſe donnera ici R. P :: ſHGL×ſRAO. ſHLG×ſRAO :: ſHGL. ſHLG. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, entr'elles en raiſon des ſinus des angles HGL ou HGK, & HLG, d'inclinaiſon des plans HG, HL, aux longueurs deſquels on ſuppoſe ici que ces directions de ces puiſſances ſont paralleles chacune à chacune, quelques ſoient les hauteurs de ces plans.

3°. Si l'on veut preſentement que ces hauteurs ſoient égales, ou la même HK pour tous les deux ; ayant pour lors (*Lem. 8. Corol. 2.*) ſHGL. ſHLG :: HL. HG. l'hypotheſe du precedent nomb. 2. ajoutée à celle-ci, donnera pareillement ici R. P :: HL. HG. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, ici entr'elles en raiſon reciproque des longueurs HG, HL, des plans, auſquelles on ſuppoſe encore ici que leurs directions AR, BP, ſont paralleles chacune à chacune de ces longueurs.

4°. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le nomb. 3. ſi l'on imagine ſur le diamétre HK le demi-cercle HTSK dans la Fig. 210. ou le cercle entier HTSK dans la Fig. 211. lequel perpendiculaire aux plans HG, HL, en rencontre ces longueurs en S, T : leur hauteur commune HK étant ici ſuppoſée perpendiculaire à la droite KL, ſur laquelle leurs baſes ſont auſſi ſuppoſées ; les perpendiculaires KS, KT, aux longueurs HG, HL,

de ces plans, donneront ici HS. HK :: HK. HG $=\frac{HK \times HK}{HS}$.

Et HT. HK :: HK. LH $=\frac{HK \times HK}{HT}$. Donc dans cette hypothese du précedent nomb. 3. ce même nomb. 3. donnera pareillement ici R. P :: $\frac{HK \times HK}{HT}$. $\frac{HK \times HK}{HS}$ :: $\frac{1}{HT}$. $\frac{1}{HS}$ :: HS. HT. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, entr'elles en raiſon des parties HS, HT, des longueurs de leurs plans, compriſes dans le cercle HTSK ou HTKS.

La même choſe peut encore ſe démontrer par le ſeul Corol. 20. art. 1. nomb. 1. car ce nomb. 1. donnant ici R. EO :: HK. HG :: HS. HK. Et le poids FQ ou ſon égal (*Hyp.*) EO. P :: HL. HK :: HK. HT. L'on aura encore ici (en raiſon ordonnée) R. P :: HS. HT. ainſi qu'on le vient de trouver dans le preſent nomb. 4.

COROLLAIRE LV.

En appellant (comme juſqu'ici) O, Q, les charges des plans HG, HL, la même hypotheſe des poids EO, FQ, d'égales peſanteurs abſolues, donnera encore ici ces charges O. Q :: ſRAD×ſPBQ. ſPBD×ſRAO. ſur ces differens plans, comme on les a trouvées dans le Corol. 39. ſur differens points d'un même plan; ce qui, outre le détail qui s'en eſt fait là, donne encore le ſuivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles entr'elles auſſi quelconques, comme dans le nomb. 1. du Corol. 54. ce double paralleliſme donnant ſRAD = ſPBD, ſPBQ = ſVBM, & ſRAO = ſPVO = ſBVM, l'on aura ici les charges O. Q :: ſPBQ. ſRAO :: ſVBM. ſBVM (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MV. MB.

2°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL,

des plans, ſur chacun deſquels elles ſoûtiennent chacune un des poids EO, FQ, dont les directions AD, BD, qui rencontrent les plans en Y, Z, ſoient paralleles aux hauteurs de ces plans ; le tout comme dans le nomb. 2. du précedent Corol. 54. Cette hypotheſe rendant ſPBQ = ſRAO, ſRAD = ſAYH = ſGHK, & ſPBD = ſBZH = ſLHK, l'on aura ici O. Q :: ſRAD. ſPBD :: ſGHK. ſLHK. c'eſt-à-dire, les charges O, Q, des plans HG, HL, en raiſon des ſinus des angles GHK, LHK, que les longueurs de ces plans font avec leurs hauteurs.

3°. Si l'on veut preſentement que ces hauteurs ſoient égales ou la même HK pour les deux plans ; ſi l'on prend cette hauteur commune HK pour le ſinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol. 1.*) KS, KT, pour les ſinus de ces angles GHK, LHK. Donc en ce cas-ci on aura O. Q :: KS. KT. le demi-cercle KSTH de la Fig. 210. & le cercle KSHT de la Fig. 211. étant ici les mêmes que dans le nomb. 4. du Corol. 54.

Voilà pour un même ou differens poids de même peſanteur abſolue, ſoûtenus ſur differens plans d'inclinaiſons & de hauteurs quelconques par des puiſſances dirigées à volonté, auſſi-bien que les poids. Voici preſentement pour des poids de differentes peſanteurs abſolues, ſoûtenus ſur differens plans par des puiſſances égales, quelles que ſoient encore les inclinaiſons & les hauteurs de ces plans ; quelles que ſoient encore auſſi les directions, tant des poids, que des puiſſances égales qu'on ſuppoſe les ſoûtenir chacune en équilibre ſur chacun de ces plans.

COROLLAIRE LVI.

Soient preſentement les puiſſances R, P, égales entr'elles, & les poids EO, FQ, de differentes peſanteurs abſolues quelconques, ſoûtenus encore par ces puiſſances ſur differens plans HG, HL, d'inclinaiſons & de hauteurs auſſi quelconques, quoique, pour épargner les Figures, on ne les voye ici que de même hauteur HK. Tout le reſte demeurant le même que dans le Corol. 54. l'on aura ici Fig. 213. 214.

comme dans le Corol. 40. EO. FQ :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO. Donc,

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles auſſi entr'elles quelconques; & le reſte comme dans le nomb. 3. du Corol. 54. Cela donnant ici comme là, ſRAO=ſBVM, ſBDQ=ſMBN, ſPBQ=ſMBV, & ſDAO=ſBNM; l'on aura ici EO. FQ :: ſBVM×ſMBN. ſMBV×ſBNM. Or (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) ſBVM. ſMBV :: BM. MV. Et ſMBN. ſBNM :: MN. BM. Donc on aura pareillement ici EO. FQ :: BM×MN. MV×BM :: MN. MV. quelles que ſoient encore les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les direction AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans ſur leſquels elles ſoutiennent les poids EO. FQ; ſçavoir, AR à HG, & BP à HL; & les directions AD, BD, de ces poids paralleles auſſi chacune à chacune des hauteurs de ces plans, ou toutes deux à leur hauteur commune HK, s'ils ont la même: cette hypotheſe, qui eſt celle des nomb. 2. des précedens Corol. 54. 55. rendant ici comme là les ſinus ſRAO=ſPBQ, ſDAO=ſHGK, ſDBQ=ſHLG, donnera ici EO. FQ :: ſRAO×ſHLG. ſRAO×ſHGK :: ſHLG. ſHGK. c'eſt-à-dire, les poids EO, FQ, ou leurs peſanteurs abſolues, en raiſon reciproque des ſinus des angles HGK, HLK, d'inclinaiſon des plans ſur leſquels on ſuppoſe ici ces poids ſoutenus par des puiſſances égales R, P, dirigées parallelement aux longueurs HG, HL, de ces plans, quelles que ſoient encore les hauteurs de ces mêmes plans.

3°. Si l'on veut preſentement que ces plans HG, HL, ſoient de même hauteur HK, comme dans les nomb. 3. des précedens Corol. 54. 55. ayant alors (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) HG. HL :: ſHLG. ſHGL (*Def.* 9. *Corol.* 2.) :: ſHLG. ſHGK. l'hypotheſe du précedent nomb. 2. donnera pareillement ici EO. FQ :: HG. HL. c'eſt-à-dire, les poids EO, FQ, en raiſon des longueurs HG,

Digitized by Google

HL, des plans ſur leſquels on les ſuppoſe ſoûtenus par des puiſſances égales R, P.

Un Auteur de ce tems rejette ce ſentiment-ci, le trouvant contraire à la prop. 27. de ſa Mecanique ; mais cette propoſit. 27. n'étant fondée que ſur la prop. 26. qu'on va voir être fauſſe dans le Corol. 4. du Théoreme ſuivant, ce Corollaire 4. ſuffira pour faire voir auſſi la fauſſeté de celle-là.

4°. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent nomb. 3. ſi l'on imagine ſur le diamétre HK le demi-cercle HTSK de la Fig. 210. ou le cercle entier HSKT de la Fig. 211. & le reſte comme dans le nomb. 4. du Cor. 54. ayant ici comme là $HG = \frac{HK \times HK}{HS}$, & $HL = \frac{HK \times HK}{HT}$; le précedent nomb. 3. donnera encore ici EO. FQ :: $\frac{HK \times HK}{HS} . \frac{HK \times HK}{HT}$ :: $\frac{1}{HS} . \frac{1}{HT}$ :: HT. HS. c'eſt-à-dire, les poids EO, FQ, en raiſon reciproque des parties HS, HT, des longueurs de leurs plans, compriſes dans le demi-cercle HTSK, ou dans le cercle entier HSKT.

Cela ſe pourroit encore démontrer de la ſeconde maniere dont l'a été le nomb. 4. du Corol. 54.

COROLLAIRE LVII.

En appellant encore O, Q, les charges des plans HG, HL, la même hypotheſe des puiſſances R, P, égales entr'elles, donnera encore ici les charges O. Q :: ſRAD× ſDBQ. ſDBP×ſDAO. ſur ces differens plans, comme on les a trouvées dans le Corol. 44. ſur les differens points d'un même plan. Ce qui, outre le détail qui s'en eſt fait là, fournit encore le ſuivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont deux paralleles quelconques ; & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles auſſi quelconques,

le tout comme dans les nomb. 1. des Corol. 54. 55. 56. Ce double parallelisme donnant ſRAD=ſDBP, ſDBQ =ſMBN, & ſDAO=ſDNO=ſBNM, l'on aura ici les charges O. Q :: ſDBQ. ſDAO :: ſMBN. ſBNM (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MN. MB. quelles que ſoient les hauteurs des plans HG, LH.

2°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P; ſont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans ſur chacun deſquels elles ſoutiennent chacune un des poids EO, FQ, dont les directions AD, BD, qui rencontrent ces plans HG, HL, en Y, Z, ſoient paralleles aux hauteurs paralleles de ces mêmes plans; le tout comme dans le nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. Ce double parallelisme rendant ſRAD=ſAYH=ſGHK, ſDBP=ſBZH=ſLHK, ſDBQ=ſMBN, ſDAO=ſANB =ſMNB; l'on aura ici O. Q :: ſGHK×ſMBN. ſLHK× ſMNB (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: ſGKH×MN. ſLHK×MB. quelles que ſoient les hauteurs des plans HG, HL, qui ſoutiendront ces charges O, Q, réſultantes perpendiculairement ſur eux du concours de chaque puiſſance & de chaque poids ſuppoſez en équilibre ſur chacun de ces plans, quelles qu'en ſoient encore les hauteurs paralleles entr'elles.

3°. Si l'on veut preſentement que les hauteurs de ces plans ſoient égales, ou la même HK, cette hauteur commune HK priſe pour le ſinus total, donnera (*Def.* 9. *Corol.* 1.) KS=ſGHK, & KT=ſLHK. Donc en ce cas les charges ſeront O. Q :: KS×MN. KT×MB.

COROLLAIRE LVIII.

Enfin ſi l'on ſuppoſe les charges O, Q, des plans HG, HL, égales entr'elles, on trouvera ici comme dans le Corol. 48. les puiſſances R. P :: ſDAO×ſDBP. ſDBQ× ſDAR. Donc,

1°. Si les directions AR, BP, de ces puiſſances R, P, ſont deux paralleles quelconques, & celles AD, BD, des poids

poids EO, FQ, deux autres paralleles auſſi quelconques; le tout comme dans les nomb. 1. des Cor. 54. 55. 56. 57. Ce double paralleliſme donnant ici comme dans le nomb. 1. du précedent Corollaire 57. ſDAO=ſDNO=ſMNB, ſDBQ=ſMBN, & ſDBP=ſDAR; l'on aura ici R. P :: ſDAO. ſDBQ :: ſMNB. ſMBN (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MB. MN. quelles que ſoient les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les directions AR, BP, de ces puiſſances R, P, ſont deux paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, paralleles auſſi aux hauteurs paralleles de ces plans ſur leſquels on ſuppoſe ces puiſſances en équilibre avec ces poids; le tout comme dans les nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. 57. Ce double paralleliſme donnant ici, comme dans le nomb. 2. du précedent Corol. 57. ſDAO =ſANB=ſMNB, ſDBQ=ſMBN, ſDBP=ſBZH= ſLHK, & ſDAR=ſAYH=ſGHK, l'on aura ici R. P :: ſMNB×ſLHK. ſMBN×ſGHK (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MB×ſLHK. MN×ſGHK. quelles que ſoient encore les hauteurs paralleles des plans HG, HL, ſur leſquels ces puiſſances R, P, ſont ſuppoſées en équilibre avec les poids EO, FQ, chacune avec chacun ſur chacun de ces plans de hauteurs paralleles quelconques.

3°. Si l'on veut preſentement que ces hauteurs ſoient égales, ou la même HK, cette hauteur commune HK priſe pour le ſinus total, donnera ici (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) KT=ſLHK, & KS=ſGHK. Donc en ce cas-ci les puiſſances ſeront R. P :: MB×KT. MN×KS.

COROLLAIRE LIX.

Dans la même hypotheſe des charges O, Q, des plans HG, HL, égales entr'elles, on trouvera ici comme dans le Corol. 52. les poids de peſanteurs abſolues EO. FQ :: ſRAO×ſDBP. ſPBQ×ſDAR. Ce qui, outre le détail qui s'en eſt fait dans ce Corol. 52. fournit encore le ſuivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont deux paralleles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles auſſi quelconques; le tout comme dans les nomb. 1. des Corol. 54. 55. 56. 57. 58. Ce double paralleliſme donnant ici comme dans le nomb. 1. du Corol. 55. ſRAO=ſBVM, ſPBQ=ſMBV, & ſDBP=ſDAR, l'on aura ici EO. FQ :: ſRAO. ſPBQ :: ſBVM. ſMBV (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MB. MV. quelles que ſoient les hauteurs de plans HG. HL.

2°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans, & que les directions AD, BD, des poids EO, FQ, ſoûtenus (*Hyp.*) par ces puiſſances ſur les points O, Q, de ces plans, ſoient auſſi paralleles aux hauteurs paralleles de mêmes plans; le tout comme dans les nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. 57. 58. Ce double paralleliſme donnant ici comme dans le nomb. 2. du Corol. 55, ſRAO =ſPBQ, ſDBP=ſBZH=ſLHK, & ſDAR=ſAYH =ſGHK. l'on aura ici EO. FQ :: ſDBP. ſDAR :: ſLHK. ſGHK. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EO, FQ, en raiſon reciproque des ſinus des angles GHK, LHK, que les longueurs HG, HL, des plans ſur leſquels ces poids ſont ſuppoſez ſoûtenus par les puiſſances R, P, font avec les hauteurs paralleles quelconques de ces mêmes plans.

3°. Si l'on veut preſentement que ces hauteurs ſoient égales entr'elles, ou ſoient la même HK; cette hauteur commune HK priſe pour le ſinus total, donnera (*Def.* 9. *Corol.* 1.) KT=ſLHK, & KS=ſGHK. Donc en ce cas-ci l'on aura EO. FQ :: KT. KS. Le demi-cercle KSTH de la Fig. 210. & le cercle entier HSHT de la Fig. 211. étant ici les mêmes que dans le nomb. 4. du Corol. 54. & par tout depuis juſqu'ici.

COROLLAIRE LX.

Fig. 211. 212. 213. 214. Soit preſentement que deux poids EO, FQ, ſoient ſoûtenus par deux puiſſances R, P, ſur differens points d'un

Digitized by Google

même plan, comme dans les Fig. 211. 212. ou ſur differens plans, comme dans les Fig. 213. 214. les Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. 54. 55. 56. 57. 58. 59. font voir qu'en cas d'équilibre par tout là, c'eſt-à-dire, tant ſur differens points d'un même plan, que ſur differens plans dont les charges en O, Q, ſoient encore appellées de ces noms O, Q.

1°. L'hypotheſe de EO=FQ, c'eſt-à-dire, d'égalité entre les peſanteurs abſolues des deux poids de ces noms, donnera les puiſſances R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO. ainſi que dans les Corol. 33. 54.

2°. La même hypotheſe des poids de peſanteurs abſolues égales entr'elles, donnera les charges O. Q :: ſRAD×ſPBQ. ſPBD×ſRAO. ainſi que dans les Corollaires 39. 55.

3°. L'hypotheſe de R=P, c'eſt-à-dire, des puiſſances R, P, égales entr'elles, donnera EO. FQ :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO. pour le rapport des peſanteurs abſolues des poids EO, FQ, ainſi que dans les Corol. 40. 56.

4°. La même hypotheſe des puiſſances égales R, P, donnera O. Q :: ſRAD×ſDBQ. ſDPB×ſDAO. pour le rapport des charges aux differens points O, Q, d'un même ou de differens plans, ainſi que dans les Col. 44. 57.

5°. L'hypotheſe de O=Q, c'eſt-à-dire, des charges égales d'un même ou de differens plans aux points de ces noms, donnera les puiſſances R, P :: ſDAO×ſDBP. ſDBQ×ſDAR. ainſi que dans les Corol. 48. 58.

6°. La même hypotheſe des charges égales O, Q, donnera EO. FQ :: ſRAO×ſDBP. ſPBQ×ſDAR. pour le rapport des peſanteurs abſolues des poids EO, FQ, ainſi que dans les Corol. 52. 59.

COROLLAIRE LXI.

Il ſuit encore du Corol. 20. art. 1. nomb. 1. dans la Fig. 209. que deux puiſſances P, R, ſoutenant ſucceſſivement un même poids C, ou d'eux d'égales peſanteurs Fig. 209.

abſolues chacun ſur un des plans AD, HD, ſuivant des directions CP, CR, paralleles chacune à chacune des longueurs AD, HD, de ces deux plans, aux hauteurs AB, HK, la direction du poids ſucceſſivement ſoûtenu ſur eux, ſoit toûjours parallele: il ſuit, dis-je, du nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 20. que la ſomme P—+R des deux puiſſances P, R, ſoûtiennent ainſi ce poids C ſur differens plans, peut être tantôt égale, tantôt plus grande, & tantôt moindre que la peſanteur abſolue (*Hyp.*) conſtante de ce même poids C.

Car ſi quelqu'un des deux plans AD, HD, par exemple, AD eſt plus long que l'autre HD, ſoit celui-ci prolongé vers E juſqu'à ce qu'on ait DE=DA; enſuite du point E la verticale EF parallele aux hauteurs de ces plans. Cela fait, le Corol. 20. art. 1. nomb. 1. donnera P. C:: AB. AD (*Hyp.*) :: AB. ED. Et C. R:: HD. HK :: ED. EF. Donc (en raiſon ordonnée) P. R :: AB. EF. Et (en compoſant) P. P—+R :: AB. AB—+EF. Or (*Corol. 20. art. 1. nomb. 1.*) C. P :: AD. AB. Donc (en raiſon ordonnée) C. P—+R :: AD. AB—+EF. Or il eſt viſible que AD peut être égale, plus grande, ou plus petite que AB—+EF, ſelon les differentes inclinaiſons que les plans AD, HD ou DE, peuvent avoir ſur la droite BF de leurs baſes. Donc auſſi le poids C peut être égal, plus grand, ou plus petit que la ſomme P—+R des puiſſances P, R, capables chacune de le ſoûtenir ſucceſſivement ſur chacun de ces deux plans ſuivant des directions CP, CR, paralleles chacune à chacune des longueurs AD, HD, de ces mêmes plans.

COROLLAIRE LXII.

Il ſuit auſſi du même Corol. 20. art. 2. nomb. 1. que ce même poids quelconque C ſucceſſivement ſoûtenu ſur chacun des plans AD, HD, par chacune de deux autres puiſſances S, T, ſuivant des directions CS, CT, paralleles a la baſe commune BK de ces deux plans, peut

être tantôt égal, tantôt plus grand, & tantôt moindre que la ſomme S+T de ces deux autres puiſſances.

Car ſi l'on ſuppoſe DH prolongée de maniere que la verticale EF rende DF=BD, le Corol. 20. art. 2. nomb. 1. donnera ici S. C :: AB. BD (*Hyp.*) :: AB. DF. Et C. T :: DK. HK :: DF. EF. Donc (en raiſon ordonnée) S. T :: AB. EF. Et (en compoſant) S. S+T :: AB. AB+EF. Or (*Corol. 20. art. 2. nomb. 1.*) C. S :: BD. AB. Donc (en raiſon ordonnée) C. S+T :: BD. AB+EF. Or il eſt encore viſible que BD peut être égale, plus grande, ou plus petite que AB+EF, ſelon les differentes inclinaiſons des plans AD, HD, ſur leur baſe commune BK. Donc auſſi le poids C peut être encore ici égal, plus grand, ou moindre que la ſomme S+T des puiſſances S, T, capables chacune de ſoûtenir ce poids C ſur chacun des plans AD, HD, ſuivant des directions CS, CT, paralleles à la baſe commune BK de ces deux plans.

On n'entrera point ici dans un plus grand détail des Corollaires qu'on pourroit encore tirer des précedens, & du preſent Th. 26. que l'on vient de donner : la fecondité de ce Théoreme nous les a preſentez ſi naturellement, que ſans y penſer, nous ne nous y ſommes peut-être déja que trop arrêtez.

SCHOLIE.

On a vû dans les Cor. 8. 9. du Lem. 3. qu'afin qu'une puiſſance puiſſe ſoûtenir un poids en équilibre ſur une ſurface quelconque, la direction de la force réſultante du concours d'action de cette puiſſance & de ce poids doit toûjours être perpendiculaire à cette ſurface, laquelle perpendiculaire paſſe par la baſe de ce poids. Donc la force réſultante du concours de deux déterminées, & de deux directions déterminées, ne pouvant être dirigée (*Lem. 3. part. 4. & n. 1. du Cor. 1.*) que ſuivant la diagonale d'un parallelogramme fait de côtez pris ſur leurs directions en raiſon de ces forces generatrices de celle-là, menée du point de concours de ces directions laterales ; il ne peut y avoir de ce point de concours à quelque ſurface que ce ſoit, qu'une ſeule per-

pendiculaire, ſuivant laquelle la force réſultante du concours d'action d'une puiſſance & d'un poids de forces & de directions déterminées, puiſſe être dirigée; & conſequemment auſſi qu'un ſeul point de cette même ſurface, ſur lequel cette puiſſance & ce poids puiſſent demeurer en équilibre entr'eux, quand même du concours de leurs directions, l'on pourroit mener pluſieurs perpendiculaires à cette ſurface, par exemple, ſi elle étoit en calote ſpherique, ou en goutiere circulaire, qui eût ce point pour centre. C'eſt pour cela qu'on la doit toûjours ſuppoſer ici comme ſi de ce point de concours on ne lui pouvoit mener que cette ſeule perpendiculaire, ainſi qu'on l'a fait dans la part. 1. du preſent Th. 25. & dans la reflexion qui ſuit ſon Corol. 15. ou s'il y en a pluſieurs poſſibles de ce point de concours à cette ſurface, il n'y faut conſiderer ici que celle ſuivant laquelle ſe fera le concours d'action de la puiſſance & du poids, ſuivant laquelle ſera (*Lem. 3. part. 4. & Corol. 1. nomb. 1.*) la diagonale du parallelogramme fait de côtez pris ſur leurs directions en raiſon de leurs forces.

REMARQUE

Sur la démonſtration ordinaire des Poids ſoûtenus ſur des Plans inclinez, faite par le moyen des Leviers.

I. Pour faire cette démonſtration, on ſuppoſe d'ordinaire un poids ſpherique EOQ, ſoutenu par une puiſſance R ſur le plan incliné HG, comme dans les Fig. 212. 213. Je ne ſçais qu'un Auteur qui en ait mis un angulaire, qu'il a placé de maniere qu'il ne touchât auſſi le plan HG qu'en un point, en l'y plaçant ſeulement ſur une de ſes pointes O, comme dans les Fig. 214. 215. de maniere auſſi que la droite menée de ce point O au concours A des directions AR, AP, de la puiſſance R, & du poids EOQ, fut perpendiculaire à ce plan HG.

Fig. 215. 216. 217. 218.

On a enſuite imaginé un Levier recourbé BOC, appuyé ſur ce point O d'attouchement, ayant un de ſes bras OC horiſontal, ou perpendiculaire en C à la direction AP

Digitized by Google

Fig. 205.

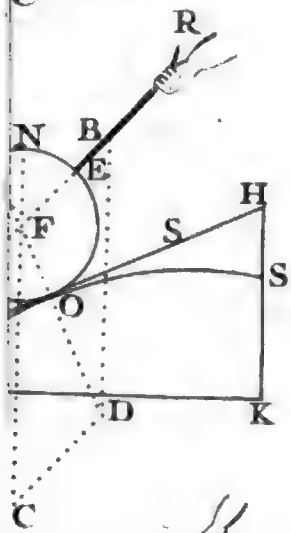


Fig. 206.

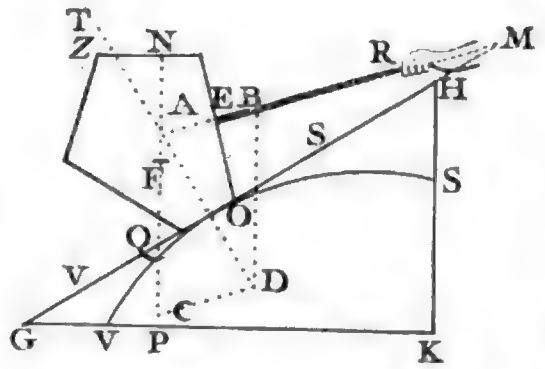


Fig. 208.

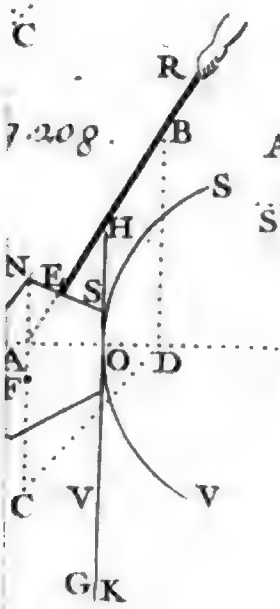
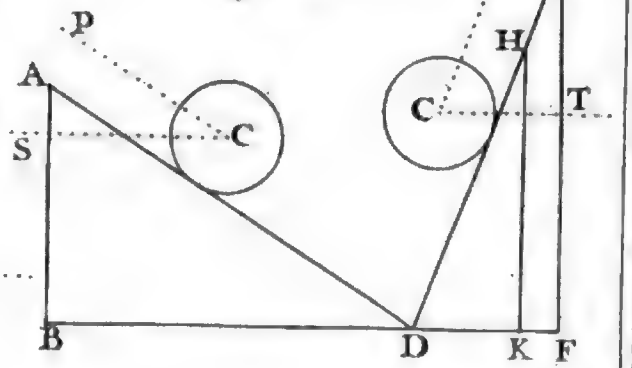


Fig. 209.



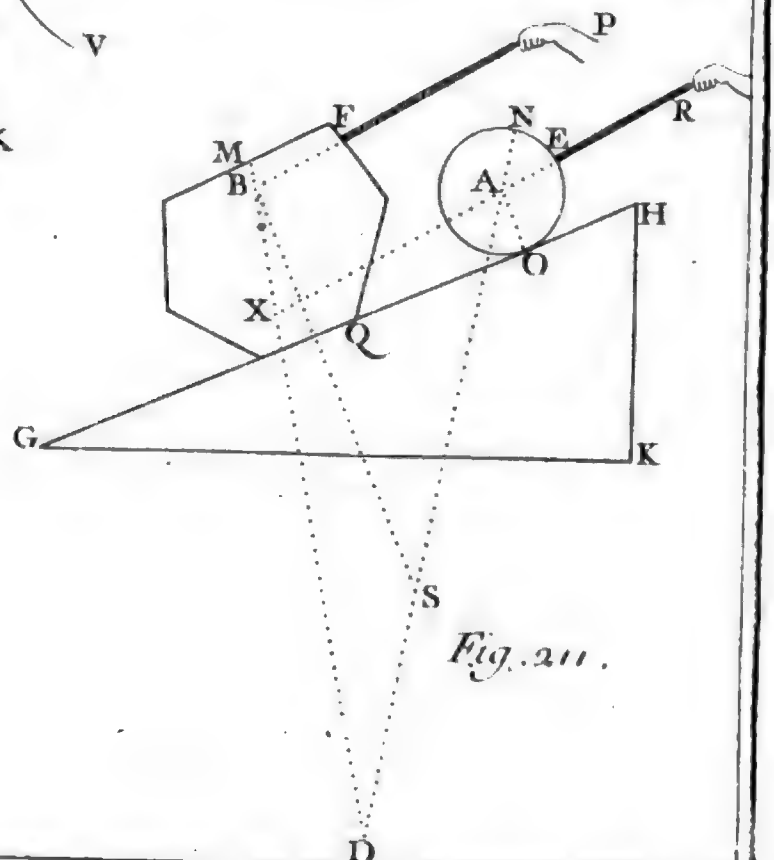


Fig. 211.

Digitized by Google

du poids EOQ, qu'on a ſuppoſée parallele à la hauteur HK du plan HG : on a enſuite regardé ce poids EOQ comme ſuſpendu ſuivant cette direction AP à l'extrêmité C de ce bras OC du Levier feint BOC; & la puiſſance R ſuppoſée le ſoûtenir ſur le plan HG, comme appliquée perpendiculairement auſſi à l'extrêmité B de l'autre bras OB de ce Levier recourbé BOC, ſuivant une direction AR, qu'on ſuppoſe d'ordinaire parallele à la longueur HG du plan de ce nom, ainſi que dans les Fig. 212. 214. & comme ſoûtenant ainſi le poids EOQ ſur le point O de ce plan HG par le moyen du Levier recourbé BOC, appuyé en ce point O ſur ce même plan.

II. Cela ſuppoſé, l'on a conclu, ſuivant le principe ordinaire des Leviers (*Th.* 21. *Corol.* 13.) que la puiſſance R & le poids EOQ, ſuppoſé ici en équilibre avec elle ſur l'appui O de ce Levier BOC recourbé en O, ſont entr'eux en raiſon reciproque de ſes bras OB, OC, perpendiculaires (*Hyp.*) aux directions AR, AP de cette puiſſance R, & de ce poids EOQ; c'eſt-à-dire, R. EOQ :: OC. OB. Et conſequemment, en ſuppoſant à l'ordinaire AR parallele à GH (comme dans les Fig. 212. 214.) R. EOQ :: HK. HG. à cauſe des triangles rectangles BCO, GKH, que ce paralleliſme rend ſemblables, en faiſant paſſer B en A.

III. Je conviens (*Th.* 26. *Corol.* 10. *& Corol.* 20. *art.* 1. *nomb.* 1.) de la verité de ces deux conſequences, dont la ſeconde eſt d'ordinaire la ſeule, ou du moins la premiere qu'on conclud de la ſuppoſition précedente (*art.* 1.) du Levier BOC, au lieu de la generale qui la précede : ces deux conſequences ſont, dis-je, ainſi vrayes; mais elles ne ſont ſûres par cette voye qu'en cas qu'on le ſoit que le poids EOQ ſoutenu (*Hyp.*) ſans Levier par la puiſſance R ſur le plan HG, puiſſe l'être de même par cette puiſſance appliquée (comme on l'imagine) au bras OB, & lui au bras OC d'un Levier BOC, appuyé librement en O ſur ce plan HG. Mais pour cela il reſte deux choſes à démontrer.

1°. Lorſque le poids touche le plan en pluſieurs points, lequel de tous ces points doit être pris pour l'appui du Levier qu'on imagine ici, n'y en ayant qu'un qui le puiſſe être, c'eſt-à-dire, qui lui puiſſe faire donner le rapport cherché entre la puiſſance & le poids ſuppoſez ici en équilibre entr'eux ſur le plan incliné.

2°. Quelle eſt la direction de la charge de ce point ou du plan en ce point, faute de quoi il ſera toujours à craindre que le Levier ainſi chargé de la puiſſance & du poids ſur ce plan incliné, ne tombe avec eux le long de ce même plan, ainſi qu'un poids qui n'y ſeroit pas ſuffiſamment ſoutenu, la difficulté étant la même de part & d'autre.

Fig. 215. *Le P. Pardies ſemble avoir effectivement apprehendé ce dernier inconvenient dans ſa Statique, art. 57. pages 78. 79. Car après avoir dit:* Imaginons que tout le poids de cette boule EOQ (*Fig.* 215.) eſt ramaſſé dans un bâton OB perpendiculaire au plan HG, qui a ſon centre de gravité en B comme l'y avoit la boule, & qui appuyé en O comme l'étoit auſſi la boule. *Il ajoûte:* Imaginons encore que ce bâton eſt non ſeulement appuyé ſur le bout O, mais qu'il y eſt comme ATTACHÉ, en ſorte neanmoins qu'il puiſſe y tourner comme ſur un pivot, pour ſe pancher vers G, & pour ſe hauſſer vers R. *Ce ſont les propres paroles du P. Pardies (aux lettres de la Figure près) qui eſt le ſeul, que je ſçache, qui ait ainſi apperçû le ſecond des deux inconveniens précedens de la démonſtration ordinaire des poids ſoûtenus ſur des plans inclinez, rapportée ci-deſſus dans l'art. 2. Quant au premier de ces deux inconveniens, cet Auteur n'en parle pas plus que les autres, qui s'entiennent à cette démonſtration, n'employant ici, non plus qu'eux, que des poids qui ne touchent les plans que chacun dans un point.*

IV. La neceſſité de démontrer les deux choſes marquées comme requiſes dans les nomb. 1. 2. du précedent art. 3. pour rendre la démonſtration précedente (*art.* 2.) des poids ſoûtenus ſur des plans inclinez, auſſi complete & auſſi generale qu'on a crû juſqu'ici l'avoir donnée par

le moyen des Leviers, paroîtra ſi l'on conſidere,

1°. Que lorſque le poids EOQ eſt de figure à toucher en pluſieurs points F, O, F, &c. le plan HG ſur lequel on le ſuppoſe en équilibre avec la puiſſance R, il n'y a effectivement qu'un de ces points, ſur lequel le Levier qu'on y imagine, puiſſe donner le rapport cherché entre cette puiſſance & ce poids appliquez à ce Levier ſuivant les mêmes directions AR, AP, ſuivant leſquelles on les ſuppoſe ici en équilibre entr'eux ſur le plan HG ſans aucun Levier. En effet ce Levier appuyé, par exemple, en O, donneroit, comme ci-deſſus (*art.* 2.) R. EOQ :: OC. OB. & appuyé en tout autre point F, duquel on meneroit FD, FL, perpendiculaires aux directions AR, AP, de la puiſſance R & du poids EOQ, comme le ſont (*Hyp.*) OB, OC; ce Levier DFL appuyé en F, donneroit de même R. EOQ :: FL. FD. rapport tout different de l'autre donné par le Levier BOC appuyé en O. Cela étant, lequel prendre de ces differens points O, F, &c. pour l'appui du Levier qui doit donner le veritable rapport qu'on demande entre cette puiſſance R & ce poids EOQ ſuppoſez en équilibre entr'eux ſur le plan HG touchée en tous ces points par les poids de la Fig. 201? C'eſt ce qu'il auroit fallu démontrer pour pouvoir donner (comme l'on a fait) comme generale la prétendue démonſtration du précedent art. 2. ainſi qu'on le vient de dire dans le nomb. 1. de l'art. 3. Fig. 201

2°. Que non ſeulement (*nomb.* 1.) le rapport que cette démonſtration donne entre la puiſſance & le poids ſuppoſez en équilibre entr'eux ſur un plan incliné, n'y eſt pas generalement démontré pour toutes ſortes de poids en toutes ſortes de poſitions, mais encore que cette démonſtration n'eſt pas même complete pour le cas qu'on y ſuppoſe d'un poids EOQ, qui ne touche qu'en un ſeul point O le plan HG ſur lequel on ſuppoſe que la puiſſance R le ſoûtient. Fig. 215. 216. 217. 218.

Car cette démonſtration étant fondée ſur la ſuppoſition qu'on y fait qu'un Levier BOC, auquel ce poids EOQ,

& cette puiſſance R ſeroient perpendiculairement appliquez ſuivant les mêmes directions AP, AR, ſur ce plan HG: cette démonſtration, dis-je, étant toute fondée ſur cette ſuppoſition, elle ne peut ſubſiſter, à moins que ce Levier BOC ou AEC, ainſi chargé de la puiſſance R & du poids EOQ, ne demeure effectivement en repos avec eux ſur ce point O du plan HG, ſans gliſſer ni trebucher comme feroit un poids qui y ſeroit mal ſoûtenu. Or les Corollaires 7. 8. du Lem. 3. & le Th. 21. part. 5. font voir que ce Levier ainſi chargé ne peut ainſi demeurer en repos ſur ce point O du plan HG, à moins que la direction de ſa charge réſultante du concours d'action de la puiſſance R & du poids EOQ, qu'on lui ſuppoſe appliquez, ne paſſe par ce même point O de la baſe de ce poids, & perpendiculairement à ce plan HG. Donc les Auteurs de cette prétendue démonſtration n'ayant démontré ni l'un ni l'autre, ont laiſſé cette démonſtration imparfaite, & ſans rien prouver même pour le cas d'un poids qui ne touche qu'en un point le plan incliné, ſur lequel ils l'ont ſuppoſé ſoûtenu; ce qui eſt le ſecond défaut de cette démonſtration, marqué dans le nomb. 2. de l'art. 3.

Fig. 215. 216. 217. 218. 219.

V. Pour y corriger ces deux défauts marquez dans les nomb. 1. 2. de l'art. 3. & démontrez dans les nomb. 1. 2. du précedent art. 4. & rendre generale & complette cette démonſtration ordinaire, en quelque nombre de points que le poids EOQ touche le plan HG, ſoit menée du concours A des directions AP, AR, de ce poids, & de la puiſſance R, qu'on ſuppoſe le ſoûtenir en équilibre avec elle ſur ce plan, la droite AO perpendiculaire en O à ce même plan; ce point O du plan HG ſera le veritable & l'unique ſur lequel un Levier tel qu'on imagine ici BOC, demeureroit appuyé, & ſoûtiendroit en équilibre entr'eux le poids EOQ & la puiſſance R, qui lui ſeroient perpendiculairement appliquez aux extrêmitez C, B, de ſes bras OC, OB, ſuivant les mêmes directions AP, AR, qu'elles ont dans l'équilibre qu'on leur ſuppoſe ſans Levier ſur le plan HG. Car,

1°. Puiſque (*Hyp.*) cette puiſſance R & ce poids EOQ ſont en équilibre entr'eux ſans Levier ſur le plan HG, la direction de la force réſultante de leur concours d'action, doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 8.) ſuivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) à ce plan, & conſequemment paſſer par le point ou le coude du Levier recourbé BOC, auquel on les imagine appliquez ſuivant les mêmes directions AR, AP, qu'elles ont dans leur équilibre ſans Levier ſur ce plan HG. Donc (*Th.* 21. *part.* 5.) ce Levier BOC ainſi chargé de cette puiſſance & de ce poids, demeureroit en repos avec eux ſur ce point O, ſi ce point de ce Levier peut demeurer ſur celui O du plan HG. Or la charge ou l'impreſſion de ce point O du Levier BOC, réſultante du concours d'action de cette puiſſance & de ce poids, ſe trouvant ainſi dirigée (*Th.* 21. *part.* 2.) ſuivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) en O à HG, ce point O de ce Levier doit demeurer (*Lem.* 3. *Corol.* 8.) ſur celui O de ce plan. Donc auſſi ce Levier BOC, auquel la puiſſance R & le poids EOQ ſeroient appliquez comme ci-deſſus, demeureroit en repos avec eux ſur ce point O du plan HG, ſans gliſſer ni trebucher. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. De tous les points dans leſquels le plan HG eſt touché par le poids EOQ, s'il le touche en pluſieurs, comme dans la Fig. 216. Ce point O déterminé par la perpendiculaire AO ſur ce plan, eſt le ſeul de ce même plan, ſur lequel un Levier appuyé put demeurer en repos avec la puiſſance R & le poids EOQ, qui lui ſeroient appliquez ſuivant les mêmes directions AR, AP, que ci-deſſus; puiſque ſuivant leur équilibre ſuppoſé ſans Levier ſur le plan AM, la direction de la force réſultante de leur concours, doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 8.) ſuivant cette perpendiculaire AO au plan HG, & conſequemment ne doit rencontrer ce plan qu'en ſon ſeul point O. Donc en tout autre point F de ce même plan qu'on placât le Levier tel que DFL, auquel la puiſſance R & le poids EOQ, fuſſent appliquez en D, L, ſuivant les mê-

mes directions AR, AP ; ce Levier (*Lem.* 3. *Corol.* 7. *nomb.* 2.) tomberoit ou monteroit avec eux en trebuchant le long du plan HG, ſelon que ce point F ſe trouveroit au-deſſous ou au-deſſus de O ſur ce plan : par conſequent ce point O eſt le ſeul de ce même plan HG, ſur lequel un Levier chargé (comme ci-deſſus) de la puiſſance R & du poids EOQ, pût demeurer en repos avec eux. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Fig. 215. 216. VI. Il eſt vrai que les Auteurs qui n'ont conſideré que des poids ſpheriques ſoûtenus ſur des plans inclinez, comme dans les Fig. 212. 213. ont mis en ce point O de chacun de ces plans l'appui du Levier BOC, qu'ils y ont imaginé ; mais n'ayant pas eu à choiſir, à cauſe que chaque Sphere ou Globe EOQ ne touche chaque plan AH qu'en cette extrêmité O de ſon rayon AO neceſſairement perpendiculaire à ce plan, l'on n'en peut rien conclure pour la neceſſité d'un tel appui du Levier pareillement imaginé dans un poids qui toucheroit le plan en Fig. 219. pluſieurs points, comme dans la Fig. 219. c'eſt-à-dire, qu'on n'en peut rien conclure pour le choix de celui de ces points qu'on devroit prendre pour l'appui de ce Levier.

Quant à l'Auteur qui y a employé un poids angulaire, ne l'ayant appuyé que ſur une de ſes pointes, comme Fig. 217. 218. dans les Fig. 217. 218. il n'a pas eu plus à choiſir pour l'appui O du Levier BOC, qu'il y a pareillement imaginé ; mais la ſuppoſition qu'il y a faite de AO perpendiculaire en ce point O au plan HG, ſur lequel il a ſuppoſé ce poids EOQ, fait voir qu'il a ſçû qu'il étoit neceſſaire que la droite AO menée du concours A des directions AP, AR, de ce poids & de la puiſſance R à ce point O, fût perpendiculaire au plan HG, ſur lequel on les ſuppoſe en équilibre : cependant cet Auteur ne l'ayant pas démontré, non plus que les autres, ſa démonſtration des poids ſoûtenus ſur des plans inclinez, n'eſt, non plus que les leurs, ni generale, ni complete, ainſi qu'on le vient de faire voir dans les art. 4. 5. dans le dernier deſquels on

Fig. 213.

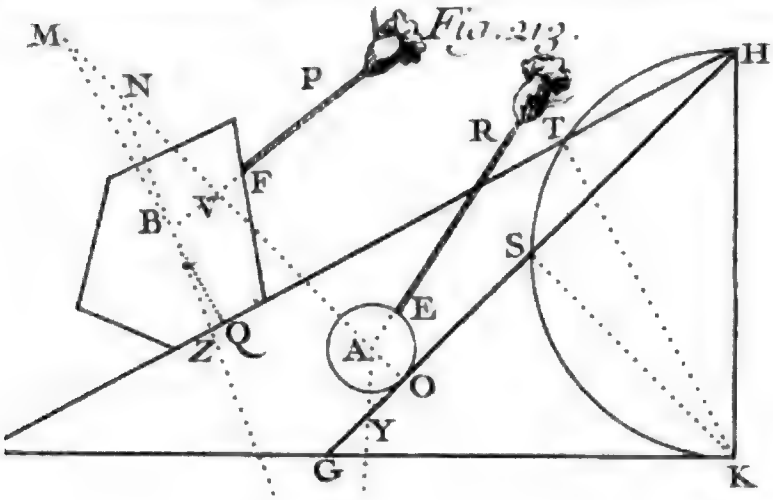


Fig. 215.

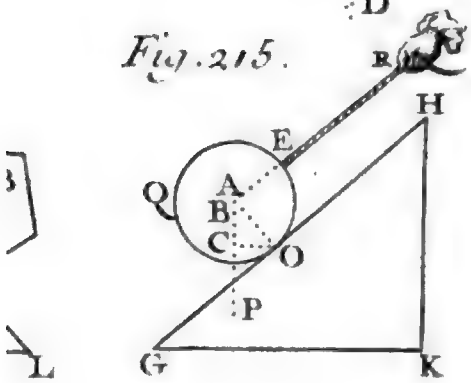
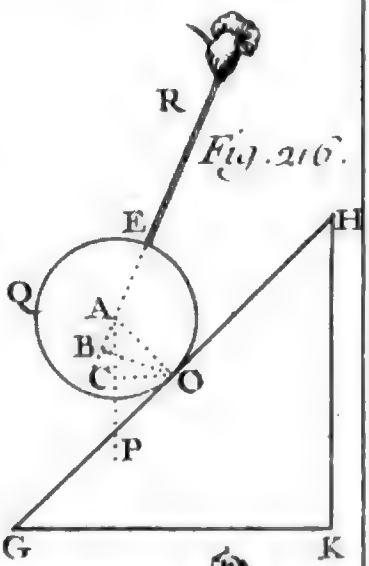


Fig. 216.



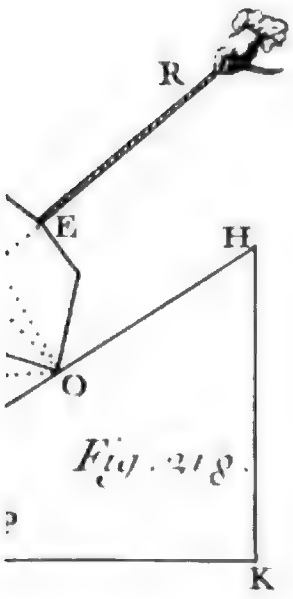
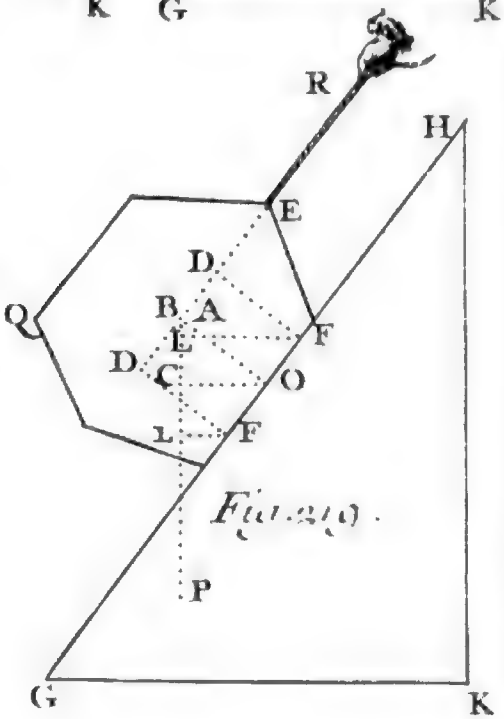


Fig. 218.

Fig. 219.



Digitized by Google

là voit rendue telle par le moyen des impreſſions ou forces compoſées, employées en tout ceci.

Au reſte on ne remarque ici ces défauts de la démonſtration ordinaire des poids ſoûtenus ſur des plans inclinez, faite par le moyen des Leviers, que pour empécher qu'on ne s'y méprenne davantage. On les avoit omis en 1687. dans le Projet de ceci, parce qu'on croyoit qu'il les découvriroit aſſez; mais l'uſage qu'on a fait depuis de cette démonſtration ſans la corriger, faiſant voir que tous ceux qui ſe mélent de Mécanique, ne les ont pas encore apperçûs, on croit leur faire plaiſir de les leur faire remarquer ici.

THEOREME XXVII.

Un poids quelconque EOF étant ſoûtenu ſur une ſurface auſſi quelconque SV par telle puiſſance R qu'on voudra: quelles que ſoient les directions AC, AR, de ce poids & de cette puiſſance, ſi du concours A de ces directions l'on mene AD perpendiculaire en O à cette ſurface SV, & que ſur cette ligne AD de longueur quelconque (comme diagonale) on faſſe un parallelogramme BACD, qui ait ſes côtez AB, AC, ſur les mêmes directions AR, AC, de la puiſſance R & du poids EOF; ſi de plus de l'extrémité D de la diagonale AD on mene DM perpendiculaire en M à la direction AC du poids EOF; je dis que la reſiſtance verticale ſuivant MA de la ſurface SV au poids EOF de direction AC directement contraire à celle de cette reſiſtance, ſera à l'effort vertical de la puiſſance R directement pour ou contre ce poids :: AM. AC. Fig. 210. 211. 212.

DEMONSTRATION.

Suppoſant ici, comme dans la part. 1. du précedent Th. 26. par la raiſon rapportée dans ſon Scholie, que AO eſt la ſeule perpendiculaire qu'on puiſſe mener du point A à la ſurface SV, cette part. 1. du Th. 26. fait voir que cette perpendiculaire AO doit paſſer ici par la baſe du poids EOF ſuppoſé en équilibre avec la puiſſance R ſur la ſurface SV; & qu'ainſi c'eſt non ſeulement

(*Lem.* 3. *Cor.* 8. 9.) ſur le point O de cette ſurface que ſe fait ici cet équilibre ; mais encore la charge (*Def.* 17.) ou la reſiſtance directe de ce point ou de cette ſurface SV ſuivant AD ou DA, y eſt à ce poids EOF & à cette puiſſance R, comme la diagonale AD du parallelogramme BACD eſt à chacun de ſes côtez AC, AB, correſpondans ſur leurs directions.

Or ſi, après avoir mené BN perpendiculaire en N à AC prolongée de ce côté-là, l'on appelle D cette reſiſtance directe ou totale ſuivant DA, de la ſurface SV ; M, ce qu'elle en fait (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) de verticale de M vers A directement à contre-ſens de la peſanteur du poids EOF ; N, l'effort vertical ſuivant AN que la puiſſance R fait de même (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) directement pour ou contre cette peſanteur.

La part. 2. du Lem. 3. donnera ici M. D :: AM. AD. Et R. N :: AB. AN. Donc ayant déja (*Th.* 26. *part.* 1.) D. R :: AD. AB. l'on aura ici

M. D :: AM. AD.
D. R :: AD. AB.
R. N :: AB. AN.
} Donc auſſi (en multipliant par ordre) M. N :: AM. AN.

Mais les parallelogrammes BACD, BNMD, rendant CD =AB, & CD. AB :: MC. AN. rendent auſſi MC=AN. Donc enfin M. N :: AM. MC. c'eſt-à-dire, ſuivant les noms précedens, que la reſiſtance verticale ſuivant MA de la ſurface SV au poids EOF, doit être ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN directement pour ou contre ce poids :: AM. MC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Au lieu de la ſurface SV imaginons pour un moment une puiſſance P, qui avec une corde FP, dirigée ſuivant DA prolongée de ce côté-là, ſoûtienne avec la puiſſance R le poids EOF, preſentement ſoûtenu avec des cordes

ſeulement. On voit dans la ſeconde démonſtration de la part. 1. du précedent Th. 26. que la puiſſance P ainſi dirigée ſuivant DA ou OA perpendiculaire en O à la ſurface SV, doit comme cette ſurface, & d'une force égale à la reſiſtance de cette même ſurface, tant ſuivant DP, que ſuivant CA, ſoûtenir le poids EOF avec la puiſſance R.

Or ſi du point B l'on mene parallelement à AP la droite BQ, qui rencontre CA prolongée en Q, duquel point Q ſoit la droite QX parallele auſſi à AR; & que du point X ou QX rencontre AP, l'on mene XL perpendiculaire en L à la diagonale AQ du parallelogramme ABQX; le Th. 2. fait voir que l'effort vertical ſuivant AL de la puiſſance P doit être ici au vertical de la puiſſance R ſuivant AN :: AL. AN. Donc auſſi en reſtituant la ſurface SV au lieu de la puiſſance P, la reſiſtance verticale de cette ſurface ſuivant MA directement contre la peſanteur du poids EOF, doit être ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN directement pour ou contre la peſanteur de ce poids :: AL. AN.

Mais les parallelogrammes BAXQ, BDAQ, BACD, donnant AX=BQ=AD, AB=CD, & les triangles (*conſtr.*) ſemblables ALX, AMD, & ANB, CMD, donnant AL. AM :: AX. AD. Et AN. MC :: AB. CD. l'on aura ici AL=AM, & AN=MC. Donc enfin la reſiſtance verticale de la ſurface SV ſuivant MA directement contre la peſanteur du poids EOF, eſt ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN directement pour ou contre la peſanteur de ce poids :: AM. MC. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si l'on prolonge RA, DM, juſqu'à leur rencontre en Z, le paralleliſme ſuppoſé entre RA, DC, rendant les triangles CMD, AMZ, ſemblables entr'eux, l'on aura AM. MC :: ZM. MD. Donc auſſi la reſiſtance verticale de la ſurface SV ſuivant MA directement contre la pe-

ſanteur du poids EOF, ſera ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN pour ou contre cette peſanteur : : ZM. MD. c'eſt-à-dire (en prenant AM pour rayon) comme la tangente de l'angle MAZ ou RAN, eſt à la tangente de l'angle MAD.

COROLLAIRE II.

Fig. 221. Les parties du poids EOF ou de ſa peſanteur, ſoûtenues dans la Fig. 221. par la puiſſance R, & par la ſurface SV, étant égales (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) aux reſiſtances N, M, directement contraires & en équilibre avec ces parties de peſanteur, que la puiſſance R & la ſurface SV ſont à ces mêmes parties de peſanteur ſuivant leur direction.

1°. Il ſuit encore du préſent Th. 27. que la partie de la peſanteur du poids EOF, ſoutenue par la ſurface SV, eſt à ce que la puiſſance R en ſoûtient : : AM. MC.

2°. Il ſuit de même du Corol. 1. que ces mêmes parties de la peſanteur du poids EOF, ſont auſſi entr'elles comme les tangentes ZM, MD, des angles RAN, MAD, en prenant AM pour le rayon.

COROLLAIRE III.

Fig. 221. Puiſque (*Cor.* 1.) la partie de EOF, ſoûtenue par la ſurface SV eſt toujours à ce que la puiſſance R en ſoûtient dans la Fig. 218. comme ZM eſt à MD ; ces deux parties de peſanteur du poids EOF ne peuvent être entr'elles comme AM eſt à MD, que dans le cas de ZM=AM, c'eſt-à-dire (l'angle M du triangle AMZ étant ſuppoſé droit) ſeulement lorſque l'angle ZAM, ou ſon égal RAN, eſt de 45 degrez. Donc le cas ordinaire de AC parallele à HK, lequel rendant les triangles DMA, HKG, ſemblables entr'eux, rend AM. MD : : GK. KH. la partie de la peſanteur du poids EOF, ſoûtenue par la ſurface SV, ne peut être à ce que la puiſſance R en ſoutient : : GK. KH. que lorſque l'angle RAN eſt de 45. degrez. Or en ajoûtant à la précedente hypotheſe de AC parallele

à

à HK, celle de AR auſſi parallele à GH, qui rend l'angle RAO ou RAD droit; l'angle RAN ne peut être de 45 degrez que lorſque l'angle DAM ou ſon égal HGK eſt de même valeur. Donc dans la ſuppoſition ordinaire de AC parallele à HK, & de AR parallele à HG, la partie de la peſanteur du poids EOF, ſoûtenue par la ſurface SV, ne peut être à ce que la puiſſance R en ſoutient :: GK. KH. que lorſque l'angle HGK d'inclinaiſon du plan HG ſur l'horiſontal GK, eſt de 45 degrez : auquel cas ces deux parties de peſanteur du poids EOF ſeroient égales entr'elles, puiſqu'on auroit alors GK=KH.

COROLLAIRE IV.

Ce ſeroit donc une mépriſe que de dire en general dans la ſuppoſition ordinaire de AC parallele à HK, & de AR parallele à GH (comme a fait un Auteur de ce tems-ci, en appellant GK l'inclinaiſon du plan GH) que *lorſqu'on tire une Sphere le long d'un plan* (il veut dire, lorſqu'on la ſoûtient ſur un plan) *par une ligne parallele à ce plan, ce qui porte de cette Sphere ſur le plan, eſt à ce qu'il ne porte pas, comme l'inclinaiſon du plan eſt à ſa hauteur.* C'eſt-à-dire (ainſi que cet Auteur s'explique dans la démonſtration de cette prop. 26. de ſa Mécanique) *ce que porte le plan HG, eſt à ce qu'il ne porte pas de cette Sphere, comme GK eſt à KH.* Ce ſeroit-là, dis-je, une mépriſe; puiſque (*Cor.* 3.) cette propoſition n'eſt vraye que dans le cas où l'angle HKG du plan HG ſur l'horiſontal GH, ſeroit de 45 degrez, & fauſſe dans tous les autres.

COROLLAIRE V.

Pour rendre cette propoſition generalement vraye dans toute l'étendue que l'Auteur lui donne, au lieu de dire que lorſqu'un poids eſt ſoutenu ſur un plan incliné par une puiſſance d'une direction parallele à ce plan, la partie de ce poids ou de ſa peſanteur, ſoutenue par ce plan, eſt à ce que la puiſſance en ſoûtient, *comme GK eſt à HK,*

il devoit dire, *comme le quarré de GK eſt au quarré de HK.* Car dans ſon hypotheſe non ſeulement de AC parallele à HK, mais encore de AR parallele à GH, & conſequemment auſſi (à cauſe du parallelogramme ABDC) de DC parallele à GH, l'angle droit GOD rendant pareillement l'angle ADC droit, de même que le ſont (*Hyp.*) les angles en M; l'on aura ici AM. MC :: $\overline{AM}^2$. $\overline{MD}^2$. (la preſente hypotheſe rendant les triangles ADC, GHK, ſemblables entr'eux) :: $\overline{GK}^2$. $\overline{HK}^2$. Or le preſent Th. 27. fait voir en general que la partie du poids EOF ou de ſa peſanteur, ſoûtenue par la ſurface quelconque SV, eſt à ce que la puiſſance R en ſoûtient :: AM. MC. Donc auſſi la premiere de ces deux parties du poids EOF ou de ſa peſanteur, eſt ici à la ſeconde :: $\overline{GK}^2$. $\overline{HK}^2$. & non pas :: GK. HK. ainſi que l'Auteur en queſtion l'avance dans la prop. 26. qu'on vient de rapporter de ſa Mécanique dans le précedent Corol. 4.

Cet Auteur eſt le même que nous avons déja trouvé en notre chemin dans le nomb. 3. du Corol. 56. du précedent Th. 26. la prop. 27. de ſa Mécanique, qu'il oppoſoit au ſentiment ordinaire établi dans ce nomb. 3. n'etant qu'une ſuite de ſa prop. 26. qu'on voit (Corol. 4.) *être fauſſe, doit l'être auſſi, & ſans force contre ce nomb. 3. du Corol. 56. de notre Th. 26. La mépriſe de cet Auteur vient des Lemmes équivoques ou mal démontrez, qui l'ont jetté dans l'erreur dans preſque tout ce qu'il a dit des poids ſoûtenus. Il l'auroit vû ſans peine avant ſa mort, s'il eût bien voulu examiner tout cela par la voye des mouvemens compoſez, qu'il adopta, lorſque le Projet de ceci parut, long-tems après ſa Mécanique imprimée, ſans voir que cette voye lui étoit contraire, & qu'elle conduit (comme l'on vient de voir) à des ſentimens tout contraires à ceux que nous venons de rapporter de lui.*

COROLLAIRE VI.

Fig. 221. Dans le cas de la Fig. 221. dans lequel l'effort ou la ré-

Digitized by Google

ſiſtance verticale ſuivant AN de la puiſſance R, & la réſiſtance verticale ſuivant MA de la ſurface SV, ſont l'une & l'autre directement contraires à la peſanteur ſuivant AM du poids EOF; cette peſanteur en ce cas d'équilibre doit être (*Ax.* 4.) égale à la ſomme de ces deux réſiſtances verticales employées à la ſoutenir ſuivant une direction commune directement contraire à la ſienne: de ſorte que ſi l'on appelle A la peſanteur du poids EOF; N, l'effort vertical ſuivant AN de la puiſſance R; & M, la réſiſtance verticale de la ſurface SV ſuivant MA; l'on aura ici A=M+N (le preſent Th. 26. donnant AM. MC :: M. N. $=\frac{M\times MC.}{AM}$) $=M+\frac{M\times MC}{AM}=\frac{M\times AC}{AM}$; & conſequemment auſſi $M=A-N=A-\frac{M\times MC}{AM}=\frac{A\times AM.}{AC}$

Donc en ce cas de la puiſſance R contraire à la peſanteur du poids EOF, la ſurface SV ne ſoûtiendra de cette peſanteur (A) que l'excès dont cette même peſanteur en ſurpaſſeroit une autre à qui la réſiſtance verticale (M) de cette ſurface ſeroit :: AM. MC. ou (ce qui revient au même) la ſurface SV ne ſoûtiendra ici de la peſanteur du poids EOF, qu'une partie à qui cette peſanteur (A) ſeroit :: AC. AM.

COROLLAIRE VII.

Les réſiſtances verticales M, N, de la ſurface SV & de la puiſſance R, à la peſanteur (A) du poids EOF dans ce cas de la Fig. 221. étant (*Hyp.*) l'une & l'autre directement oppoſées à cette peſanteur, & toutes deux enſemble en équilibre avec elle; l'ax. 4. fait voir non ſeulement que leur ſomme M+N doit être égale à cette peſanteur entiere A, mais encore que chacune de ces deux réſiſtances verticales M, N, doit égaler ce qu'elle ſoûtient de cette peſanteur. Donc la ſomme des deux parties de cette peſanteur A, ſoûtenues chacune par chacune

des réſiſtances verticales M, N, dans ce cas de la Fig. 221. y doit être égale à cette peſanteur entiere (A) du poids EOF.

COROLLAIRE VIII.

Fig. 220. Telles ſont (*Corol.* 6. 7.) les parties de la peſanteur du poids EOF, que la ſurface SV & la puiſſance R ſoutiennent chacune pour leur part dans le cas de la Fig. 221. où la puiſſance R tire obliquement de bas en haut.

Quant à celui de la Fig. 220. où cette puiſſance R tire obliquement de haut en bas, non ſeulement cette puiſſance ne porte rien de la peſanteur du poids EOF ; mais au contraire ſe joint contre la réſiſtance verticale de la ſurface SV ; cette réſiſtance verticale ſuivant MA, ayant ainſi à ſoûtenir à la fois les deux efforts verticaux du poids EOF & de la puiſſance R, réunis contr'elle ſuivant une direction AM, directement contraire à la ſienne, doit ſeule (*Ax.* 4.) être égale à la ſomme de ces deux efforts entiers : de ſorte que ſuivant les noms du précedent Corol. 7. l'on aura ici $M=A+N$ (le preſent Th. 27. donnant AM. MC :: $M. N=\frac{M\times MC}{AM}$) $=A+\frac{M\times MC}{AM}$. Donc en ce cas de la puiſſance R agiſſante en faveur du poids EOF, la ſurface SV ſoûtiendra ſeule la peſanteur entiere (A) de ce poids augmentée, d'une force à qui la réſiſtance verticale (M) de cette ſurface ſeroit :: AM. MC.

COROLLAIRE IX.

Fig. 222. Dans le cas de la Fig. 222. dans lequel la puiſſance R n'agit ni pour ni contre la peſanteur du poids EOF, ayant (*Hyp.*) ſa direction AR perpendiculaire à celle AC de ce poids ; la réſiſtance verticale ſuivant MA de la ſurface SV, directement contraire à celle AM de ce même poids, n'ayant ici que la peſanteur de ce poids à ſoûtenir, doit (*Ax.* 4.) être préciſément égale à cette peſan-

Digitized by Google

teur : de ſorte que ſuivant les noms précedens des Corol. 7. 8. l'on doit avoir ici préciſément M=A.

Cela ſuit auſſi des égalitez A=M+N, M=A+N, trouvées dans ces deux Corol. 7. 8. pour les cas de la puiſſance R agiſſante contre ou en faveur du poids EOF, parce qu'elle a ſon effort vertical N=0 dans ce cas-ci, où elle n'agit ni pour ni contre ce poids.

Donc la ſurface SV ſoûtiendra encore ici ſeule la peſanteur entiere de ce poids EOF, mais rien davantage, en vertu de ſon effort vertical ſuivant MA.

COROLLAIRE X.

Les noms demeurant encore les mêmes que dans la démonſtr. 1. du preſent Th. 27. & que dans ſon Corol. 6. ſçavoir, D= à la charge ſuivant AO ou AD de la ſurface SV, M= à la réſiſtance verticale de M vers A de cette ſurface ou de ſon point O, N= à l'effort vertical de A vers N de la puiſſance R, & A= à la peſanteur entiere du poids EOF, ſoûtenu (*Hyp.*) en O par cette puiſſance R ſur cette ſurface SV; ce preſent Th. 27. donnant M. N :: AM. MC. donnera auſſi M. M+N :: AM. AM+MC :: AM. AC. La Fig. 221. ayant AM+MC=AC, la Fig. 220. ayant AM—MC=AC. & la Fig. 222. ayant AM ± MC=AM=AC. Donc on aura auſſi (en raiſon ordonnée) N. M± N :: MC. AC. Or (*Ax.* 4.) M+N=A dans la Fig. 221. M—N=A dans la Fig. 220. & M±N=A dans la Fig. 222. Donc en general M. A :: AM. AC. Et N. A :: MC. AC. Or *Lem.* 3. *part.* 2.) D. M :: AD. AM. & R. N :: AB. AN. Donc (en raiſon ordonnée) D. A :: AD. AC. Et R. A :: AB. AC. ou A. R :: AC. AB. Et par conſequent auſſi (en raiſon ordonnée) D. R :: AD. AB. c'eſt-à-dire, qu'en ce cas d'équilibre de la puiſſance R & du poids EOF ſoûtenu par elle ſur la ſurface SV, cette puiſſance R, & la peſanteur (A) de ce poids EOF, ſeront toûjours entr'elles comme les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD dont ces côtez ſeroient ſur les directions quelconques de cette puiſſance & de ce poids.

FIG. 220. 221. 222.

& dont la diagonale AD ſeroit perpendiculaire à cette ſurface SV ; & qu'en ce même cas d'équilibre la charge (D) réſultante du concours d'action de cette puiſſance R & de la peſanteur (A) de ce poids EOF, ſera auſſi toûjours à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD du parallelogramme BACD à chacun de ſes côtez AB, AC, correſpondans ſur leurs directions, ainſi qu'on l'a déja vû dans la part. 1. du Th. 25.

COROLLAIRE XI.

FIG. 221. Dans le cas de la Fig. 221. dans lequel (*Corol.* 6. 7.) la puiſſance R & la ſurface SV portent chacune une partie de la peſanteur du poids EOF ; puiſque la partie qui en eſt ſoutenue par cette puiſſance R ſur cette ſurface, y eſt (*Corol.* 2. *nomb.* 1.) à l'autre partie ſoutenue par cette même ſurface :: MC. AM. & que la premiere MC de ces deux lignes augmente, & que l'autre AM diminue à meſure que l'angle RAN devient plus petit depuis ſa poſition perpendiculaire de AR ſur AD, juſqu'à rendre MC=AC, & AM=o, lorſque AR ſe trouvera ſur AN : la partie du poids EOF ſoûtenue ici par la puiſſance R, doit toûjours auſſi augmenter, & l'autre partie ſoûtenue par la ſurface SV toujours diminuer, à meſure que cet angle RAN devient plus aigu ; la premiere juſqu'à devenir égale au poids entier, & la ſeconde juſqu'à devenir nulle ou zero, lorſque AR ſe trouve ſur AN par l'extinction de l'angle RAN ; ce qui revient en ceci au nomb. 1. du Corol, 15. du Th. 26.

COROLLAIRE XII.

FIG. 220. Dans le cas de la Fig. 220. dans lequel (*Corol.* 8.) la puiſſance R ne porte rien du poids EOF, & où la réſiſtance verticale de la ſurface SV ſoutient ſeule la peſanteur entiere de ce poids augmentée même de l'effort vertical que la puiſſance R fait ici de haut en bas ; puiſque

Digitized by Google

ce cas donne toûjours (*Corol.* 8.) $M=A+N=A+\frac{M\times MC}{AM}=\frac{A\times AM}{AM-MC}=\frac{A\times AM}{AC}$, ſuivant les noms employez dans le Corol. 8. & que AM augmente à meſure que l'angle RAD de droit devient plus aigu, juſqu'à devenir infinie, lorſque AR ſe trouve ſur AD, ſans aucun changement de la part de $\frac{A}{AC}$: la réſiſtance verticale M de la ſurface SV doit ici augmenter à l'infini à meſure que cet angle RAD diminue ainſi, juſqu'à devenir effectivement infini, lorſque AR arrivera ſur AD ; & ceci parce que la puiſſance R (*Th.* 26. *Corol.* 19. *nomb.* 2.) alors infinie, aura pour lors AN pareillement infinie, laquelle AN, ſuivant le preſent Th. 27. exprime l'effort vertical de la ſurface SV.

SCHOLIE.

N'ayant eu deſſein dans ce Théoreme-ci que de chercher ce qu'une puiſſance, & la ſurface ſur laquelle elle ſoutient un poids, portent chacune de la peſanteur de ce poids, nous n'y avons fait attention que de ce que la force de cette puiſſance, & la réſiſtance de cette ſurface, en ont de verticales, ſans rien dire de ce qu'elles en ont (*Def.* 17.) d'horiſontales, leſquelles ne font ni pour ni contre la peſanteur de ce poids, mais ſeulement l'empêchent d'aller horiſontalement d'aucun côté, ainſi qu'on l'a vû dans l'article 2. du Schol. du Th. 2. touchant les poids ſoutenus avec des cordes ſeulement.

En effet, ſi, en appellant encore D la réſiſtance de la ſurface SV de O vers A ſuivant DA, l'on appelle preſentement M la réſiſtance de D vers M ſuivant l'horiſontale DM ; & N, l'effort ou la réſiſtance de la puiſſance R de N vers B ſuivant l'horiſontale NB : le poids EOF ſe trouvera pouſſé tout à la fois ſuivant ces deux impreſſions horiſontales M, N, directement oppoſées l'une à l'autre.

Or la part. 2. du Lem. . fait voir que M. D :: MD. AD. Et R. N :: AB. NB. De ſorte qu'ayant déja (*part.* 1. *du Th.* 26. *& Corol.* 20. *de celui-ci*) D. R :: AD. AB.

L'on aura ici
$$\begin{cases} M.D :: MD.AD. \\ D.R :: AD.AB. \\ R.N :: AB.NB. \end{cases}$$

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura pareillement ici M. N :: MD. NB. Par conſequent la conſtruction y donnant MD=NB, l'on aura auſſi les réſiſtances horiſontales M, N, égales entr'elles, leſquelles étant directement oppoſées l'une à l'autre, empêchent conſequemment (*Ax.* 3.) le poids EOF de ſe mouvoir horiſontalement d'aucun côté. *Ce qu'il falloit ici faire voir.*

Le Scholie du Th. 2. fait voir encore la même choſe en ſubſtituant, comme dans la démonſtr. 2. du preſent Th. 27. la puiſſance P au lieu de la ſurface SV. Car toutes choſes demeurant ici les mêmes que dans cette démonſtr. 2. ce Scholie du Th. 2. faiſant voir que les efforts ou les réſiſtances des puiſſances P, R, ſuivant les horiſontales LX, NB, empêchent le poids EOF de ſe mouvoir horiſontalement d'aucun de leurs côtez ; la réſiſtance de la ſurface SV ſuivant l'horiſontale MD en même ſens que l'horiſontale de la puiſſance P, & égale à elle, doit auſſi (en ſa place) avec l'horiſontale, ſuivant NB de la puiſſance R, empêcher le poids EOF de ſe mouvoir horiſontalement d'aucun côté. *Ce qu'il falloit encore faire ainſi voir.*

Tel eſt l'uſage de ces réſiſtances horiſontales de la ſurface SV & de la puiſſance R, l'une contre l'autre ſuivant DM, NB, pour empêcher le poids EOF de ſe mouvoir horiſontalement d'aucun côté, pendant que leurs réſiſtances verticales ſuivant MA, AN, l'empêchent de ſe mouvoir verticalement de la maniere qu'on le vient de voir dans le preſent Th. 27. & dans ſes Corollaires.

Au reſte la démonſtration 2. de ce Théoreme-ci fait voir tant d'affinité

Digitized by Google

d'affinité ou de reſſemblance entre lui & le Th. 2. que tout ce qu'on a dit là des poids ſoûtenus avec des cordes ſeulement, s'appliquera ſans peine aux poids ſoûtenus ſur des ſurfaces, & reciproquement. Nous ne nous arrêterons donc pas ici davantage.

THEOREME XXVIII.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans les part. 1. 2. du Th. 27. c'eſt-à-dire, la puiſſance R & le poids EOF de directions quelconques étant encore ici en équilibre entr'eux ſur la ſurface auſſi quelconque SV, &c. je dis que la charge qui en réſulte à cette ſurface ſuivant ſa perpendiculaire AD par la baſe du poids EOF, eſt toûjours à ce qu'il en réſulte perpendiculairement auſſi à chacune des ſurfaces horiſontale GK, & verticale KH, qui ſoûtiennent celle-là, comme l'hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG eſt à chacun de ſes deux autres cotez GK, KH. FIG. 210. 211. 212.

DEMONSTRATION.

Sur la diagonale AD du parallelogramme BACD, prolongée du côté de D, ayant pris depuis O de ce côté-là une partie quelconque, Oβ terminée ici (ſi l'on veut) au plan horiſontal GK, ſoit un parallelogramme rectangle TOYβ, dont cette partie Oβ ſoit la diagonale, & dont les côtez OT, OY, ſoient paralleles à la hauteur HK, & à la baſe KG du plan HG touchant la ſurface SV au point O, auquel la diagonale AD du parallelogramme BACD rencontre (*Th. 26. part. 1.*) perpendiculairement cette ſurface par la baſe du poids EOF, ſoûtenu (*Hyp.*) ſur elle par la puiſſance R.

Cela poſé, l'effort réſultant (*Th. 26. part. 1.*) du concours d'action de cette puiſſance R, & du poids EOF ſur le point O de cette ſurface SV, ſuivant AD ou Oβ, étant le même (*Lem. 3. Corol. 6.*) que s'il réſultoit du concours de deux forces dirigées ſuivant OT, OY, leſquelles fuſſent à cet effort commun ſuivant Oβ, comme ces côtez OT, OY, ſont à cette diagonale Oβ du parallelogramme

TOYβ ; cet effort commun ſuivant Oβ ſur la ſurface SV, doit être à ce qu'il lui en réſulte en ſon point O ſuivant OT perpendiculaire (*Hyp.*) à GK, & ſuivant OY perpendiculaire auſſi (*Hyp.*) à KH, c'eſt-à-dire, à ce qu'il en réſulte perpendiculairement ſur ou contre ces deux autres ſurfaces GK, KH, comme la diagonale Oβ de ce parallelogramme rectangle TOYβ, eſt à ſes mêmes côtez OT, OY. Or à cauſe de AD ou Oβ perpendiculaire (*Th.* 26. *part.* 1. 2.) à la ſurface SV ou à ſon plan touchant HG en O, & de OT, OY, paralleles aux deux autres côtez HK, KG, du triangle rectangle HKG, le triangle βTO lui ſera ſemblable, & conſequemment aura ſes côtez Oβ, OT, OY, en même raiſon que HG, GK, HK. Donc auſſi l'effort commun de la puiſſance R & du poids EOF ſuivant AD ſur la ſurface SV, doit être à ce qu'ils en font enſemble ſur les ſurfaces KG, HK, ſuivant OT, OY, c'eſt-à-dire (*Déf.* 27.) que la charge de la ſurface SV doit être aux charges de ces deux-ci, comme l'hypothenuſe HG du triangle rectangle HKG eſt à ſes deux autres côtez GK, KH, quelles que ſoient les directions AR, AC, de la puiſſance R & du poids EOF, du concours deſquels en équilibre (*Hyp.*) ſur la ſurface SV, ces trois charges ou preſſions réſultent à cette ſurface SV & aux deux autres GK, KH, ſuivant leurs perpendiculaires Oβ, OT, OY : de ſorte qu'en appellant O la charge ou la preſſion de la ſurface inclinée quelconque SV ; T, celle de la ſurface horiſontale GK ; & Y, celle de la ſurface verticale KH ; l'on aura toûjours ces trois charges ou preſſions perpendiculaires O, T, Y, en raiſon des trois côtez HG, GK, KH, du triangle rectangle HKG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc, 1°. l'on aura O. T :: HG. GK. c'eſt-à-dire, que la force commune (O), avec laquelle la puiſſance R & le poids EOF preſſent enſemble la ſurface SV ſuivant la perpendiculaire Oβ ou AD, eſt toûjours à celle (T) dont

Digitized by Google

ils preſſent enſemble perpendiculairement auſſi ſuivant OT la ſurface horiſontale GK, ou l'horiſon qui la ſoutient, comme l'hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG eſt à ſa baſe horiſontale GK.

2°. L'on aura pareillement O. Y :: HG. KH. c'eſt-à-dire, que la même preſſion (O) de la ſurface SV ſuivant ſa perpendiculaire AD ou Oβ, eſt auſſi toûjours à la preſſion ou pulſion (Y) de la ſurface verticale HK ſuivant ſa perpendiculaire OY, ou à ce qui la ſoûtient contre cet effort horiſontal, comme la même hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG eſt à ſa hauteur HK.

3°. L'on aura enfin T. Y :: GK. KH. c'eſt-à-dire, que la preſſion ou la pulſion (T) de la ſurface horiſontale GK ou de l'horiſon qui la ſoûtient, ſuivant ſa perpendiculaire OT, eſt toûjours à la preſſion ou pulſion (Y) de la ſurface verticale HK ſuivant ſa perpendiculaire OY, ou de ce qui la ſoûtient contre cet effort horiſontal, comme la baſe horiſontale GK du même triangle rectangle HKG eſt à ſa hauteur verticale HK.

COROLLAIRE II.

De-là & des part. 1. 2. du Th. 26. qui font voir que la puiſſance R & le poids EOF en équilibre (*Hyp.*) entr'eux ſur la ſurface SV, ſont toûjours à la charge ou à la preſſion (O) réſultante de leur concours d'action ſur cette ſurface ſuivant ſa perpendiculaire AD ou Oβ, comme les côtez AB, AC, pris ſur leurs directions, ſont chacun à la diagonale AD du parallelogramme BACD; l'on aura, les noms précedens demeurant toûjours les mêmes, & quelles que ſoient les directions de la puiſſance R & du poids EOF,

1°. L'on aura (dis-je) R. O:: AB. AD. Et (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) O. T:: HG. GK. Donc (en multipliant par ordre) R. T:: AB×HG. AD×GK. c'eſt-à-dire, que la puiſſance R eſt toûjours à la force (T), dont elle & le poids EOF preſſent enſemble perpendiculairement la ſurface horiſontale GK ou l'horiſon qui la ſoutient, en rai-

ſon compoſée de celle du côté AB du parallélogramme BACD à ſa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG à ſa baſe horiſontale GK.

2°. L'on aura auſſi EOF. O:: AC. AD. Et encore (*Corol.* 1. *nomb.* 1.) O. T:: HG. GK. Donc (en multipliant par ordre) EOF. T:: AC×HG. AD×GK. c'eſt-à-dire, que le poids EOF eſt toûjours à la force (T), dont lui & la puiſſance R preſſent enſemble perpendiculairement la ſurface horiſontale GK ou l'horiſon qui la ſoûtient, en raiſon compoſée de celle du côté AC du parallelogramme BACD à ſa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG à ſa baſe horiſontale GK.

3°. L'on aura pareillement R. O:: AB. AD. Et (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) O. Y:: HG. HK. Donc (en multipliant par ordre) R. Y:: AB×HG. AD×HK. c'eſt-à-dire, que la puiſſance R eſt toûjours à la force (Y), dont elle & le poids EOF preſſent ou pouſſent enſemble perpendiculairement ſa ſurface verticale HK ou ce qui la ſoûtient, en raiſon compoſée de celle du côté AB du parallelogramme BACD à ſa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG à ſa hauteur verticale HK.

4°. L'on aura enfin EOF. O:: AC. AD. Et (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) O. Y:: HG. HK. Donc (en multipliant par ordre) EOF. Y:: AC×HG. AD×HK. c'eſt-à-dire, que le poids EOF ou ſa peſanteur eſt toûjours à la force (Y), dont lui & la puiſſance R preſſent enſemble perpendiculairement la ſurface verticale HG ou ce qui la ſoûtient, en raiſon compoſée de celle du côté AC du parallelogramme BACD à ſa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG à ſa hauteur verticale HK.

COROLLAIRE III.

Si preſentement on ſuppoſe à l'ordinaire que la dire-

ction AC du poids EOF ſoit parallele à la hauteur verticale HK du triangle rectangle HKG : cette hypotheſe & celle des angles K, M, des triangles HKG, DMA, ſuppoſez droits, rendant enſemble ces deux triangles ſemblables entr'eux ; le preſent Th. 28. qui donne en general les charges O, T, Y, des trois ſurfaces SV, GK, KH, en raiſon des trois côtez HG, GK, KH, du triangle rectangle HGK, donnera ici ces trois charges (perpendiculaires à ces trois ſurfaces, chacune à chacune) entre-elles en raiſon des trois côtez AD, AM, MD, du triangle DMA ; c'eſt-à-dire, que,

I. L'on aura ici O. T :: AD. AM. Or (*Th.* 26. *part.* 1.) R. O :: AB. AD. Et EOF. O :: AC. AD. Donc en raiſon ordonnée,

1°. L'on aura ici R. T :: AB. AM. c'eſt-à-dire, que la puiſſance R ſera ici à l'effort commun (T), dont elle & le poids EOF preſſent enſemble perpendiculairement la ſurface horiſontale GK, en raiſon de AB à AM.

2°. L'on aura pareillement ici EOF. T :: AC. AM. c'eſt-à-dire, que le poids EOF ſera ici à cet effort commun de lui & de la puiſſance R ſur cette ſurface horiſontale GK, en raiſon de AC à AM,

II. L'on aura de plus ici O. Y :: AD. MD. Or (*Th.* 26. *part.* 1.) R. O :: AB. AD. Et EOF. O :: AO. AD. Donc auſſi, en raiſon ordonnée,

1°. L'on aura ici R. Y :: AB. MD. c'eſt-à-dire, que la puiſſance R ſera à l'effort commun (Y), dont elle & le poids EOF preſſent enſemble perpendiculairement la ſurface verticale HK, en raiſon de AB à MD.

2°. L'on aura pareillement ici EOF. Y :: AC. MD. c'eſt-à-dire, que le poids EOF ou ſa peſanteur, ſera ici à cet effort commun de lui & de la puiſſance R ſur cette ſurface verticale AK, en raiſon de AC à AD.

COROLLAIRE IV.

Donc (*Corol.* 3.) dans cette hypotheſe de AC parallele à HK, ces cinq choſes : la puiſſance R, le poids EOF, ou

ſa peſanteur, & les charges O, T, Y, réſultantes du concours d'action de cette puiſſance & de ce poids ſur les trois ſurfaces SV, GK, KH : ces cinq choſes (dis-je) ſont toûjours entr'elles en raiſon des cinq lignes AB, AC, AD, AM, MD.

COROLLAIRE V.

FIG. 222. Donc auſſi (*Corol.* 3. 4.) en ſuppoſant de plus la direction AR de la puiſſance R, parallele à GK, & conſequemment perpendiculaire à AC: cette hypotheſe ajoûtée à la précedente de AC parallele à HK, faiſant tomber C en M, comme dans la Fig. 222. & rendant ainſi AC=AM, MD=CD=AB; les charges T, Y, des ſurfaces GK, HK, ſe trouveront ici égales à la peſanteur du poids EOF, & à la puiſſance R, chacune à chacune; ſçavoir, T=EOF, & Y=R.

COROLLAIRE VI.

FIG. 221. La direction AC du poids EOF demeurant toûjours parallele à HK, ſi l'on ſuppoſe preſentement que la direction AR de la puiſſance R ſoit parallele à HG, par exemple, dans la Fig. 221. Cette double hypotheſe jointe à celle de DM perpendiculaire ſur AC, rendant les trois triangles ADC, AMD, DMC, rectangles ſemblables entr'eux; l'on aura ici CD. DM :: AC. AD :: AD. AM. Donc le parallelogramme BACD ayant AB=CD, l'on aura pareillement ici (*Cor.* 4.) R. Y :: EOF. O :: O. T. c'eſt-à-dire, que la puiſſance R ſera ici à la charge (Y) du plan vertical HK en même raiſon que la peſanteur du poids EOF à la charge O de la ſurface SV, & que cette charge (O) à celle T de la ſurface horiſontale GK.

THEOREME XXIX.

FIG. 223. 224. 225. 226. *Soient deux ſurfaces fixes quelconques SV, XY (droites ou courbes, il n'importe) entre leſquelles le poids qu'on y veut*

mettre, ne puiſſe paſſer, ni s'appuyer ſur ou contre quelqu'autre choſe que ce ſoit.

I. *Aucun poids EOQF ne peut demeurer en repos entre ces deux ſurfaces SV, XY, à moins qu'il ne ſoit de figure & de poſition telles que la direction quelconque LC de ſa peſanteur ait quelque point A (dans ou hors l'étendue de ce poids, il n'importe) duquel on puiſſe mener à ces deux ſurfaces autant de perpendiculaires, une ſur chacune par les baſes (Déf. 25.) que ces ſurfaces touchent de ce poids.* FIG. 223. 224. 225.

II. *Au contraire lorſque de quelque point A de la direction quelconque LC de la peſanteur d'un poids auſſi quelconque EOFQ, l'on peut mener deux perpendiculaires AO, AQ, aux ſurfaces SV, XY, par les baſes de ce poids, une ſur chacune; ce poids demeurera toûjours en repos entre ces deux ſurfaces, ſoûtenu par elles ſeules.* FIG. 223. 224. 225. 226.

III. *En ce cas de repos du poids EOQF entre deux ſurfaces SV, XY, ſoûtenu par elles ſeules, ſi ſur une diagonale quelconque AC priſe de A vers C ſur la direction LC de la peſanteur de ce poids, l'on fait un parallelogramme ABCD, qui ait ſes côtez AD, AB, ſur les perpendiculaires AO, AQ, à ces ſurfaces SV, XY, par les baſes de ce même poids; ce poids EOQF ſera toûjours à chacune des charges ou des reſiſtances de ces ſurfaces SV, XY, comme la diagonale AC de ce parallelogramme ABCD ſera à chacun de ſes côtez AD, AB, correſpondans ſur les perpendiculaires AO, AQ, à ces ſurfaces.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Il eſt viſible que de tous les points, par exemple, O de la baſe où le poids EOQF touche la ſurface SV, l'on peut mener autant de perpendiculaires OP à cette ſurface SV, leſquelles rencontrent en pluſieurs autres points A la direction LC de la peſanteur de ce poids: je dis donc que ſi de tous ces points A il n'y en a aucun duquel on puiſſe mener une perpendiculaire à la ſurface XY par l'autre baſe de ce poids, il ne pourra demeurer en repos ſur ces deux ſurfaces. FIG. 223. 224. 225.

Car quelque puiſſance P qu'on imagine appliquée à ce poids EOQF au bout de la corde FP, dirigée ſuivant celle qu'on voudra de ces perpendiculaires OR à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce poids, pour le ſoûtenir ſur la ſurface XY à la place de cette autre ſurface SV, quelle que ſoit auſſi la direction de la force réſultante du concours d'action de cette puiſſance P, & de la peſanteur du poids EOQF : cette direction, qui doit toûjours (*Lem.* 2. 3.) paſſer par A, ne pourra jamais être perpendiculaire à la ſurface XY par la baſe qu'elle touche de ce poids, ſi l'on ne lui en peut mener aucune du point A. Donc en ce cas la puiſſance P, quelle qu'elle ſoit, dirigée ſuivant celle qu'on voudra des perpendiculaires OP à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce poids EOQF, ou même ſeulement dirigée à volonté par celui qu'on voudra des points A, où ces perpendiculaires OP rencontrent la direction LC de la peſanteur de ce poids : en ce cas (dis-je) la puiſſance P ne pourra jamais (*Th.* 25. *Cor.* 1.) ſoutenir ce poids EOQF ſur la ſurface XY. Donc auſſi la ſurface SV, de qui la réſiſtance eſt (*Lem.* 3. *Cor.* 8. 9.) ſuivant ces mêmes directions perpendiculaires OP, & qui par-là ne peut ici (*ax.* 2.) que ſuppléer la puiſſance P, ne pourra jamais ſoûtenir le poids EOQF ſur la ſurface XY, ſi d'aucun des points A ou ces perpendiculaires OP rencontrent la direction LC de la peſanteur de ce poids, on ne peut mener aucune perpendiculaire à la ſurface XY par la baſe qu'elle touche de ce même poids.

On démontrera de même que cette ſurface XY ne pourra jamais ſoûtenir le poids EOQF ſur la ſurface SV, ſi d'aucun des points A ou la direction LC de la peſanteur de ce poids eſt rencontrée par les perpendiculaires QR à cette ſurface XY, menée des points où elle touche ce même poids, l'on n'en peut mener aucune à la ſurface SV par l'autre baſe qu'elle touche de ce poids EOQF. Pour le voir on y employera une puiſſance quelconque R au bout d'une corde ER, appliquée à ce même poids ſuivant celle qu'on voudra de ces perpendiculaires QR à XY,

XY, comme l'on en vient d'employer une quelconque P appliquée à ce même poids ſuivant une des perpendiculaires OP à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce même poids EOQF: un raiſonnement ſemblable à celui qui vient de faire voir qu'aucune puiſſance P dirigée ſuivant celle qu'on voudra des perpendiculaires OP à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche du poids EOQF, ne peut ſoûtenir ce poids ſur la ſurface XY tant que du point A où cette direction OP rencontre celle LC de la peſanteur de ce poids, on ne pourra mener aucune perpendiculaire à cette ſurface XY par la baſe qu'elle touche de ce même poids, fera voir de même qu'aucune puiſſance R dirigée ſuivant celle qu'on voudra des perpendiculaires QR à cette ſurface XT par la baſe qu'elle touche de ce poids EOQF, ne pourra jamais le ſoûtenir ſur la ſurface SV tant que du point A où cette direction QR rencontre celle LC de la peſanteur de ce poids, on ne pourra mener aucune perpendiculaire à cette ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce poids EOQF; & que par conſequent alors la ſurface XY, reſtituée à la place de la puiſſance R qui la ſuppléeroit, ne pourra ſoûtenir ce poids ſur l'autre ſurface SV par la même raiſon qui vient de faire voir que cette autre ſurface SV reſtituée à la place de la puiſſance P qui la ſuppléoit, ne pourra jamais en pareilles circonſtances ſoûtenir le même poids quelconque EOQF ſur la ſurface XY.

Donc ce poids quelconque, ni par conſequent aucun poids ne peut demeurer en repos entre deux ſurfaces quelconques SV, XY, deſquelles ſeules il ſoit ſoûtenu, tant qu'il ne ſera ni de figure, ni de poſition telles qu'il ait quelque point A de la direction quelconque LC de ſa peſanteur, duquel on puiſſe mener deux perpendiculaires à ces deux ſurfaces, une ſur chacune, par les baſes qu'elles touchent de ce poids quelconque EOQF. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Au contraire ſi de quelque point A de la direction quelconque LC de la peſanteur d'un poids auſſi FIG. 223. 224. 225. 226.

quelconque EOQF, l'on peut mener deux perpendiculaires AO, AQ, aux deux ſurfaces fixes quelconques SV, XY, entre leſquelles il ſe trouve, par les baſes qu'elles touchent de ce poids; il y demeurera toûjours en repos ſoûtenu par elles ſeules.

Car la peſanteur de ce poids EOQF, ou ſon effort (*Hyp.*) ſuivant la diagonale AC du parallelogramme ABCD, étant le même (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) que s'il réſultoit du concours de deux autres efforts ſuivant les côtez AD, AB, de ce parallelogramme, à chacun deſquels efforts celui-là, ou la peſanteur du poids EOQF fut comme cette diagonale AC à chacun de ces mêmes côtez AD, AB, du même parallelogramme ABCD; c'eſt-à-dire, le même que ſi ce corps EOQF n'avoit aucune peſanteur, & qu'il fût ſeulement pouſſé ou tiré ſuivant ces directions AD, AB, par deux forces qui fuſſent à ce qu'il a effectivement de peſanteur, comme chacun de ces côtez AD, AB, du parallelogramme ABCD, eſt à ſa diagonale AC priſe depuis A vers C ſur la direction effective LC de cette peſanteur. Or ſi chacun de ces deux côtez AD, AB, du parallelogramme ABCD, eſt perpendiculaire à chacune des ſurfaces SV, XY, en quelqu'un des points O, Q, de chacune des baſes qu'elles touchent de ce corps EOQF; chacune de ces deux ſurfaces ſoûtiendra tout entier (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) celui de ces deux efforts lateraux qui lui ſera ainſi directement oppoſé. Donc ces deux ſurfaces enſemble ſoûtiendront ainſi toute la peſanteur de ce poids EOQF. Par conſequent en ce cas de AD, AB, menées de quelque point A que ce ſoit de la direction quelconque LC de la peſanteur de ce poids auſſi quelconque, perpendiculairement à ces deux ſurfaces encore quelconques SV, XY, en des points O, Q, des baſes qu'elles touchent de ce même poids, une à chacune; ces deux ſurfaces fixes le ſoûtiendront toûjours ſeules en repos entr'elles. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. En ce cas d'équilibre ou de repos du poids quelconque EOQF entre les ſurfaces fixes quelconques

SV, XY, ſur leſquelles de quelque point A de la direction LC de ſa peſanteur, tombent (*part.* 1. 2.) les perpendiculaires AD, AB, en des points O, Q, des baſes que ces ſurfaces touchent de ce poids; ces mêmes ſurfaces SV, XY, ſoûtenant chacune (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) tout ce qu'il fait d'effort (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) ſuivant chacune de ces perpendiculaires, ſçavoir, SV en O tout ce qu'il en fait ſuivant AD, & XY en Q tout ce qu'il en fait ſuivant AB: la charge (*Déf.* 26.) ou la réſiſtance de chacune de ces deux ſurfaces doit être (*Ax.* 4. *& Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) égale à celui qu'elle ſoûtient de ces deux efforts. Or la peſanteur de ce poids EOQF dirigée (*Hyp.*) ſuivant AC, eſt (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) à chacun de ces deux efforts ſuivant AD, AB, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD eſt à chacun de ces côtez AD, AB, du même parallelogramme. Donc en ce cas d'équilibre ou de repos du poids quelconque EOQF entre les ſurfaces auſſi quelconques SV, XY, ce poids eſt auſſi toûjours à chacune des charges qui en réſulte à chacune de ces deux ſurfaces, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD eſt à chacun de ſes côtez AD, AB, perpendiculaires (*Hyp.*) à ces mêmes ſurfaces SV, XY, en O, Q, en paſſant par quelque point A de la direction LC de la peſanteur de ces poids, & par les baſes que ces deux ſurfaces touchent de ce même poids EOQF. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

Autrement. Pour démontrer encore d'une autre maniere cette part. 3. imaginons pour un moment ce poids quelconque EOQF comme ſoûtenu avec des cordes ſeulement par deux puiſſances P, R, appliquées à ce poids en F, E, ſuivant des directions DP, BR, menées de quelque point A de la direction LC de la peſanteur de ce poids perpendiculairement aux ſurfaces SV, XY, en des points O, Q, des baſes qu'elles touchent de ce même poids EOQF, ainſi que les part. 1. 2. font voir qu'il eſt toûjours poſſible de les mener en ce cas-ci de ce poids ſuppoſé ſoûtenu entre ces deux ſurfaces par elles ſeules.

Cela (dis-je) imaginé, les puiſſances P, R, ſoûtenant ainſi (*Hyp.*) les charges entieres des ſurfaces SV, XY, ſeront égales (*Ax.* 4. *& Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) à ces mêmes charges, chacune à chacune; ſçavoir, la puiſſance P égale à la charge de la ſurface SV, & la puiſſance R égale à la charge de la ſurface XY. Or en ce cas d'équilibre imaginé entre le poids EOQF, & ces deux puiſſances P, R, la part. 1. du Th. 4. fait voir que la peſanteur de ce poids ſeroit toûjours à chacune de ces puiſſances P, R, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD eſt à chacun de ſes côtez AD, AB, correſpondans ſur leurs directions. Donc auſſi dans l'équilibre ou le repos effectif de ce même poids EOQF entre les ſurfaces SV, XY, qu'on ſuppoſe ſeules le ſoutenir; la peſanteur de ce poids doit toujours être à chacune des charges qui en réſulte à chacune de ces deux ſurfaces, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD eſt à chacun de ſes côtez AD, AB, perpendiculaires (*Hyp.*) à ces ſurfaces SV, XY, par quelque point A de la direction LC de la peſanteur de ce poids EOQF, & par les baſes que ces ſurfaces touchent de ce poids. *Ce qu'il falloit encore* 3°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

FIG. 226. Les part. 1. 2. font voir dans la Fig. 226. qu'un poids ſpherique EOQF, en quelque ſituation qu'on le mette entre deux ſurfaces quelconques SV, XY, fixement inclinées à volonté, entre leſquelles il ne puiſſe paſſer, y demeurera toûjours en repos; mais qu'il n'en ſeroit pas ainſi d'aucun autre poids de toute autre figure; puiſque la Sphere eſt le ſeul corps qui dans quelque ſituation qu'on le mette entre deux ſurfaces, ait un point A dans la direction LC de ſa peſanteur, ſçavoir, ſon centre, duquel on puiſſe toûjours mener deux perpendiculaires AO, AQ, à ces deux ſurfaces SV, XY, une ſur chacune, par les points O, Q, où elles toucheroient cette Sphere. C'eſt peut-être pour cela que l'on ne met encore d'ordi-

Digitized by Google

naire que des poids ſpheriques entre des plans inclinez, s'il eſt vrai que l'on ait apperçû cette condition requiſe par la part. 1. pour l'équilibre ou le repos d'un poids entre deux ſurfaces.

COROLLAIRE II.

La part. 1. de ce Théoreme-ci, & le Corol. 8. du Lem. 3. font voir qu'aucun poids BQDEFP de direction LC perpendiculaire à un des plans HK, KN, par exemple, au plan KN, ne peut reſter appuyé ſur tous les deux, quelque ſituation qu'on lui donne. Car, Fig. 227. 228.

1°. La direction LC de la peſanteur de ce poids BQDEFP perpendiculaire (*Hyp.*) à KN, paſſe par la baſe BP que ce plan KN touche de ce même poids, comme dans la Fig. 227. le Corol. 8. du Lem. 3. fait voir que ce plan ſeul KN le ſoûtiendra tout entier, ſans que ce poids s'appuye en rien contre le plan HK, quoique la direction LC de la peſanteur de ce poids ait quelque point A duquel on puiſſe mener auſſi une perpendiculaire AO à ce plan HK. Fig. 227.

2°. Si cette direction LC de la peſanteur de ce poids BQDEFP ne paſſe par aucune des baſes de ce poids, ainſi que dans la Fig. 128. ce poids s'appuyera pour lors effectivement contre le plan HK; mais ſa direction LC perpendiculaire (*Hyp.*) au plan KN, n'aura aucun point d'où l'on en puiſſe mener une à ce plan par la baſe qu'il touche de ce poids. Donc (*part.* 1.) il ne pourra demeurer ainſi en repos entre ces deux plans, mais gliſſera du côté de N, juſqu'à ce qu'il touche le plan KN dans une baſe par laquelle ſa direction LC paſſe; & alors il s'arrêtera ſur cette baſe porté par ce ſeul plan KN, ſans s'appuyer plus du tout ſur l'autre plan HK, ainſi qu'on le vient de voir dans le nomb. 1. Fig. 228.

3°. Il ſuit du précedent nomb. 2. que ſi l'on prend BQ pour le profil d'une échelle appuyée en B ſur un plancher KN, & en Q contre un mur HK, ayant LC pour direction du poids total fait du ſien & de celui de l'homme qui y ſeroit monté; c'eſt-à-dire (*Déf.* 14.) pour la direction du Fig. 229.

centre de gravité G de ce poids total, ou du point G de toute ſon action : il ſuit, dis-je, du précedent nomb. 2. que le pied B de cette échelle BQ gliſſera toûjours vers N juſqu'à ce qu'elle ſoit arrivée toute entiere, & couchée le long du plancher KN, à moins qu'on n'en arrête ou fixe le pied B.

Pour le voir encore autrement, il eſt à conſiderer que le mur HK ne ſoûtient en Q cette échelle BQ, qu'en la repouſſant vers D ſuivant QD perpendiculaire à ce mur, comme feroit une puiſſance en D par le moyen d'une corde QD attachée en Q à cette échelle BQ ſuivant cette direction perpendiculaire au mur HK, laquelle rencontre en L la direction LC de tout le poids fait de celui de cette échelle & de celui de l'homme dont elle eſt chargée. Or il eſt manifeſte (*Ax.* 4. *&* *Lem.* 3. *part.* 4.) que du concours d'action de ce poids total, & de la puiſſance D, qui exprime la réſiſtance du mur en Q, il en réſulteroit à cette échelle BQ une impreſſion ſuivant LB oblique au plancher KN. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 7.) cette échelle gliſſeroit alors vers N, & toûjours de même juſqu'à ce qu'elle fût arrivée toute entiere & couchée ſur le plancher KN, à moins qu'elle ne fût arrêtée en B par un appui dont la charge ſeroit (*Th.* 21. *part.* 3. 4.) à la puiſſance D, ou (*Hyp.*) à la réſiſtance en Q du mur HK, & au poids total fait de celui de l'échelle & de celui de l'homme qui la charge, comme la diagonale LB du parallelogramme BCLD ſeroit à ſes côtez LD, LC.

Ce qu'on voit démontré dans ce nomb. 3. *M. Wallis paroît l'avoir apprehendé dans le Schol. de la prop.* 8. *part.* 3. *de ſa Mécanique, en arrêtant fixement le pied d'une échelle appuyée contre un mur, en arrêtant auſſi de même le bout d'un Levier chargé d'un poids vers ſon milieu, & appuyé obliquement par ce bout ſur un plan horiſontal, & par l'autre contre un appui plus élevé : ſans cela, dit-il,* vectis extremum B (*c'eſt le bout d'en bas*) in horiſontali rectà labetur. *On verra dans le Scholie ſuivant pourquoi l'experience fait cependant ſouvent voir le contraire de cela, & conſequemment auſſi le contraire des précedens nomb.* 2. 3.

COROLLAIRE III.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans la part. 3. cette partie fait voir qu'en cas d'équilibre ou de repos du poids EOQF entre les ſurfaces SV, XY, ce poids eſt à chacune de leurs charges réſultantes de la ſeule action de la peſanteur de ce poids en cet état ſur elles, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD eſt à chacun de ſes côtez AD, AB, qui (*part.* 2.) ſont perpendiculaires à ces ſurfaces en O, Q, c'eſt-à-dire (le parallelogramme ABCD rendant AB=CD) comme le côté AC du triangle ADC eſt à chacun de ſes deux autres côtez AD, CD, ou (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le ſinus de l'angle ADC eſt à chacun des ſinus des angles ACD ou CAB, & DAC. Or (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) le ſinus de l'angle ADC eſt égal au ſinus de l'angle DAB. Donc en ce cas d'équilibre la peſanteur du poids EOQF eſt à chacune des charges ou des réſiſtances des ſurfaces SV, XY, comme le ſinus de l'angle DAB compris entre les perpendiculaires AD, AB, à ces ſurfaces en O, Q, eſt à chacun des ſinus des angles DAC, BAC, que ces perpendiculaires reciproquement priſes font avec la direction LC de la peſanteur de ce poids EOQF. FIG. 223. 224. 225. 226.

La ſeconde démonſtration de la part. 3. donne encore la même choſe par le moyen du Corol. 4. du Th. 1. parce que les charges ou les réſiſtances des ſurfaces SV, XY, y ſont égales aux puiſſances P, R, qui en la place de ces ſurfaces ſoûtiendront le poids EOQF ſeulement avec des cordes FP, ER, dirigées ſuivant les perpendiculaires PO, RQ, à ces ſurfaces; & qu'en ce cas le Cor. 4. du Th. 1. fait voir que ce poids EOQF eſt à chacune de ces puiſſances comme le ſinus de l'angle PAR eſt à chacun des ſinus des angles RAL, PAL, c'eſt-à-dire (les angles oppoſez au ſommet étant égaux entr'eux) comme le ſinus de l'angle DAB eſt à chacun des ſinus des angles BAC, DAC. Donc en ce cas d'équilibre ou de repos du poids EOQF entre les ſurfaces SV, XY, la peſanteur de ce poids eſt

encore toûjours à chacune de leurs charges ou réſiſtances comme le ſinus de l'angle DAB eſt à chacun des ſinus des angles BAC, DAC.

COROLLAIRE IV.

Toutes choſes demeurant les mêmes, ſi de quelque point M du plan touchant MG de la ſurface XY en Q, l'on imagine MT perpendiculaire en Z à la direction LC de la peſanteur du poids EOQF, & qui rencontre en T l'autre plan touchant HG de la ſurface SV en O; les triangles AO*h*, TZ*h*, rectangles (*Hyp.*) en O, Z, ayant l'angle Z*h*T commun, auront l'angle OA*h*=ZT*h*; de même les triangles AQ*m*, MZ*m*, ayant l'angle Z*m*M commun, auront auſſi l'angle QA*m*=ZM*m*: de ſorte que l'on aura ici les angles MTG=DAC, TMG=CAB =ACD; & ainſi les triangles TMG, ADC, ſeront ici ſemblables entr'eux. Or on vient de voir dans le Corol. 3. que le poids EOQF ou ſa peſanteur eſt ici à chacune des ſurfaces SV, XY, comme le côté AC du triangle ADC eſt à chacun de ſes deux autres côtez AD, DC. Donc ce poids EOQF eſt auſſi à chacune des charges des ſurfaces SV, XY, comme le côté MT du triangle TGM eſt à chacun de ſes deux autres côtez TG, MG, qui touchent ces ſurfaces en O, Q, quelles que ſoient ces mêmes ſurfaces, leurs inclinaiſons, & la direction LC de la peſanteur du poids EOQF.

COROLLAIRE V.

Si preſentement on ſuppoſe à l'ordinaire que la direction LC de ce poids EOQF ſoit perpendiculaire à la ligne NK des baſes des ſurfaces SV, XY, ou de leurs plans touchans GH, MG, en O, Q; & conſequemment que MT ſoit parallele à cette horiſontale NK: cette hypotheſe rendra les angles HGK=MTG, MGN=TMG. Or le précedent Corol. 4. fait voir que le poids EOQF eſt ici à chacune des charges des ſurfaces SV, XY, comme le côté MT du triangle MGT eſt à chacun de ſes deux autres

tres côtez TG, MG, touchans en O, Q, de ces mêmes ſurfaces ; & conſequemment auſſi (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le ſinus de l'angle MGT ou MGH eſt à chacun des ſinus des angles TMG, MTG. Donc ce même poids EOQF ou ſa peſanteur eſt pareillement à chacune de ces charges des ſurfaces SV, XY, comme le ſinus de l'angle MGH compris entre leurs plans touchans HG, MG, en O, Q, eſt à chacun des ſinus des angles MGN, HGK, d'inclinaiſons de ces plans, réciproquement pris, quelles que ſoient ces inclinaiſons MGN, HGK, & quelqu'angle MGH que ces deux plans faſſent entr'eux.

COROLLAIRE VI.

Si outre ce que deſſus (*Corol.* 5.) on ſuppoſe que cet angle MGH ſoit droit, de même que le ſont (*Hyp.*) les angles en K, N, cette double hypotheſe rendant les triangles HGK, GNM, ſemblables chacun au triangle MGT, le Corol. 4, donnera encore pour ce cas-ci le poids EOQF à chacune des charges des ſurfaces SV, XY, comme l'hypotenuſe HG du triangle rectangle HKG eſt à ſa baſe GK & à ſa hauteur KH ; & auſſi comme l'hypotenuſe MG du triangle rectangle GNM eſt à ſa hauteur MN & à ſa baſe NG.

COROLLAIRE VII.

Quant à la comparaiſon entr'elles des charges ou (*Déf.* 27.) des réſiſtances en O, Q, des ſurfaces quelconques SV, XY, fixement inclinées à volonté, entre leſquelles un poids auſſi quelconque EOQF de telle direction LC qu'on voudra, eſt ſoutenu en équilibre ou en repos ; il ſuit preſentement de la part. 3. & des Corol. 3. 4. 5. 6. qui en réſultent, la conſtruction & les hypotheſes demeurant les mêmes ici que là, il ſuit, dis-je,

1°. De la part. 3. en general, que la charge de la ſurface SV eſt toujours à la charge de la ſurface XY, comme le côté AD du parallelogramme ABCD eſt à ſon autre côté AB, ou (à cauſe que ce parallelogramme rend DC=AB, &

AD=BC) comme le côté AD du triangle ADC eſt à ſon côté DC, ou bien auſſi comme le côté BC du triangle ABC eſt à ſon côté AB.

2°. Du Corol. 3. encore en general que la charge de la ſurface SV eſt toûjours auſſi à la charge de la ſurface XY, comme le ſinus de l'angle BAC eſt au ſinus de l'angle DAC, c'eſt-à-dire, en raiſon réciproque des ſinus des angles DAC, BAC, que les perpendiculaires AO, AQ, à ces ſurfaces SV, XY, font avec la direction AC de la peſanteur du poids EOQF, qu'elles ſoûtiennent entre-elles.

3°. Du Corol. 4. en ſuppoſant MT perpendiculaire à LC, & le reſte en general, il ſuit que la charge de la ſurface SV eſt toûjours à la charge de la ſurface XY, comme le côté TG du triangle MGT eſt à ſon côté MT, c'eſt-à-dire, en raiſon des côtez de ce triangle, qui touchent ces ſurfaces SV, XY, aux points O, Q, où tombent perpendiculairement ſur elles du point A de LC, & par les baſes qu'elles touchent du poids EOQF qu'elles ſoûtiennent, les perpendiculaires AO, BQ.

4°. Du Corol. 5. en ſuppoſant de plus la direction LC de la peſanteur de ce poids EOQF, perpendiculaire à la ligne NK des baſes des ſurfaces SV, XY; il ſuit que la charge de la premiere SV de ces deux ſurfaces eſt à la charge de la ſeconde XY, comme le ſinus de l'angle MGN eſt au ſinus de l'angle HGK, c'eſt-à-dire, en raiſon réciproque des ſinus des angles HGK, MGN, d'inclinaiſon des plans AG, MG, touchans de ces ſurfaces en O, Q.

5°. Du Cor. 6. en ſuppoſant de plus que l'angle HGM compris entre ces plans, eſt droit; il ſuit que la charge de la ſurface SV eſt à la charge de la ſurface XY, comme la baſe GK du plan HG eſt à ſa hauteur HK, & auſſi comme la hauteur MN du plan MG eſt à ſa baſe NG.

6°. Donc ſi de plus ces plans en angle droit HGM étoient également inclinez, c'eſt-à-dire, de 45 degrez chacun ſur leurs baſes horiſontales; la baſe de chacun de ces deux plans ſe trouvant alors égale à ſa hauteur,

Digitized by Google

les charges des ſurfaces SV, XY, ſeroient auſſi pour lors égales entr'elles.

COROLLAIRE VIII.

Il ſuit encore en general de la part. 3. & des Corol. 3. 5. qui en réſultent, qu'en cas d'équilibre ou de repos d'un poids quelconque EOQF de telle direction LC qu'on voudra, ſoûtenu entre deux ſurfaces auſſi quelconques SV, XY, fixement inclinées à volonté, & par elles ſeules; la ſomme des charges de ces deux ſurfaces, réſultantes de la peſanteur de ce poids, eſt toûjours plus grande que cette peſanteur. Car la part. 3. fait voir que cette ſomme de charges des ſurfaces SV, XY, eſt toûjours à cette peſanteur du poids EOQF, dont elles réſultent, comme la ſomme des côtez AD, AB, du parallelogramme ABDC eſt à ſa diagonale AC, c'eſt-à-dire (à cauſe de DC=AB) comme la ſomme des côtez AD, DC, du triangle ADC eſt à ſon troiſiéme côté AC, ainſi qu'on l'a vû dans le Corol. 3. Et en ſuppoſant MT perpendiculaire à la direction quelconque LC de la peſanteur du poids EOQF, le Corol. 4. fait auſſi voir que cette ſomme de charges des ſurfaces SV, XY, eſt toûjours pareillement à la peſanteur de ce poids, comme la ſomme des côtez GT, GM, du triangle MGT eſt à ſon troiſiéme côté MT. Or on ſçait que la ſomme de deux côtez quelconques d'un triangle eſt toûjours plus grande que ſon troiſiéme côté. Donc auſſi la ſomme des charges de deux ſurfaces quelconques SV, XY, qui ſeules ſoûtiennent entr'elles un poids quelconque EOQF de direction LC à volonté, eſt toûjours plus grande que la peſanteur de ce poids.

Voilà en general pour toutes ſortes de poids, de figures & de directions quelconques, ſoûtenus entre deux ſurfaces quelconques fixement inclinées à volonté, & qui le ſoûtiennent ſeules. Voici preſentement pour les ſeuls poids ſpheriques.

COROLLAIRE IX.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le Cor. 5. Fig. 116.

ſi des points O, Q, d'attouchement de la Sphere EFQO par les ſurfaces quelconques SV, XY, ou par leurs plans touchans HG, MG, en ces points O, Q, l'on mene O*k*, Q*n*, perpendiculaires en *k*, *n*, à l'horiſontale NK; les charges de ces ſurfaces SV, XY, ſeront entr'elles en raiſon réciproque de ces perpendiculaires ou hauteurs O*k*, Q*n*. Car les touchantes GO, GQ de cette Sphere EFQO étant égales entr'elles, ſi l'on en prend une pour le ſinus total, l'on aura O*k* pour le ſinus de l'angle HGK, & Q*n* pour le ſinus de l'angle MGN. Or (*Corol.* 7. *nomb.* 4.) la charge de la ſurface SV eſt ici à la charge de la ſurface XY, comme le ſinus de l'angle MGN eſt au ſinus de l'angle HGK. Donc la premiere de ces deux charges ſera pareillement ici à la ſeconde comme Q*n* eſt à O*k*; c'eſt-à-dire, en raiſon réciproque des hauteurs des plans OG, QG, s'ils n'avoient que ces longueurs égales.

COROLLAIRE X.

Fig. 230. Ce qu'on voit de la Fig. 226. dans la Fig. 230. étant le même que dans celle-là, ſoit de plus dans celle-ci la droite OQ rencontrée en ϖ par la direction A*h* de la peſanteur de la Sphere EFQO, ſuppoſée perpendiculaire en Φ à NK: il ſuit du précedent Corol. 9. que la charge de la ſurface SV eſt pareillement ici à la charge de la ſurface XY :: Qϖ. Oϖ :: *n*Φ. *k*Φ.

Pour le voir, ſoient imaginées des points d'attouchement O, Q, les droites Oμ, Qλ, perpendiculaires en μ, λ, ſur A*h*. Cela fait, les triangles ſemblables aiſez ici à reconnoître, & les égalitez OG=QG, AO=AQ, réſultantes de la nature de la Sphere EFQO, y donneront Q*n*. QG :: λ*m*. Q*m* :: Qλ. AQ :: Qλ. AO. Et QG. O*k* :: OG. O*k* :: O*h*. *k*μ :: AO. Oμ. Donc (en raiſon ordonnée) Q*n*. O*k* :: Qλ. Oμ :: Qϖ. Oϖ. Or on vient de voir dans le Corol. 9. que la charge de la ſurface SV eſt ici à la charge de la ſurface XY :: Q*n*. O*k*. Donc la premiere de ces deux charges eſt pareillement ici à la ſeconde :: Qϖ. Oπ :: Qλ. Oμ :: *n*Φ. *k*Φ. *Ce qu'il falloit faire voir.*

COROLLAIRE XI.

Il ſuit encore du Corol. 9. que les charges des ſurfaces SV, XY, ſont ici entr'elles en raiſon renverſée ou réciproque des puiſſances qu'il faudroit pour ſoûtenir chacune ſeule le poids ſpherique FEQO ſur chacun de leurs points O, Q, ſuivant une direction parallele à chacun de leurs plans HG, MG, touchans en ces points. Car ſi l'on appelle M la puiſſance qui ſoûtiendroit ainſi ſeule ce poids EFQO ſur le point Q de la ſurface XY; & H, celle qui le ſoutiendroit de même ſeule ſur le point O de de la ſurface SV; & enfin A, la peſanteur de ce poids ſpherique EFQO: le Théoreme 28. pour un ſeul plan donnera M. A :: MN. MG :: Q*n*. QG (à cauſe de QG = OG) :: Q*n*. OG. Et A. H :: HG. HK :: OG. O*k*. Donc (en raiſon ordonnée) l'on aura ici M. H :: Q*n*. O*k*. Par conſequent (*Corol.* 9.) la puiſſance (M), qui dirigée parallelement à MG, ſoûtiendroit ſeule le poids ſpherique EFQO ſur le point Q de la ſurface XY, ſeroit à la puiſſance (H) qui dirigée ſuivant HG, ſoutiendroit de même ſeule ce poids ſur le point O de la ſurface SV, comme la charge de cette ſurface SV eſt à la charge de l'autre ſurface XY, lorſque ces deux ſurfaces SV, XY, ſoûtiennent enſemble ce poids ſpherique EFQO ſur leurs points O, Q, quelqu'angle HGM que faſſent entr'eux les plans HG, MG, qui touchent (*Hyp.*) ces ſurfaces en ces points O, Q.

COROLLAIRE XII.

Cela n'eſt pas ſeulement vrai des poids ſpheriques de directions AC perpendiculaires à la droite NK; mais encore de toutes ſortes de poids de figures & de directions AC quelconques, ſoûtenus entre des ſurfaces fixes quelconques par ces ſurfaces ſeules. Pour le voir, ce qu'il y a des Fig. 223. 224. 225. 226. dans les Fig. 231. 232. demeurant ici le même que là, ſoient de plus du point C de celles-ci les droites Cλ, Cμ, perpendiculaires en FIG. 231. 232.

λ, μ, ſur les côtez AB, AD, du parallelogramme ABCD, prolongez, s'il en eſt beſoin.

Cela étant, & les angles de ce parallelogramme oppoſez en B, D, étant égaux entr'eux; les triangles rectangles CλB, CμD, ſeront ſemblables entr'eux; & par conſequent Cλ. Cμ:: CB. CD :: AD. AB. Or ſi l'on prend encore (ainſi que dans le précedent Corol. 11.) A pour la peſanteur du poids EOQF, & M, H, pour les puiſſances, dont chacune dirigée parallelement à chacun des plans GM, GH, ſoûtiendroit ſeule ſur lui le poids EOQF; la part. 1. du Th. 25. donnera M. A:: Cλ. AC. Et A. H :: AC. Cμ. de ſorte qu'en raiſon ordonnée, l'on aura ici M. H:: Cλ. Cμ. Donc auſſi M. H :: AD. AB. c'eſt-à-dire, en general (*part.* 3.) que la puiſſance (M), qui dirigée parallelement à MG, ſoûtiendroit ſeule le poids EOQF ſur le point Q de la ſurface XY, ſeroit à la puiſſance (H), qui dirigée parallelement à HG, ſoûtiendroit de même ſeule le même poids ſur le point O de la ſurface SV, comme la charge de cette ſeconde ſurface SV eſt à celle de la premiere XY, lorſque ces deux ſurfaces ſoûtiennent enſemble ce poids EOQF.

COROLLAIRE XIII.

Fig. 231, 232. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent Corol. 12. on a vû dans le Corol. 61. du Th. 26. que la ſomme M—+H des puiſſances M, H, qui dirigée chacune à chacun des plans MG, HG, ſoûtiendroient chacune ſeule le poids EOQF ſur chacun de ces plans: on a vû, dis-je, dans ce Corol. 61. du Th. 26. que cette ſomme M—+H de puiſſances; peut être tantôt égale, tantôt plus grande, & tantôt moindre que la peſanteur A de ce poids EOQF. D'un autre côté le précedent Corol. 8. fait voir auſſi que ce poids eſt toûjours moindre que la ſomme O—+Q des charges O, Q, qui en réſultent ſur les ſurfaces SV, XY, lorſqu'elles ſeules le ſoûtiennent enſemble comme ici. D'où l'on voit déja que cette ſom-

Digitized by Google

me O+Q des charges de ces ſurfaces SV, XY, peut être plus grande que la ſomme M+H des puiſſances M, H.

Je dis preſentement que cette ſomme O+Q de charges des ſurfaces SV, XY, ne peut jamais être moindre que la ſomme M+H des puiſſances M, H; mais qu'elle lui eſt égale, lorſque l'angle MGH eſt droit, & toûjours plus grande tant qu'il ne l'eſt pas.

Pour le voir, il n'y a qu'à conſiderer que puiſque (*Corol.* 12.) M. H :: Cλ. Cμ. l'on aura (en compoſant) M. M+H :: Cλ. Cλ+Cμ. Or (*Th.* 26. *part.* 1.) A. M :: AC. Cλ. Donc (en raiſon ordonnée) A. M+H :: AC. Cλ+Cμ. Or auſſi en compoſant (*part.* 3.) O+Q. A :: AD+AB. AC. Donc (en raiſon ordonnée) O+Q. M+H :: AD+AB. Cλ+Cμ. Or, à cauſe des angles ABC, ADC, toûjours égaux chacun à l'angle MGH, les lignes Cλ, Cμ, perpendiculaires (*Hyp.*) aux côtez AB, AD, du parallelogramme ABCD, donnent CB ou AD=Cλ, CD ou AB=Cμ, lorſque l'angle MGH eſt droit; & conſequemment alors AD+AB=Cλ+Cμ: au contraire ces perpendiculaires Cλ, Cμ, aux côtez AB, AD, du parallelogramme ABCD donnent toûjours CB ou AD > Cλ, CD ou AB > Cμ, tant que cet angle MGH n'eſt pas droit; & conſequemment alors AD+AB > Cλ+Cμ. Donc auſſi O+Q=M+H, lorſque ce même angle MGH eſt droit, & toûjours O+Q > M+H, tant qu'il ne l'eſt pas. *Ce qu'il falloit ici faire voir.*

Voyez ici la prop. 30. *pag.* 78. *de Vitalis Jordanus.*

COROLLAIRE XIV.

Puiſque (*part.* 1. 2.) un poids ne peut demeurer en repos entre deux ſurfaces, qui ſeules le ſoûtiennent enſemble, à moins que dans la direction de ſa peſanteur il n'y ait quelque point, duquel on puiſſe mener deux perpendiculaires à ces deux ſurfaces, une à chacune, par les baſes qu'elles touchent de ce poids; & que ne pouvant s'échapper d'entre ces deux ſurfaces, elles ne laiſſent pourtant

pas de l'y retenir en repos, quelles qu'elles ſoient, & de quelque figure que ce poids ſoit auſſi : il réſulte de ces part. 1. 2. du preſent Th. 29. qu'en ce cas-ci ce poids quelconque y prend toûjours une ſituation (ſi on ne la lui donne, dans laquelle la direction de ſa peſanteur a toûjours quelque point, duquel on peut mener deux perpendiculaires à ces deux ſurfaces, une à chacune, par les baſes que ces ſurfaces touchent alors de ce poids.

SCHOLIE.

Fig. 230. On vient de voir dans le Corol. 10. Fig. 230. que dans l'hypotheſe de la direction A*h* du poids ſpherique EOQF, perpendiculaire à la baſe horiſontale NK commune aux plans MG, HG, d'inclinaiſons quelconques ; les forces ou puiſſances M, H, qu'il faudroit pour ſoûtenir chacune ſéparément ce poids ſur chacun de ces plans, ſuivant des directions paralleles chacune à chacun d'eux, ſeroient toûjours entr'elles en raiſon réciproque des parties Q☞, O☞, dans leſquelles la direction A*h* de ce poids diviſeroit la ſoûtendante QO du cercle DKVL, par les points Q, O, où il toucheroit ces deux plans MG, HG, c'eſt-à-dire, toûjours M. H :: O☞. Q☞.

Fig. 233. 234. Voici preſentement quelque choſe de ſemblable pour deux poids FQ, EO, de peſanteurs & de figures quelconques, leſquels auroient leurs directions AT, ZX, perpendiculaires à la baſe horiſontale MH commune à deux plans GM, GH, d'inclinaiſons quelconques, ſur chacun deſquels chacun de ces poids FQ, EO, ſeroit ſoûtenu par chacune des deux puiſſances égales P, R, de directions FP, ER, paralleles chacune à chacune des longueurs GM, GH, de ces deux plans. Car ſi l'on imagine un plan vertical, qui paſſant par les directions ZX, AT, des poids FQ, EO, coupe ces plans GM, GH, avec leur baſe commune MH, en des ſections qui forment le triangle MGH, dans lequel ſoit inſcrit un cercle DKVL, qui en touche les côtez ou ces ſections en K, L, D, & dont la ſoûtendante KL ſoit coupée en S par ſon diamétre DV parallele

parallele aux directions des poids ; l'on aura toûjours FQ. EO :: LS. KS.

Pour le voir, ſoient des points K, L, par le centre C du cercle DKVL, les rayons KC, LC, avec les perpendiculaires KB, LN, ſur ſon diamétre DV. Cela fait, les points d'attouchement D, K, L, rendant les angles M+DCK= KCV+DCK, & H+DCL=LCV+DCL, rendent auſſi les angles M=KCV, H=LCV ; par conſequent (en prenant ſ pour la marque des ſinus) le Corol. 2. du Lem. 8. donnant GM. GH :: ſH. ſM. l'on aura ici GM. GH :: ſLCV. ſKCV :: LN. KB :: LS. KS. Or ce cas des puiſſances égales P, R, dirigées parallelement aux plans GM, GH, & des poids FQ, EO, dirigez parallelement à la verticale VD ; le nomb. 3. du Cor. 56. du Th. 26. fait voir que FQ. EO :: GM. GH. Donc auſſi en ce cas le poids FQ eſt au poids EO :: LS. KS. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Voilà dans ce Th. 29. pour les charges réſultantes de la peſanteur d'un poids quelconque perpendiculairement ſur deux ſurfaces fixes qui le ſoûtiennent entr'elles. Voici preſentement pour les charges réſultantes de celles-là perpendiculairement auſſi ſur les plans des baſes & des hauteurs de ces ſurfaces ou de leurs plans touchans aux points de leurs charges.

THEOREME XXX.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans la part. 3. du précedent Th. 29. ſi des angles B, D, du parallelogramme ABCD l'on mene Bβ, Dδ, perpendiculaires en β, δ, ſur la diagonale AC de ce parallelogramme dans les Fig. 223. 224. 225. 226. & que l'on prenne à l'ordinaire la direction AC du poids EOQF parallele aux verticales HK, MN, c'eſt-à-dire (Hyp.) *perpendiculaire à l'horiſontale NK ;* Fig. 223. 224. 225. 226.

I. *Les charges particulieres des baſes GK, GN, ſeront entr'elles :: Aδ. Cδ.*

II. *Les charges particulieres des hauteurs ou des plans verticaux HK, MN, ſeront égales entr'elles.*

DEMONSTRATION.

Pour abreger le calcul, & le rendre plus intelligible; ſoient appellées A, la peſanteur du poids EOQF; O, Q, les charges qui en réſultent perpendiculairement ſur les ſurfaces SV, XY; V, Y, les réſultantes de celles-ci perpendiculairement ſur les baſes particulieres GK, GN; & S, X, celles qui en réſultent auſſi perpendiculairement ſur ou contre les hauteurs ou plans verticaux HK, MN: noms dont voici la liſte pour le ſoulagement de la mémoire.

La peſanteur du poids EOQF,		A.
Charges qui en réſultent	à la ſurface SV,	O.
	à ſa baſe GK,	V.
	à ſa hauteur HK,	S.
	à la ſurface XY,	Q.
	à ſa baſe GN,	Y.
	à ſa hauteur MN,	X.

Après cela, ſi l'on conſidere que les droites Dδ, Bβ, perpendiculaires (*Hyp.*) ſur la diagonale AC du parallelogramme ABCD, rendant les triangles AβB, CδD, ſemblables entr'eux, rendent auſſi Aβ. δC :: AB. CD :: Bβ. Dδ. on verra que Aβ=Cδ, & Bδ=Dδ; puiſque ce parallelogramme ABCD rend AB=CD. Cela poſé,

PART. I. La preſente hypotheſe de AC perpendiculaire à la baſe totale NK, donnera (*Th.* 28. *Corol.* 3. *nomb.* 1.) V. A :: Aδ. AC. Et A. Y :: AC. Aβ :: AC. Cδ. Donc (en raiſon ordonnée) V. Y :: Aδ. Cδ. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. La même hypotheſe de AC perpendiculaire ſur NK, donnera auſſi (*Th.* 28. *Corol.* 3. *nomb.* 2.) S. A :: Dδ. AC. Et A. X :: AC. Bβ :: AC. Dδ. Donc (en raiſon ordonnée) S. X :: AC. AC :: 1. 1. Et conſequemment S=X. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Digitized by Google

COROLLAIRE.

Puiſque (*part.* 1.) V. Y :: A♂. C♂. l'on aura (en compoſant) V. V+Y :: A♂. A♂+C♂ :: A♂. AC. Or (*Th.* 28. *Corol.* 3. *nomb.* 1.) A. V :: AC. A♂. Donc (en raiſon ordonnée) A. V+Y :: AC. AC :: 1. 1. Et conſequemment V+Y=A : c'eſt-à-dire, que la charge entiere (V+Y) de la baſe totale NK, eſt toûjours égale à la peſanteur (A) du poids EOQF ſoûtenu entre les deux ſurfaces SV, XY, fixement appuyées ſur cette baſe commune, & contre les plans HK, MN, perpendiculaires (*Hyp.*) de même que AC à cette baſe NK.

Voici encore la même choſe, mais plus generalement ; ſçavoir, pour toutes les directions imaginables AC de la peſanteur du poids EOQF.

THEOREME XXXI.

En general, quelle que ſoit la direction AC du poids EOQF, tout le reſte demeurant le même que dans le précedent Th. 30. FIG. 213. 214. 215. 216.

I. *Les charges particulieres des baſes GK, GN, ſeront entr'elles :: AD×GK×MG. AB×GN×HG.*

II. *Les charges particulieres des hauteurs ou des plans verticaux HK, MN, ſeront entr'elles :: AD×HK×MG. AB×MN×HG.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Les noms demeurant ici les mêmes que dans la démonſtration du précedent Th. 30. l'on aura (*Th.* 28. *Corol.* 2. *nomb.* 2. 4.) Y. A :: AD×GK. AC×GH. Et A. Y :: AC×MG. AB×NG. Donc (en multipliant par ordre) V. Y :: AD×GK×MG. GH×AB×NG. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. L'on aura auſſi (*Th.* 28. *Corol.* 2. *nomb.* 2. 4.) S. A :: AD×HK. AC×HG. Et A. X :: AC×MG. AB×MN. Donc (en multipliant par ordre) S. X :: AD×HK×MG. AB×MN×HG. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la part. 1. (en compoſant) que V. V+Y :: AD×GK×MG. AD×GK×MG+GH×AB×NG. Or (*Th.* 28. *Corol.* 2. *nomb.* 2.) A. V :: AC×GH. AD×GK. Donc (en multipliant par ordre) A. V+Y :: AC×GH ×MG. AD×GK×MG+GH×AB×NG. c'eſt-à-dire, en general, quel que ſoit la direction AC du poids quelconque EOQF, ſa peſanteur (A) eſt toûjours en cette raiſon à la charge entiere (V+Y), qui de ſa preſſion ſur les ſurfaces SV, XY, réſulte au plan horiſontal NK de leurs baſes GK, GN, ou à ces deux baſes enſemble.

COROLLAIRE II.

Or ſi l'on ſuppoſe (comme dans le précedent Th. 30.) que la direction AC du poids EOQF ſoit parallele aux verticales HK, MN ; les triangles (*Hyp.*) rectangles HKG, DſA, BβC, ſe trouvant alors ſemblables entr'eux, de même que les triangles (*Hyp.*) rectangles MNG, BβA, DſC ; l'on aura ici AD. Aſ :: HG. GK. Et AB. Aβ :: MG. NG. D'où réſulte AD×GK=Aſ×HG, & AB×NG= Aβ×MG. Donc en ſubſtituant ces valeurs de AD×GK, AB×NG, dans la derniere analogie du précedent Cor. 1. l'on aura ici A. V+Y :: AC×GH×MG. Aſ×GH×MG +GH×Aβ×MG :: AC. Aſ+Aβ (les triangles ſemblables BβA, DſC, auſquels le parallelogramme ABCD donne AB=CD, ayant conſequemment auſſi Aβ=Cſ) :: AC. Aſ+Cſ :: AC. AC :: 1. 1. c'eſt-à-dire, qu'en ce cas de la direction AC du poids EOQF, perpendiculaire à NK, la charge entiere (V+Y) de ce plan NK des baſes GK, GN, des ſurfaces SV, XY, eſt toûjours égale à la peſanteur (A) de ce poids EOQF que ces deux ſurfaces ſeules ſoûtiennent enſemble entr'elles, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corollaire du précedent Th. 30.

COROLLAIRE III.

Cette hypotheſe de AC perpendiculaire ſur NK, auſſi-

Digitized by Google

bien que HK, MN, en rendant les triangles HKG, D♪A, ſemblables entr'eux, auſſi-bien que les triangles MNG, Bβ A, ne rend pas ſeulement AD×GK=A♪×GH, & AB×NG=Aβ×MG, ainſi qu'on le vient de trouver dans le précedent Cor. 2. mais elle rend de plus AD. D♪ :: HG. HK. Et AB. Bβ :: MG. MN. D'où réſulte auſſi AD×HK=D♪×HG, & AB×MN=Bβ×MG. Donc en ſubſtituant ces quatre valeurs de AD×GK, AB×NG, AD×HK, AB×MN, dans les part. 1. 2.

1°. La part. 1. donnera ici V. Y :: AD×GK×MG. HG×AB×NG :: A♪×HG×MG. Aβ×HG×MG :: A♪. Aβ (à cauſe de Aβ=C♪) :: A♪. C♪. c'eſt-à-dire, que les charges particulieres (V, Y,) des baſes GK, GN, auſquelles ces charges réſultent de celles (O, Q,) des ſurfaces SV, XY, qui ſoûtiennent entr'elles le poids EOQF, doivent être ici entr'elles comme les parties correſpondantes A♪, C♪, de la diagonale AC du parallelogramme ABCD, ainſi qu'on l'a déja vû dans la part. 1. du précedent Théoreme 30.

2°. La part. 2. donnera pareillement S. X :: AD×HK ×MG. AB×MN×HG :: D♪×HG×MG. Bβ×HG×MG :: D♪. Bβ (les triangles ſemblables Bβ A, D♪C, auſquels le parallelogramme ABCD donne AB=CD, ayant conſequemment auſſi D♪=Bβ) :: D♪. D♪ :: 1. 1. c'eſt-à-dire, qu'en ce cas les charges ou impreſſions horiſontales directement contraires aux plans verticaux HK, MN, ou à leurs réſiſtances, ſeroient égales entr'elles, ainſi qu'on l'a déja vû dans la part. 2. du précedent Th. 30.

THEOREME XXXII.

Soient deux Roues, une grande quelconque CO, & une petite auſſi quelconque DO, chargées ſur leurs Eſſieux A, B, de fardeaux, qui avec les peſanteurs particulieres de ces Roues, faſſent des charges ou des poids totaux quelconques appellez K pour la grande Roue, & L pour la petite; avec leſquels poids K, L, dirigez à volonté ſuivant AK, BL, ces deux Roues

FIG. 237. & ſuivantes juſqu'à 242.

ſoient ſur le même point O d'une élevation MO de chemin MON, qu'elles ayent à ſurmonter; ſur lequel point O elles ſoient retenues par l'inegalité du chemin, qui l'empêche de gliſſer, ainſi qu'on verra dans le Schol. art. 3. qu'il pourroit arriver, & par les puiſſances P, R, appliquées aux Eſſieux, ou aux centres A, B, de ces Roues, ſuivant des directions quelconques AP, BR, qui les empêchent de rouler dans le fond OM.

Cela étant, ſi après avoir imaginé EO, OG, paralleles à AK, BL, & qui rencontrent AP, BR, en E, G, l'on imagine auſſi OF, OH, qui faſſent avec AK, BL, des angles OFA=EAO, OHB=GBO: je dis que les puiſſances P, R, ainſi en équilibre avec les charges K, L, des Roues CO, DO, ſur le point O de l'éminence à ſurmonter du chemin MON, ſeront entr'elles comme les produits K×OF×OB, L×OH×OA; c'eſt-à-dire, P. R :: K×OF×OB. L×OH×OA.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*Hyp.*) OE eſt parallele à AK & OG parallele à BL, l'on aura ici les angles OAF=EOA, OBH=GOB. Donc ayant auſſi (*Hyp.*) les angles OFA=EAO, OHB=GBO, l'on aura ici les deux triangles AFO, OAE, ſemblables entr'eux, & les deux autres BAO, OBG, ſemblables auſſi entr'eux. Par conſequent OF. OA :: EA. EO. Et OH. OB :: GB. GO. Donc le Corol. 7. du Th. 26. donnant ici de plus P. K :: EA EO. Et R. L :: GB. GO. l'on y aura auſſi P. K :: OF. OA. Et R. L :: OH. OB. Ce qui donne $P=\frac{K\times OF}{OA}$, & $R=\frac{L\times OH}{OB}$. Donc P. R :: $\frac{K\times OF}{OA}$. $\frac{L\times OH}{OB}$ :: K×OF×OB. L×OH×OA. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 237. 238. 239. Si preſentement on ſuppoſe à l'ordinaire les directions AK, BL, des poids K, L, paralleles entr'elles, & de plus les angles quelconques EAO, GBO, égaux entr'eux;

Digitized by Google

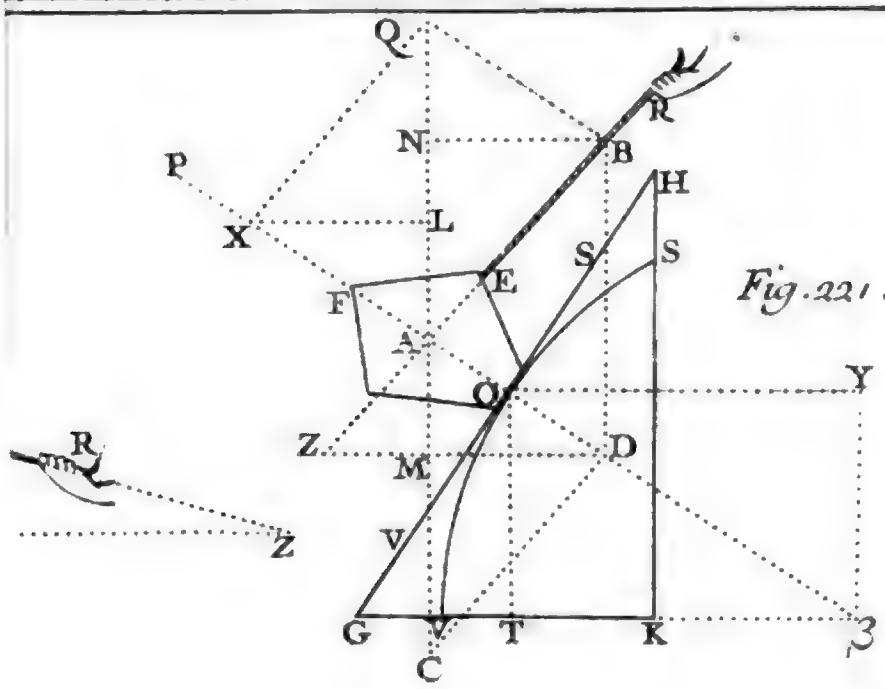


Fig. 221.

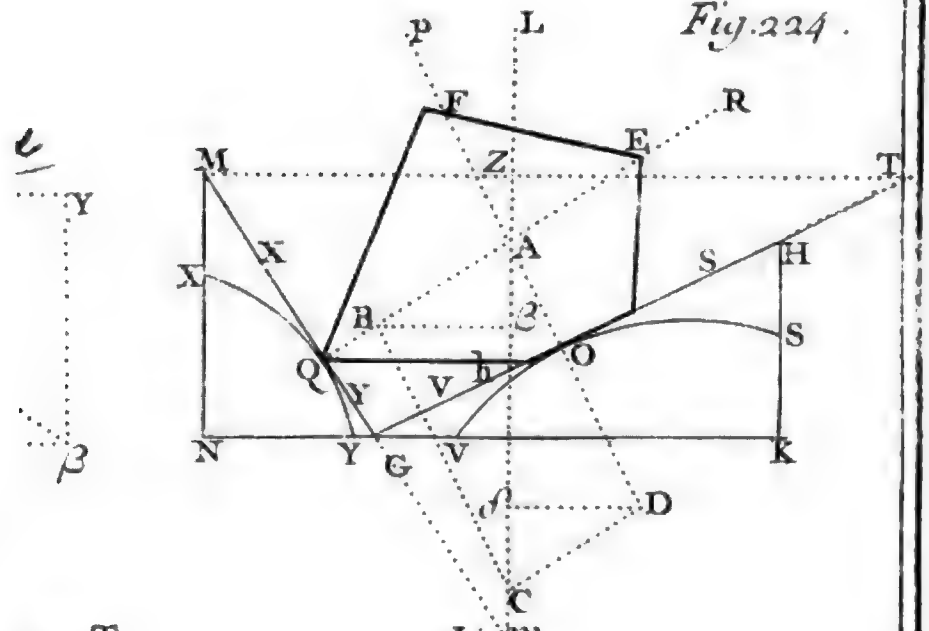


Fig. 224.

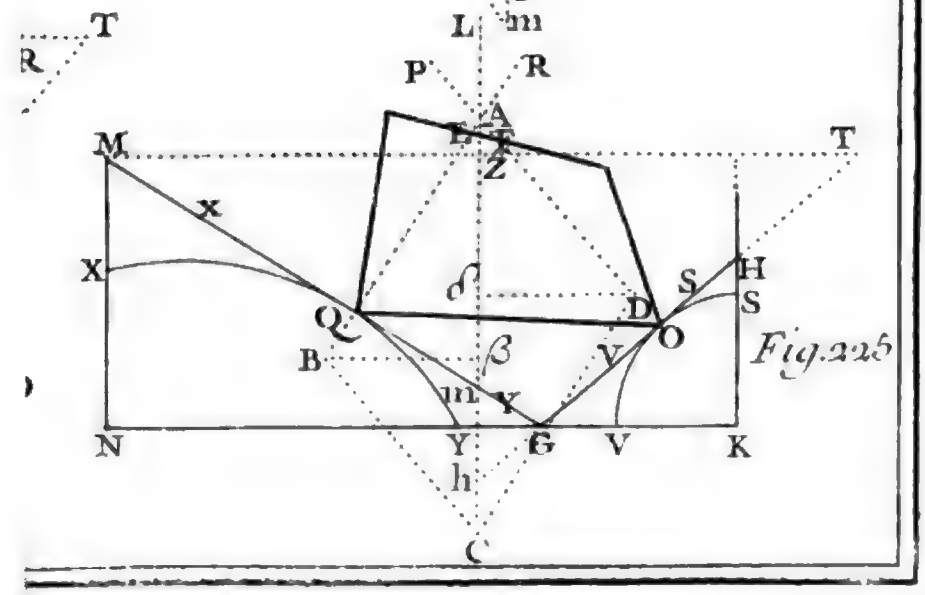


Fig. 225.

Digitized by Google

Digitized by Google

cette double hypotheſe faiſant tomber OG en OT ſur EO, & OH en OS ſur OF, comme dans les Fig. 237. 238. 239. l'on aura ici OF. OH :: OF. OS (à cauſe de AK ſuppoſée parallele à BL, qui prolongée rencontre AO en Q) :: OA. OQ. Ce qui donnant OF×OQ=OH×OA, change ici l'analogie du Théoreme en P. R :: K×OF×OB. L×OF×OQ :: K×OB. L×OQ.

COROLLAIRE II.

Si de plus on ſuppoſe les deux directions AK, BL, des poids K, L, confondues en une, comme dans la Fig. 239. cette addition d'hypotheſe faite à la précedente du Corol. 1. rendant Q en A, & H, S en F, donne OQ=OA, & OH ou OS=OF; ce qui change encore l'analogie generale du Théoreme en P. R :: K×OB. L×AO. de ſorte que ſi les charges K, L, des Roues étoient en raiſon réciproque de leurs rayons OA, OB; les puiſſances P, R, ſeroient ici égales entr'elles. FIG. 239.

COROLLAIRE III.

Si outre les directions AK, BL, des poids KL, confondues en une, on veut preſentement que les angles EAO, GBO, ſoient complemens l'un de l'autre à deux droits, le tout comme dans la Fig. 240. la premiere de ces deux hypotheſes rendant H, F, B, ſur cette direction commune AK ou BL, & la ſeconde rendant les angles AFO, BHO, complemens l'un de l'autre à deux droits, puiſque le Théoreme ſuppoſe AFO=EAO, BHO=GBO; l'on aura ici les angles OFH, OHF, égaux entr'eux, & conſequemment OH=OF. Donc l'égalité generale du Théoreme ſe réduira encore ici à P. R :: K×OB. L×AO. comme dans le précedent Corol. 2. ce qui fait voir comme là, que ſi les charges K, L, des Roues étoient en raiſon réciproque de leurs rayons OA, OB, les puiſſances P, R, ſeroient encore ici égales entr'elles. FIG. 240.

Digitized by Google

COROLLAIRE IV.

Fig. 242. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le Corol. 1. qui a donné P. R :: K×OB. L×OQ. ſi l'on y ſuppoſe de plus que OB ſoit ſur OA, comme dans la Fig. 242. le point B y tombant en Q, l'on auroit alors OB=OQ; ce qui y réduiroit l'analogie de ce Corol. 1. à P. R :: K. L. c'eſt-à-dire, qu'en ce cas les puiſſances P, R, qui (*Hyp.*) ſoutiennent les Roues CO, DO, ſur le point O de la pente OM, ſeroient entr'elles en raiſon des charges K, L, de ces deux Roues.

COROLLAIRE V.

Fig. 237. & ſuivantes juſqu'à 242. Si preſentement on ſuppoſe que ces charges K, L, des Roues CO, DO, c'eſt-à-dire, les ſommes faites des peſanteurs de ces Roues, & des fardeaux qu'elles portent: ſi l'on ſuppoſe, dis-je, preſentement que ces charges ou ſommes de peſanteurs ſoient égales entr'elles;

1°. Cette hypotheſe de K=L changeroit l'analogie generale du preſent Th. 32. en P. R :: OF×OB. DH×OA.

Fig. 237. 238. 241. 2°. Cette hypotheſe de K=L, jointe à celle du Corol. 1. changeroit ſon analogie en P. R :: OB. OQ.

Fig. 239. 241. 3°. Cette même hypotheſe de K=L, jointe à celle de chacun des Corol. 2. 3. changeroit auſſi chacune de leurs analogies en P. R :: OB. OA. c'eſt-à-dire, qu'alors les puiſſances P, R, ſeroient entr'elles en raiſon réciproque des rayons des Roues qu'elles ſoutiennent avec leurs fardeaux.

Fig. 242. 4°. Cette même hypotheſe de K=L, jointe à celle du Corol. 4. y rendroit auſſi P=R.

Voilà juſqu'ici pour le rapport des puiſſances P, R, qui ſoûtiennent les Roues CO, DO, ſur le point O de la pente OM: voici preſentement pour le rapport des charges K, L, de ces deux Roues.

COROLLAIRE VI.

Fig. 235. La multiplication des termes entr'eux de l'analogie generale

generale du preſent Th. 32. donnant en general P×L×OH×OA=R×K×OF×OB, l'on aura auſſi en general K. L :: P×OH×OA. R×OF×OB. Donc, & ſuivantes juſqu'à 242.

1°. L'hypotheſe du Corol. 1. donnant OH×OA=OF×OQ, l'on y aura K. L :: P×OF×OQ. R×OF×OB :: P×OQ. R×OB. Fig. 237. 238. 242.

2°. L'hypotheſe du Corol. 2. rendant OQ=OA, l'on y aura K. L :: P×OA. R×OB. c'eſt-à-dire, les charges K, L, des Roues CO, DO, en raiſon compoſée de celle de leurs rayons OA, OB, & de celles des puiſſances P, R, qui les ſoûtiennent ſur le point O de la pente OM. Fig. 239.

3°. L'hypotheſe du Corol. 3. rendant OH=OF, l'on y aura encore K. L :: P×OA. R×OB. comme dans le précedent nomb. 2. Fig. 240.

4°. L'hypotheſe du Corol. 4. rendant OB=OQ, outre OA. OQ :: OF. OH. ce qui donne OA×OH=OQ×OF=OB×OF, change également la précedente analogie generale, & celle du nomb. 1. en K. L :: P. R. ainſi que dans ce Corol. 4. Fig. 241.

COROLLAIRE VII.

Si preſentement on ſuppoſe les puiſſances P, R, égales entr'elles, c'eſt-à-dire, P=R, Fig. 235. & ſuivantes juſqu'à 242.

1°. L'analogie generale du précedent Corol. 6. ſe changera pour ici en K. L :: OH×OA. OF×OB.

2°. Celle du nomb. 1. de ce Corol. 6. ſe changera en K. L :: OQ. OB. Fig. 237. 238. 242.

3°. Celle des nomb. 2. 3. de ce Corol. 6. ſe changera en K. L :: OA. OB. c'eſt-à-dire, qu'alors les charges K, L, des Roues CO, DO, ſeront entr'elles comme les rayons de ces mêmes Roues. Fig. 239.

4°. Le nomb. 4. du même Corol. 6. donnera K=L. Fig. 242.

SCHOLIE.

I. Pour juger de l'avantage ou du deſavantage des Roues CO, DO, de differentes grandeurs dans l'uſage, ſuppoſons aux puiſſances P, R, qui les ſoûtiennent, des dire- Fig. 237. & ſuivantes juſqu'à 242.

ctions AP, BR, qui faſſent des angles égaux PAO, RBO; avec les rayons AO, BO, ſur le bout O deſquels ces deux Roues ſont appuyées, ainſi que dans les Fig. 237. 238. 239. 242. ſuppoſons-y de plus ces Roues chargées ſur leurs Eſſieux A, B, de fardeaux, qui avec les peſanteurs de ces Roues leur faſſent des charges égales K, L, leſquelles ayent leurs directions AK, BL, paralleles entre-elles. Cela étant,

Fig. 237. 238. 1°. Lorſque ces deux Roues CO, DO, ſeront inégalement élevées ſur le même point O d'une pente OM; en ſorte que les directions paralleles AK, BL, de leurs charges ſoient differentes verticales, comme dans les Fig. 237. 238. Ce cas rendant (*Cor.* 5. *nomb.* 2.) P. R :: OB. OQ. Et conſequemment P > R dans la Fig. 237. qui a OB > OQ; & au contraire P < R dans la Fig. 238. qui a OB < OQ: ce cas, dis-je, fait voir que lorſque la petite Roue DO eſt plus avancée que la grande DO ſur le point O, comme dans la Fig. 237. il faut une plus grande force (P) pour ſoûtenir celle-ci, que (R) pour ſoutenir l'autre; & qu'au contraire il la faut moindre lorſque la petite Roue eſt moins avancée que la grande ſur le point O, comme dans la Fig. 238.

Fig. 239. 2°. Lorſque les directions AK, BL, des charges K, L, de ces deux Roues CO, DO, inégalement avancées ſur le point O, ſe confondent en une même verticale, comme dans la Fig. 239. Ce cas rendant (*Corol.* 5. *nomb.* 3.) P. R :: OB. OA. c'eſt-à-dire, les puiſſances P, R, entr'elles en raiſon réciproque des rayons OA, OB, des Roues CO, DO, qu'elles ſoutiennent, on voit qu'en ce cas il faut toujours moins de force pour ſoûtenir la même charge avec la grande Roue CO qu'avec la petite DO.

Fig. 242. 3°. Enfin lorſque ces deux Roues ſont également avancées ſur le point O, en ſorte que leurs rayons AO, BO, ſe confondent enſemble, comme dans la Fig. 242. Ce cas rendant (*Cor.* 5. *nomb.* 3.) P = R, on voit qu'alors ces puiſſances P, R, qui ſoûtiendroient ces deux Roues ſur le point O, ſeroient égales entr'elles.

II. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent art. 1. cet art. 1. faiſant voir que lorſque les Roues CO, DO, ſont inégalement avancées ſur le point O, il peut également arriver (*art.* 1. *nomb.* 1.) qu'il faille tantôt plus & tantôt moins de force pour y ſoutenir la grande Roue CO, que pour y ſoutenir la petite DO, tant que les directions AK, BL, de leurs charges (*Hyp.*) égales K, L, ſont des verticales differentes, comme dans les Fig. 237. 238. qu'au contraire il en faut toûjours moins (*art.* 1. *nomb.* 1.) pour y ſoûtenir la grande Roue CO, que pour y ſoutenir la petite DO, lorſque les directions de leurs charges (*Hyp.*) égales, ſe confondent en une ſeule & même verticale, comme dans la Fig. 239. Et qu'enfin lorſque ces deux Roues ſont également avancées ſur ce point O, comme dans la Fig. 242. les forces P, R, requiſes pour les y ſoutenir ſont (*art.* 1. *n.* 3.) toûjours égales entr'elles: vû (dis-je) tout cela, il paroît qu'il y a un plus grand nombre de cas ou il faut moins de force pour ſoûtenir ici la grande Roue CO ſur le point O de la pente OM, que pour y ſoutenir la petite Roue DO, qu'il n'y en a où la grande exige pour cela moins ou autant de force que la petite. Donc la moindre augmentation de force qu'on faſſe aux puiſſances P, R, ici en équilibre (*Hyp.*) avec ces deux Roues de leurs charges totales (*Hyp.*) égales, ſuffiſant pour les faire rouler de O vers N, il y a plus de cas où il faudra moins de force à la puiſſance P pour faire rouler ainſi la grande Roue CO, qu'a la puiſſance R pour faire rouler de même la petite DO, qu'il n'y en a ou il en faudroit à celle-là autant ou moins qu'à celle-ci. Par conſequent il eſt plus avantageux du côté des forces, de ſe ſervir de grandes Roues que de petites, à moins que l'incommodité de s'en ſervir ne contrebalançât ou ne ſurpaſſât cet avantage, lequel eſt encore augmenté dans les chemins fort inégaux, dont les petites buttes ou éminences ſont par rapport à une petite Roue, comme autant de plans ou ſurfaces inclinées, par deſſus leſquelles cette Roue doit monter; au lieu que la grande Roue les touche ſeu-

FIG. 237. 238. 239. 242.

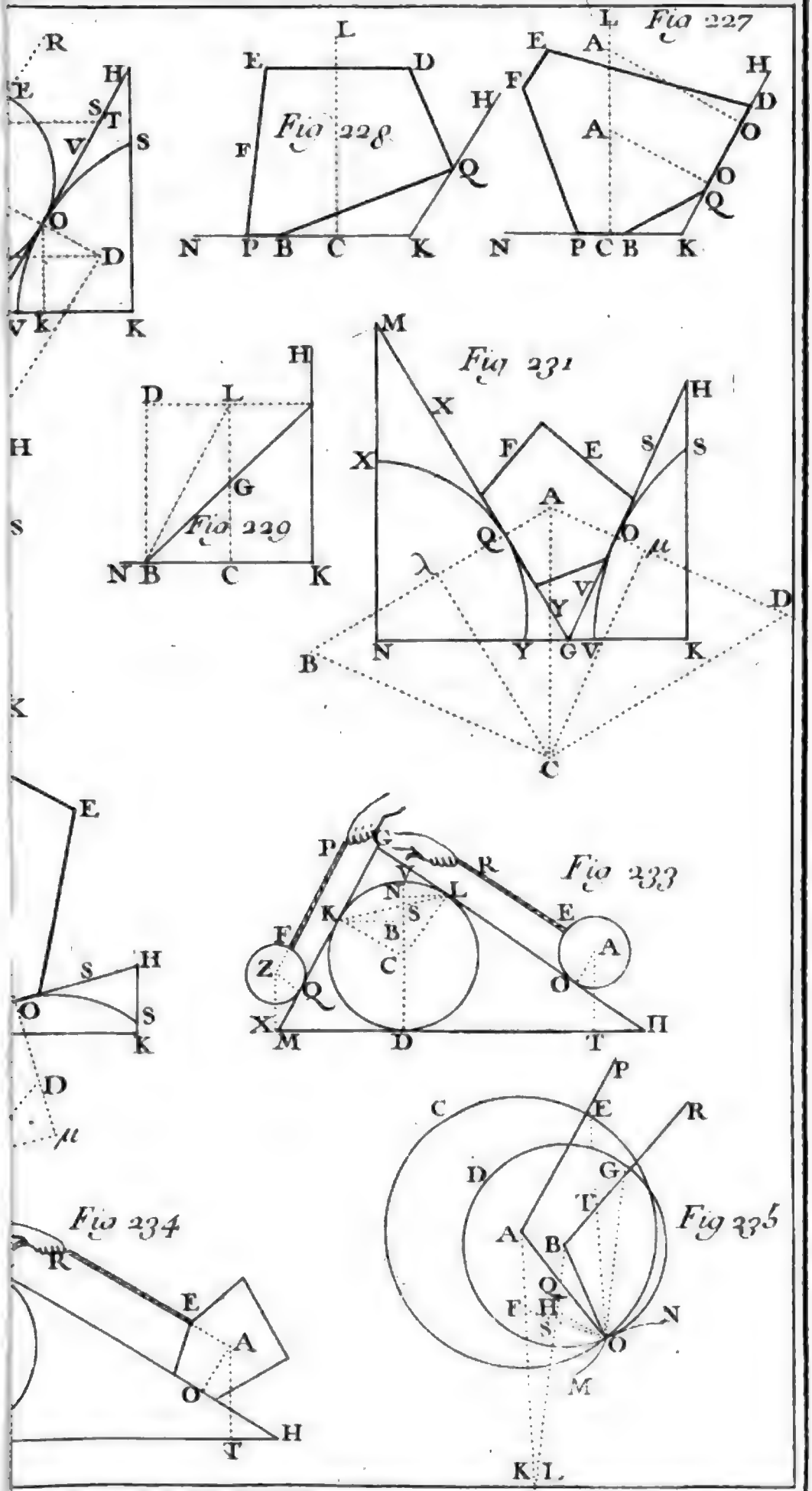
lement par leurs ſommets, & qu'elle peut paſſer facilement par deſſus, faute de pouvoir entrer, comme la petite, dans une infinité de petits creux ou profondeurs qui en réſultent à ces chemins inégaux ou raboteux, qui le font ainſi plus pour la petite Roue que pour la grande.

Tel eſt l'avantage des grandes Roues ſur les petites dans les conditions de l'art. 1. Pour dans d'autres conditions il pourroit arriver pluſieurs varietez aux rapports des forces P, R, leſquelles varietez ſe détermineront de même par le preſent Th. 32. joint au Th. 26. & à ſes Corollaires.

Fig. 235. & ſuivantes juſqu'à 242.

III. Au reſte, il eſt à remarquer, ſuivant les Corol. 8. 9. du Lem. 3. & ſuivant la part. 1. du Th. 26. que pour l'équilibre qu'on vient de ſuppoſer dans le preſent Th. 32. entre chacune des puiſſances P, R, & chacune des Roues CO, DO, chargées en leurs Eſſieux ou centres A, B, de fardeaux ou poids K, L; les rayons AO, BO, ſur leſquels ces deux Roues s'appuyent, devroient être perpendiculaires en O aux ſurfaces MON, ſur leſquelles ces rayons, eux-mêmes, ſont appuyez, ſi ces ſurfaces étoient mathématiquement polies. Mais l'âpreté & les inégalitez tant des circonferences de ces Roues, que du terrein ſur lequel on les ſuppoſe, les y accrochent aſſez pour les y empêcher de gliſſer, comme il leur arriveroit (*Lem.* 3. *Cor.* 8. 9.) faute de cette perpendicularité, qui ne peut être à la fois pour ces deux rayons AO, BO, appuyez ſur un même point O de la ſurface MON, tant qu'ils ne ſe confondent pas en une même ligne droite, comme dans la Fig. 242. On ſe peut paſſer même de cet accrochement dans tous les autres cas des Fig. 235. 236. 237. 238. 239. 240. en ſuppoſant ces deux rayons AO, BO, perpendiculaires à une ſurface en deux points O (chacun en chacun) aſſez voiſins pour pouvoir paſſer ſenſiblement pour le même; & pour ne pas s'éloigner ſenſiblement non plus de la rigueur mathématique, ſuivant laquelle le tout vient d'être conſideré.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig 237

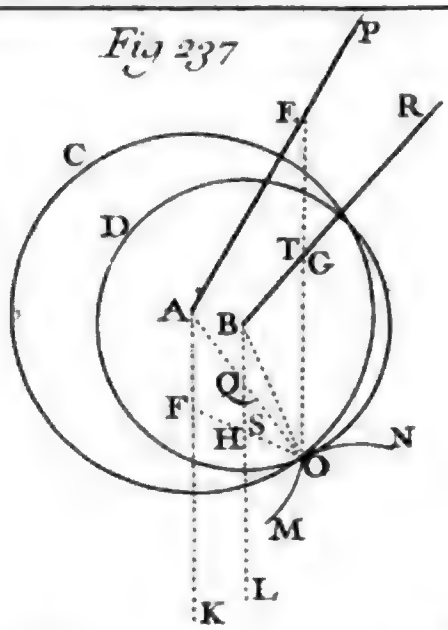
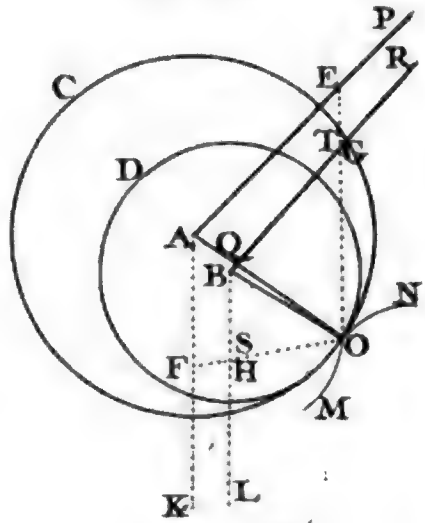


Fig 238



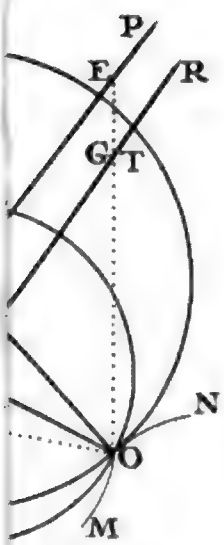
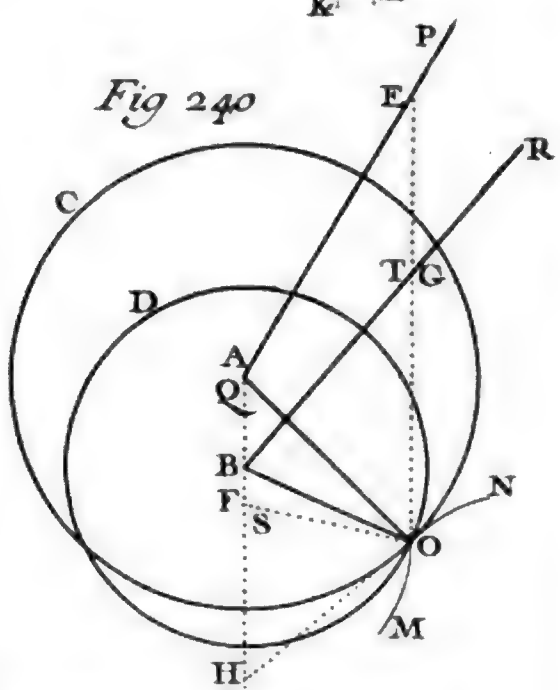


Fig 240



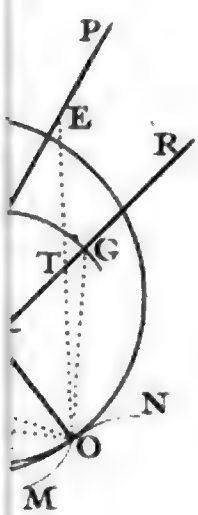
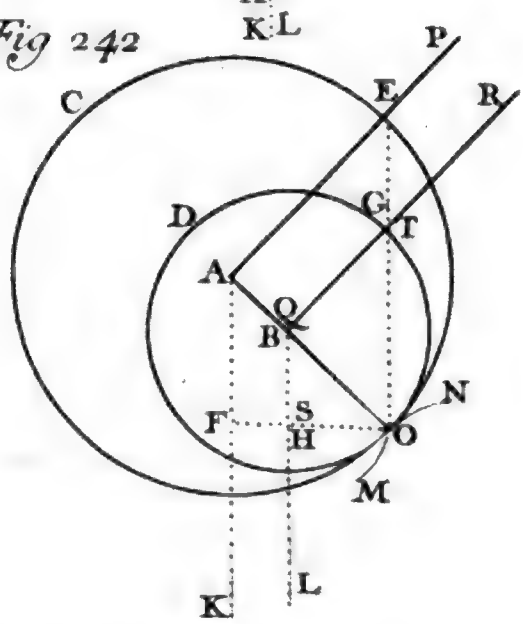


Fig 242



SECTION VII.

De la Vis.

DEFINITION XXVIII.

LA *Vis* eſt un cylindre droit, creuſé exterieurement en ſpirale, qui forme en relief comme un cordon ſpiralement entortillé autour d'un autre cylindre droit reſtant de celui-là, moins gros que lui de deux fois la groſſeur de ce cordon ſpiral par tout également inclinê ſur la longueur de ce moindre cylindre, appellé *le cylindre de la Vis*, autour duquel ce cordon eſt ainſi tellement entortillé, que les tours de ce cordon ſont tous également diſtans entr'eux, comme ſi ce cordon (à ſon relief près) étoit l'hypotenuſe d'un triangle rectangle rectiligne, qui de hauteur parallele & égale à celle du cylindre de la Vis, ſeroit roulé autour de ce cylindre, autour de la baſe duquel ſeroit roulée celle de ce triangle; ou comme ſi ce cordon (encore à ſon relief près) étoit ſur le cylindre de la Vis, la trace d'un point uniformement mû le long d'une ligne droite, mûe auſſi d'un mouvement uniforme quelconque autour de la baſe de ce cylindre parallelement à ſon axe. La diſtance de chacun des tours à ſon voiſin de la ſpirale ainſi tracée autour de ce cylindre, priſe ſuivant la longueur de ce cylindre ou de la Vis, eſt ce qu'on appelle le *Pas* de cette Vis, laquelle a pour axe celui de ce cylindre.

Cette Vis entre dans un trou de pareille groſſeur d'un autre corps, appellé *Ecroue*, creuſé interieurement en demi-canal ſpiral propre à recevoir exactement le cordon de la Vis, lequel s'y engage en la tournant, ou en tournant ſon Ecroue d'un certain ſens, & s'en dégage en tournant l'un ou l'autre de ces deux corps en ſens contraire, un des deux demeurant immobile ou fixe pendant

que l'autre tourne de chacune de ces deux manieres. Celui de ces deux corps qui entre ainſi ou ſort de l'autre, eſt (dis-je) ce qu'on appelle la *Vis*, l'autre en eſt appellé l'*Ecroue*; chaque tour du cordon de la Vis s'appelle *Spire* ou *Helice*.

Tout cela eſt ſi connu, que je n'ai pas crû le devoir expliquer ſur des figures, qui peut-être l'auroient rendu moins clair par la difficulté d'y marquer ſenſiblement le relief du cordon ſpiral de la Vis, & le creux du canal ſpiral de ſon Ecroue.

REMARQUES.

I. On ſe ſert de la Vis pour comprimer, pour écraſer ou briſer, pour pouſſer ou repouſſer, pour attirer, en un mot pour ſurmonter avec force des obſtacles de quelqu'une de ces manieres. D'où l'on voit que tout l'uſage de la Vis eſt de tirer ou de pouſſer ſuivant la direction de ſon axe, c'eſt-à-dire, de l'axe de ſon cylindre, tout ce qui lui fait quelque réſiſtance; de ſorte que ſi elle eſt fixe, la force ou l'obſtacle contre lequel on s'en ſert, doit tirer ou preſſer l'Ecroue de cette Vis vers le côté oppoſé à celui vers lequel cette Ecroue, en tournant, force cet obſtacle d'avancer: au contraire, ſi c'eſt l'Ecroue qui ſoit fixe, cette force ou cet obſtacle doit tirer ou preſſer la Vis, elle même vers le côté oppoſé à celui vers lequel cette Vis, en tournant, le force d'avancer. C'eſt ce qui fait regarder d'ordinaire la charge de la Vis, ou de ſon Ecroue, comme d'une direction parallele à ſon axe.

II. Suivant cela, dans l'uſage de la Vis, lorſqu'elle eſt fixe, l'on doit regarder tous les points de ſon Ecroue, comme tirez ou preſſez paralielement entr'eux vers le côté vers lequel cette Ecroue eſt preſſée ou tirée par la force ou par le poids dont elle eſt chargée, & que l'on appellera ſa *charge*, differente de ce qu'on a ainſi appellé (*Déf.* 16.) par rapport aux ſurfaces inclinées, dont cette charge-ci exprime le poids ſoûtenu ſur elles.

III. On voit de-là que les lignes de direct on de tous ces points de l'Ecroue, ſont toutes obliques au cordon de

Digitized by Google

cette Vis aux points où ceux-là le touchent & s'appuyent ſur lui. Par conſequent (*Lem.* 3. *Corol.* 7. 8.) ſi cette Vis & ſon Ecroue étoient mathématiquement juſtes, chacun des points de cette Ecroue tendroit à couler du côté que ſa ligne de direction s'écarteroit de la perpendiculaire menée de lui à la partie du cordon, qui lui ſert de plan incliné : & parce que cet écartement ſe feroit du même côté pour tous ces points de l'Ecroue, à cauſe du parallelisme (*art.* 2.) de toutes leurs lignes de direction, & de la pente uniforme (*Déf.* 28.) du cordon de cette Vis dans toute ſa longueur ; il ſuit évidemment que tous ces points de l'Ecroue devroient s'accorder dans un même mouvement, qui emportât de ce côté-là cette Ecroue ſuivant le fil de ce cordon, c'eſt-à-dire, en tournoyant du côté de cet écartement, ſi dans ſon frottement avec la Vis l'inégalité de leurs parties ne les accrochoit point enſemble.

IV. La même choſe ſe doit entendre de la Vis, ſi c'eſt l'Ecroue qui ſoit fixe.

V. Ainſi à regarder l'un & l'autre dans une juſteſſe mathématique, il faut néceſſairement quelque force pour retenir celle des deux qui eſt mobile, contre l'impreſſion de la force ou du poids qui la charge : la voici cette force ſuppoſée à l'ordinaire d'une direction perpendiculaire à un Levier droit, qui paſſe par l'axe de la Vis, & avec lequel Levier cette direction eſt dans un plan perpendiculaire à cet axe, auquel on ſuppoſe auſſi d'ordinaire que la direction de la charge de la Vis ou de ſon Ecroue eſt toujours parallele.

THEOREME XXXIII.

Dans cette hypotheſe ordinaire du précedent art. 5. je dis que lorſqu'une puiſſance ſoûtient quelque poids, ou l'action de quelqu'autre force, à l'aide d'une Vis, ſoit que cette Vis ſoit fixe, ou que ce ſoit ſon Ecroue ; cette puiſſance eſt toûjours à ce poids ou à cette force (quelle qu'elle ſoit) comme un pas de cette Vis eſt à la circonference d'un cercle dont le rayon eſt égal à la diſtance qui eſt entre cette puiſſance & l'axe de cette même Vis.

DEMONSTRATION.

Fig. 143. I. Premierement, ſi la Vis VXYZ eſt fixe, concevons que le point A de ſon Ecroue PQ ſoit retenu ſur la partie GH de ſon cordon par quelque puiſſance R, dont la direction AB ſoit dans le plan de cette Ecroue, & perpendiculaire à EP, qui y eſt auſſi, & qui paſſant par le point A, paſſe auſſi en E par l'axe MS de la Vis.

Il eſt clair que cette puiſſance R retenant par ce moyen toute l'Ecroue PQ, ce point A de cette Ecroue fait ſur cette puiſſance la même impreſſion que s'il ſoûtenoit lui ſeul toute l'action du poids ou de la force, quelle qu'elle ſoit, qui pouſſe ou qui tire cette Ecroue (*Remarq.* 1. 5.) vers ZY parallelement à l'axe MS de cette Vis. Ainſi le point A de cette Ecroue peut être regardé comme ayant lui ſeul ſuivant AC perpendiculaire au plan de cette Ecroue, & parallele à MS, toute l'impreſſion que cette Ecroue reçoit de ſa charge: de ſorte que ſi l'on fait AD perpendiculaire à la partie GH du cordon de cette Vis, & que de quelque point D de cette ligne l'on acheve le parallelogramme BACD; l'on verra (*Th.* 26. *Corol.* 6.) que la puiſſance R ſera à la charge de l'Ecroue PQ, c'eſt-à-dire (*Remarq. art.* 2.) au poids, à la force, ou à la réſiſtance qu'elle ſoûtient, comme AB eſt à AC, ou à ſon égale BD; c'eſt-à-dire (à cauſe que le triangle HFG roulé ſur la Vis VXYZ, eſt ſemblable au triangle ABD) comme HF à la demi-circonference FG de cette Vis, ou comme 2×HF ou HK eſt à cette circonference entiere. Or regardant la droite EAP comme un Levier dont l'appui eſt le point E de l'axe MS de cette Vis, & qui ſe trouve (*Hyp.*) dans le plan de ſon Ecroue; la puiſſance P (qu'on ſuppoſe auſſi dans ce même plan, dirigée ſuivant lui perpendiculairement à EP, & paralelement à AB ſuppoſée auſſi perpendiculaire à EP) ſoutenant ainſi (*Hyp.*) le point A, ou la charge de l'Ecroue PQ au lieu de la puiſſance R, eſt à cette autre puiſſance R (*Th.* 21. *Cor.* 2. 9.) comme EA eſt à EP, ou comme la circonference entiere de

de cette Vis qui a EA pour rayon, eſt à la circonference entiere d'un cercle dont le rayon ſeroit EP. Donc (en multipliant par ordre ces deux rangées de proportionnelles) l'on aura la puiſſance P à la charge de l'Ecroue PQ, comme HK (qui eſt un des pas de la Vis) eſt à la circonference d'un cercle dont le rayon ſeroit égal à la diſtance EP de cette puiſſance P à l'axe MS de la Vis. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

II. Secondement, ſi c'eſt l'Ecroue PQ qui ſoit fixe, concevons que le point A appartient à la Vis VXYZ, c'eſt-à-dire, à ſon cordon, & qu'il eſt retenu (comme ſur un plan incliné) dans le canal ſpiral AO de cette Ecroue PQ par quelque puiſſance R, dont la direction ſoit encore ſuivant AB ſuppoſée dans le plan de cette Ecroue, & perpendiculaire à EP qu'on y ſuppoſe auſſi.

Il eſt encore évident que cette puiſſance R retenant par ce moyen toute la Vis VXYZ, ce point A fait encore ſur elle la même impreſſion ſuivant AC parallele à MS, que s'il ſoûtenoit ſeul toute l'action de ce qui (*Remarq.* 1. 5.) pouſſe ou tire cette Vis vers ZY. Donc par la même raiſon que ci-deſſus (*art.* 1.) la puiſſance R ſera encore ici à la charge de cette Vis, comme AB eſt à BD, c'eſt-à-dire, comme HF à FG, ou comme HK à la circonference entiere de cette Vis; & la puiſſance T, qui au lieu de la puiſſance R retient cette même Vis, eſt auſſi à cette puiſſance R (*Th.* 21. *Corol.* 2. 9.) comme EA à ST, ou comme cette circonference entiere de la Vis eſt à la circonference entiere d'un cercle qui auroit ST pour rayon. Donc (en multipliant par ordre ces deux rangées de proportionnelles) l'on aura encore la puiſſance T à la charge de cette Vis, comme HK (qui eſt un des pas de la même Vis) eſt à la circonference entiere d'un cercle, dont le rayon ſeroit égal à la diſtance ST de la puiſſance T à l'axe MS de cette Vis. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

III. Donc (*art.* 1. 2.) lorſqu'une puiſſance ſoûtient un poids, ou l'action de quelqu'autre force que ce ſoit, à l'aide d'une Vis, ſoit que cette Vis ſoit fixe, ou que ce

ſbit ſon Ecroue ; cette puiſſance eſt toûjours à ce poids, ou à cette force, comme un des pas de cette Vis eſt à la circonference entiere d'un cercle qui auroit pour rayon la diſtance de cette puiſſance à l'axe de cette même Vis. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

COROLLAIRE I.

On voit de-là que pour peu que la raiſon d'une puiſſance à un poids, ou à quelqu'autre force, ſurpaſſe celle d'un des pas d'une Vis, à la circonference d'un cercle qui auroit pour rayon la diſtance de cette puiſſance à l'axe de cette Vis ; cette puiſſance ainſi appliquée à cette Vis, pourra par le moyen de cette machine ſurmonter la réſiſtance de ce poids ou de cette force, & ce d'autant plus aiſément que cette raiſon ſera plus grande.

COROLLAIRE II.

D'où il ſuit que plus les pas d'une Vis ſeront petits, ou que les tours de ſon cordon ſpiral ſeront plus ſerrez, & que la diſtance de ſon axe à la puiſſance qui eſt appliquée, ſera plus grande, plus il ſera facile à cette puiſſance de ſurmonter le poids ou la force qui agit contr'elle.

COROLLAIRE III.

Il ſuit encore de ce Théoreme-ci qu'une même puiſſance peut également mouvoir un même poids, ou ſurmonter une même force ou réſiſtance, à l'aide d'une même Vis, ſoit qu'on ſuppoſe cette puiſſance appliquée à cette Vis, ou à ſon Ecroue ; pourvû qu'elle ſoit également diſtante de l'axe de cette Vis dans l'un & dans l'autre cas.

L'obſtacle que le frottement de la Vis avec ſon Ecroue fait au mouvement de l'une des deux par rapport à l'autre, doit être compté comme faiſant partie de ſa charge : c'eſt ainſi qu'on peut réduire cette machine, de même que toute autre, à une juſteſſe mathématique.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

Dans le précedent Th. 33. on vient de faire les trois ſuppoſitions qu'on fait d'ordinaire dans l'examen des proprietez de la Vis: ſçavoir,

1°. Que la direction de la puiſſance appliquée à cette machine, eſt dans un plan perpendiculaire à ſon axe.

2°. Que cette direction de la puiſſance eſt auſſi perpendiculaire à la droite menée ou imaginée dans ce plan, du point d'application de la puiſſance par l'axe de la Vis.

3°. Enfin que la direction de la charge de cette Vis ou de ſon Ecroue, c'eſt-à-dire, de ce qui y agit contre la puiſſance, ou de ce qui lui réſiſte, eſt parallele à cet axe.

Mais depuis le Projet de cette Mécanique-ci, que j'expoſai au jugement des Connoiſſeurs en 1687. & dans lequel je démontrai, comme ci-deſſus, le précedent Th. 33. fondé ſur ces trois hypotheſes ordinaires; ayant remarqué à la campagne pendant les Vendanges, que de pluſieurs hommes appliquez aux Leviers, qui ſervent à faire tourner la Vis de chaque Preſſoir, il n'y en avoit preſque pas un dont la direction fut dans un plan perpendiculaire à l'axe de cette Vis, ni même perpendiculaire au Levier auquel il étoit appliqué, s'appuyant preſque tous ſur ces Leviers, & contre tout ce qu'ils pouvoient rencontrer, avec des efforts dirigez de toutes parts, ſuivant des lignes differemment inclinées à l'horiſon & à ces Leviers. Cette contrarieté aux deux premieres des trois ſuppoſitions précedentes, me fit repenſer à la troiſiéme; & voyant qu'elle peut varier de même en mille manieres differentes, comme lorſque la Vis eſt oblique à l'horiſon, & que ſa charge, ou celle de ſon Ecroue, eſt un poids, &c. Je m'aviſai enfin de rechercher le tout en general, c'eſt-à-dire, pour toutes les directions imaginables, tant de la charge de la Vis, ou de ſon Ecroue, que de la puiſſance qui lui eſt appliquée. Voici le tout plus generalement encore que je ne le donnai dans les Memoires de 1709. y ayant perdu de vûe que la direction de la puiſ-

ſance étoit hors du plan de l'Ecroue, ou (plus generalement) hors d'un plan perpendiculaire à l'axe de la Vis.

THEOREME XXXIV.

Fig. 144. *En general pour toutes les directions imaginables de la charge quelconque de la Vis, ou de ſon Ecroue, & de la puiſſance qui lui eſt appliquée, & en équilibre avec cette charge ou réſiſtance : ſi l'on appelle cette puiſſance quelconque, R ; & cette charge ou réſiſtance auſſi quelconque, P, l'on aura toûjours* $R.\ P :: 2 \times AC \times PE \times SM \times GM \times TM \mp O \times EF \times SM \times GM \times TM . O \times SM \times SM \times TD \times PN \mp 2 \times AC \times GS \times GM \times TM \times PN$. *dont on va déterminer les lignes & les ſignes dans la démonſtration ſuivante.*

DEMONSTRATION.

I. Soit la Vis VXYZ avec ſon Ecroue QM & AB un demi-tour de ſon cordon ſpiral, qui, lorſque cette Vis eſt fixe, ſoûtient cette Ecroue ou ſa charge ; laquelle charge étant par tout la même, c'eſt-à-dire, de même effort & de même direction quelconques, tant ſur ce cordon AB, que ſur ſon point P, peut être conſiderée comme toute entiere en P : c'eſt pour cela, & pour abreger nos expreſſions, que cette charge ou réſiſtance entiere s'appellera toûjours P dans la ſuite. Si c'eſt l'Ecroue QM qui ſoit fixe, P exprimera de même la charge de la Vis, ſoûtenue ſur le point P du canal ſpiral PO de cette Ecroue QM, dans lequel loge ou coule le cordon AB de la Vis. Soit auſſi la puiſſance R appliquée comme l'on voudra à cette Ecroue en M extrêmité d'une droite, qui prolongée ſuivant le plan QM de la même Ecroue, rencontre en D l'axe ß☞ de la Vis : ſi c'eſt cette Vis qui ſoit fixe, ou qui ſoit appliquée en M à un tel Levier droit DPM, ſi c'eſt l'Ecroue qui le ſoit ; & cela de part & d'autre, ſoit que la direction RMG de cette puiſſance R ſoit ou ne ſoit pas dans le plan QM de cette Ecroue ; ou (plus generalement) dans un plan perpendiculaire à l'axe ß☞ de la Vis, lequel

paſſe par le Levier droit DPM, avec lequel il ſoit imaginé ne faire qu'un tout qui ſe meuve avec lui; lequel plan (que j'appellerai *Plan du Levier DM*) ſera celui de l'Ecroue, lui-même, quand la Vis ſera fixe; & quand elle ſera mobile, l'Ecroue étant fixe, ce plan ſera imaginé comme d'une piéce avec cette Vis & ſon Levier, pour concevoir ſur ce plan imaginaire par rapport à la Vis ainſi mobile avec lui, lorſque l'Ecroue eſt fixe, ce qu'on va remarquer d'action ou de force de la puiſſance R & de la charge P ſur l'Ecroue QM par rapport à elle, lorſque c'eſt la Vis qui eſt fixe: ſoit auſſi que la direction RMG de la puiſſance R ſoit perpendiculaire, ou non, à la droite DPM; ſoit enfin que la direction PN de la charge P de l'Ecroue ou de la Vis, ſoit ou ne ſoit pas parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis.

II. Quelles que ſoient (dis-je) toutes ces directions, tant de la charge P de la Vis ou de ſon Ecroue, que de la puiſſance R appliquée à une des deux; d'un point quelconque de la direction PN de cette charge P, pris du côté de π, vers lequel cette charge tend, imaginons NF perpendiculaire en F à un plan perpendiculaire en P à la droite DM, lequel plan ſera ainſi perpendiculaire au plan MDπ, & touchant de la Vis en quelque droite PE parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, lequel axe $\beta\pi$ étant (*Hyp.*) perpendiculaire à DM, rend cette parallele PE perpendiculaire auſſi à cette même DM, & ſection commune de ces deux plans: de ſorte que ſi du point F du plan touchant FPE on mene une perpendiculaire à ſon orthogonal MDπ, cette perpendiculaire ſera FE, qui rencontrera perpendiculairement en quelque point E cette ſection commune PE, ſoit par le point P la droite PL parallele à FE, & conſequemment perpendiculaire (comme elle) au plan MDπ, & conſequemment auſſi perpendiculaire en P à la droite DM dans le plan QM de l'Ecroue, ou plus generalement dans le plan de ce Levier DM, défini dans l'art. 1.

III. Cela fait ou imaginé, le Corol. 7. du Lem. 3. ſera

voir qu'en appellant F ce qu'il réſulte d'effort ou d'impreſſion ſuivant PF de ce que la charge P de la Vis ou de ſon Ecroue en fait ſuivant ſa direction quelconque PN; E, ce qu'il en réſulte ſuivant PE de cet effort F ſuivant PF; & enfin L, ce qu'il en réſulte auſſi ſuivant EF du même effort F ſuivant PF; l'on aura P. F :: PN. PF. Et F. E :: PF. PE. Et F. L :: PF. EF. Deſquelles analogies (en raiſon ordonnée) la premiere avec la ſeconde donnera P. E :: PN. PE. Et la premiere avec la troiſiéme donnera P. L :: PN. EF. De ſorte que par le moyen de la premiere de ces deux-ci l'on aura $E=\frac{P\times PE}{PN}$ pour ce que la charge P de la Vis ou de ſon Ecroue fait d'impreſſion ou de réſiſtance de P vers E ſuivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette Vis; & par le moyen de la ſeconde l'on aura $L=\frac{P\times EF}{PN}$ pour ce que la même charge abſolue P fait d'impreſſion de E vers F ſuivant EF perpendiculaire (*art.* 2.) au plan MDϖ, ou de P vers L ſuivant ſa parallele PL perpendiculaire auſſi (*art.* 2.) à ce plan & à ſa droite DM en P dans le plan QM de ce Levier DM.

IV. Si preſentement de quelque point G de la direction prolongée RM de la puiſſance R, on imagine GS perpendiculaire en S à ce plan QM du Levier DM, duquel point S ſoit ſur ce plan la droite SMH rencontrée en quelque point T par DT perpendiculaire à DM ſur ce même plan, ſur lequel ſoit auſſi MK perpendiculaire en M à la même DM; le Corol. 7. du Lem. 3. fera voir pareillement ici que l'effort abſolu de la puiſſance R ſuivant ſa direction GMR, eſt à ce qu'il en réſulte ſuivant SM prolongée vers H, comme GM à SM; & que ce qu'elle en fait ainſi ſuivant SM, eſt à ce qu'il en réſulte ſuivant TD ou ſuivant ſa parallele MK, comme TM eſt à TD. Donc (en appellant H, K, ces efforts dérivez ſuivant SH, MK,) l'on aura ici R. H :: GM. SM. Et H. K :: TM. TD. Ce qui

(en multipliant par ordre) donne ici R. K :: GM×TM. SM×TD. D'où réſulte $K=\frac{R\times SM\times TD}{GM\times TM}$ pour ce que la puiſſance R fait d'effort de M vers K ſuivant MK perpendiculaire (*Hyp.*) comme DT, à la droite DM dans le plan de l'Ecroue QM employé juſqu'ici pour le plan du Levier DM, conformément à l'art. 1. Ce qui eſt tout ce qui reſte de force agiſſante de cette puiſſance R pour mouvoir l'Ecroue autour de la Vis fixe, ou la Vis dans l'Ecroue fixe; puiſque l'effort que cette puiſſance fait de plus de G vers S ſuivant GS perpendiculaire (*Hyp.*) au plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, eſt employé (*Ax.* 3.) tout entier contre ce plan. Ce qui en augmente ou diminue de la valeur de cet effort ſuivant GS, la charge de l'Ecroue lorſque la Vis eſt fixe, ou de la Vis lorſque c'eſt l'Ecroue qui eſt fixe: voici comment.

V. Cet effort de G vers S, réſultant de la puiſſance R ſuivant une direction GS perpendiculaire (*art.* 4.) au plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, & conſequemment parallele à l'axe $\beta\varpi$ de la Vis, étant (dis-je) employé tout entier contre ce plan, le charge ou le ſoulage de toute ſa valeur, ſelon que le point G, ou la partie GM de la direction de la puiſſance R eſt du côté de β au deſſus de ce plan QM du Levier DM, ou au deſſous de ce même plan du côté de ϖ, vers lequel tend (*Hyp.*) la charge abſolue P de l'Ecroue ou de la Vis; & conſequement l'effort $E=\frac{P\times PE}{PN}$, qu'on vient de trouver (*art.* 3.) réſulter de cette charge P à cette Ecroue, ou à cette Vis, de P vers E ſuivant PE parallele auſſi (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette même Vis, doit être augmenté ou diminué de la valeur de cet effort réſultant de la puiſſance R, de G vers S ſuivant GS, ſelon que le point G, ou la partie GM de la direction de cette puiſſance, ſera au deſſus ou au deſſous du plan QM du Levier DM. D'où l'on voit qu'en

appellant S cet effort ſuivant GS, la charge préciſe de l'Ecroue ou de la Vis, ſuivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette Vis ſera ici $E+S$ lorſque le point G y ſera du côté de β au deſſus du plan QM du Levier DM, & $E-S$ lorſque ce point G ſera au deſſous de ce plan du côté de ϖ.

Or (*Lem.* 3. *Corol.* 7.) GM. GS :: R. $S=\frac{R\times GS}{GM}$. Donc ayant déja (*art.* 3.) $E=\frac{P\times PE}{PN}$, la charge de l'Ecroue QM ou de la Vis ſuivant PE, parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette Vis, ſera ici $E+S=\frac{P\times PE}{PN}+\frac{R\times GS}{GM}$, lorſque le point G y ſera du côté de β, au deſſus du plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, & $E-S=\frac{P\times PE}{PN}-\frac{R\times GS}{GM}$, lorſque ce point G ſera du côté de ϖ au deſſous de ce plan; c'eſt-à-dire, en general, que la charge préciſe de l'Ecroue ou de la Vis, de P vers E ſuivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de la Vis, ſera ici $E\pm S=\frac{P\times PE}{PN}\pm\frac{R\times GS}{GM}$, dont le ſuperieur du double ſigne ($\pm$) ſera pour le cas du point G au deſſus du plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, & l'inferieur pour le cas où ce point G ſera au deſſous de ce plan.

VI. Telle eſt (*art.* 5.) la charge préciſe de l'Ecroue QM, ou de la Vis VXYZ, de P vers E ſuivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette Vis; & c'eſt tout ce qui lui en réſulte, tant de la part de l'abſolue P ſuivant PN, que de la puiſſance R ſuivant GR, le ſurplus de cette charge abſolue P, étant tout employé (*art.* 3.) parallelement au plan QM du Levier DM, contre le plan touchant FPE, & contre ſon orthogonal MDϖ; & la puiſſance R ne faiſant d'impreſſion qui charge ou ſoulage ce plan QM du Levier DM, que ſuivant ce qu'on lui en compte

compte ici ſuivant GS perpendiculaire à ce plan. Quant à la force employée à ſoutenir cette charge préciſe (*art.* 5.)

$F \pm S = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{GM}$ de la Vis ou de ſon Ecroue ſuivant

PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, l'art. 4. vient de faire voir que la force $K = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM}$ de M vers K ſuivant MK perpendiculaire à la droite DM dans le plan de l'Ecroue QM, ou du Levier DM, eſt tout ce qu'il en reſte à la puiſſance R pour ſoutenir cette charge. On a vu auſſi dans l'art. 3. que de la charge abſolue P ſuivant PN, il réſulte auſſi une force $L = \frac{P \times EF}{PN}$ de E vers F ſuivant EF, ou de P vers L ſuivant ſa parallele PL perpendiculaire auſſi (*art.* 2.) à la droite DM dans le plan QM de l'Ecroue, ou du Levier DM; laquelle force L eſt conſéquemment pour ou contre la force K, ſelon que le point F, ou que la direction PN de la charge abſolue P, eſt du côté de K, ou du côté oppoſé par rapport au plan $MD\pi$. Ainſi ces deux forces K, L, ayant (*art.* 3. 4.) des directions paralleles en M, P, l'employée à ſoûtenir la charge ſuivant PE, qu'on vient de trouver (*art.* 5.) à la Vis, ou à ſon Ecroue, ſera ici $K \pm L = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{P \times EF}{PN}$, dont le ſuperieur du double ſigne ($\pm$) ſera pour, lorſque le point F, ou la direction PN de la charge abſolue P, ſera du côté de K par rapport au plan $MD\pi$; & l'inferieur pour le cas où ces points F, K, ſeront de part & d'autre de ce plan.

VII. Donc (*art.* 5. 6.) toute la queſtion ſe réduit ici à une charge $E \pm S = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$ de l'Ecroue QM ou de la Vis VXYZ, dirigée de P vers E ſuivant PE parallele

(*art.* 2.) à l'axe BF de cette Vis, & en équilibre avec une puiſſance $K \pm L = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{P \times EF}{PN}$, dont les forces partiales K, L, ont en M, P, des directions MK, PL, perpendiculaires à la droite DM dans le plan de l'Ecroue QM ou de ce Levier DM: le tout en prenant ici les particuliers des ſignes generaux ($\pm$), comme dans les art. 5. 6.

VIII. Or ſi l'on appelle M une force qui, dirigée de M vers K ſuivant MK, ou en ſens directement contraire, c'eſt-à-dire, dans le ſens que la force L le ſeroit de P vers L ſuivant PL parallele à MK, auroit en M le même *Moment* (*Déf.* 22.) ſur le Levier DM, que cette force L auroit en P ſur le même Levier DM, & de même appui D: le Corol. 9. du Th. 21. donnera $L \times DP = M \times DM$, & conſequemment $\frac{M \times DM}{DP} = L$ (*art.* 3.) $= \frac{P \times EF}{PN}$. Donc (*art.* 7.) toute la queſtion ſe réduit ici à une charge $= \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$ de la Vis ou de ſon Ecroue, en équilibre avec une force ou puiſſance $= \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{M \times DM}{DP}$, appliquée en M au Levier DM ſuivant une direction MK perpendiculaire à ce Levier dans le plan de l'Ecroue QM ou de ce Levier DM. Par conſequent ce cas étant celui du Th. 32. un raiſonnement ſemblable à celui de la démonſtration de ce Théoreme, donnera ici (en prenant O pour la circonference d'un cercle décrit du rayon DM) $2 \times AC. O :: \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{M \times DM}{DP} . \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$ (venant de trouver $\frac{M \times DM}{DP} = \frac{P \times EF}{PN}$) $:: \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{P \times EF}{PN} . \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$.

D'où réſulte $\frac{2 \times P \times AC \times PE}{PN} \pm \frac{2 \times R \times AC \times GS}{SM} = \frac{R \times O \times SM \times TD}{GM \times TM}$

Digitized by Google

$\mp\frac{P\times O\times EF}{PN}$, ou $\frac{2\times P\times AC\times PE\mp P\times O\times EF}{PN} =$

$\frac{R\times O\times SM\times SM\times TD\mp 2\times R\times AC\times GS\times GM\times TM}{SM\times GM\times TM}$, ou bien auſſi

$2\times P\times AC\times PE\times SM\times GM\times TM\mp P\times O\times EF\times SM\times GM\times TM = R\times O\times SM\times SM\times TD\times PN\mp 2\times R\times AC\times GS\times GM\times TM\times PN$; dans laquelle équation,

1°. L'art. 6. fait voir que le ſuperieur du double ſigne ($\mp$) du premier terme eſt pour lorſque le point F ou la direction PN de la charge abſolue P de la Vis ou de l'Ecroue, ſera du côté de K par rapport au plan MDϖ; & l'inférieur, pour lorſque ces deux points F, K, ſeront de part & d'autre de ce plan.

2°. L'art. 5. fait pareillement voir que le ſupérieur du double ſigne ($\mp$) du ſecond terme de cette derniere équation, eſt pour lorſque le point G, ou la partie MG de la direction RM prolongée de la puiſſance R, eſt du côté de β au deſſus du plan QM de l'Ecroue, ou du Levier DM; & l'inférieur, pour lorſque ce point G ou cette partie MG de la direction RM prolongée de la puiſſance R, eſt au deſſous de ce même plan du côté de ϖ.

Donc R. P :: $2\times AC\times PE\times SM\times GM\times TM\mp O\times EF\times SM\times GM\times TM$. $O\times SM\times SM\times TD\times PN\mp 2\times AC\times GS\times GM\times TM\times PN$. dans laquelle analogie les ſignes particuliers des generaux ($\mp$) ſont pour les cas marquez dans les précedens nomb. 1. 2. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si la direction PN de la charge abſolue P de la Vis VXYZ, ou de ſon Ecroue QM étoit en PF dans le plan touchant FPE de cette Vis en PE; cette hypotheſe, qui feroit tomber N en F, rendroit ſeulement NF = O, & PN = PE; ce qui n'apporteroit aucune autre varieté à la précedente analogie generale de ce Théoreme-ci, que d'y changer PN en PF.

Mais ſi la direction PN de cette charge abſolue P, ſe trouvoit en PE parallele (*dém. art.* 2.) à l'axe $\beta\pi$; la confuſion qui ſe trouveroit alors des points N, F, avec le point E, rendant NF=O=FE, & PN=PF=PE, changeroit pour lors la précedente analogie generale du Théoreme en R. P :: $2\times AC\times SM\times GM\times TM$. $O\times SM\times SM\times TD \mp 2\times AC\times GS\times GM\times TM$.

COROLLAIRE II.

Si outre cette hypotheſe de PN en PE, c'eſt-à-dire, de la charge abſolue P de la Vis ou de ſon Ecroue, dirigée ſuivant PE parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, on ſuppoſe la direction RMG de la puiſſance R dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM; cette nouvelle hypotheſe, qui confond le point G avec le point S; & GMR avec SMH, rendant ainſi GS=O, & GM=SM, changera pour ici l'analogie du précedent Corol. 1. en R. P :: $2\times AC\times TM$. $O\times TD$.

COROLLAIRE III.

Enfin ſi aux deux hypotheſes du précedent Corol. 2. on ajoute celle de MR ou MH en MK perpendiculaire à DM dans le plan de ce Levier ou de l'Ecroue QM; cette troiſiéme hypotheſe rendant MS ou MT (prolongement de RM confondue avec HM par la ſeconde des deux autres dans le Corol. 2.) perpendiculaire auſſi à DM, rendroit l'angle TMD droit, de même que l'eſt (*démonſtr. art.* 4.) TDM; & rendant ainſi MT, DT, paralleles infinies & égales entr'elles, changeroit l'analogie du précedent Corol. 2. en R. P :: $2\times AC$. O. pour ce cas-ci; qui eſt celui du Th. 32. d'où l'on voit, comme dans ce Th. 32. que l'on aura ici la puiſſance R à la charge abſolue P de la Vis ou de ſon Ecroue, comme un pas ($2\times AC$) de cette Vis à la circonference (O) d'un cercle décrit du rayon DM.

Ce dernier cas de la direction PN de la charge abſolue P de la Vis ou de ſon Ecroue, parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, &

de la direction MR de la puiſſance R perpendiculaire en M à DM dans le plan QM de l'Ecroue ou de ce Levier DM, lequel eſt celui du Th. 33. & le plus ſimple de tous, eſt le ſeul que je ſçache avoir été propoſé juſqu'ici ſur la Vis; & la démonſtration qu'on en voit dans le precedent Corol. 3. fait voir que ce Th. 33. n'eſt qu'un cas ou un Corollaire très-limité du précedent Th. 34.

SCHOLIE.

I. Pour faciliter le calcul du précedent Th. 34. & de ſes Corollaires, il eſt à conſiderer,

1°. Que la direction GMR de la puiſſance R étant donnée de poſition par rapport au plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, ſur lequel plan GS eſt (*démonſtr. art.* 4.) perpendiculaire en S; l'angle GMS de cette direction avec ce plan, ſera pareillement donné avec ſon complement MGS à un droit, & avec la poſition de MS ſur ce plan; & conſequemment auſſi avec l'angle DMS ou DMT compris entr'elle & DM ſur le même plan.

2°. Que la direction PN de la charge abſolue P de la Vis, ou de ſon Ecroue, étant auſſi donnée par rapport à l'axe ℓ⁊ de cette Vis pareillement donné de poſition, & conſequemment au plan touchant FPE de cette Vis en PE parallele (*démonſtr. art.* 2.) à ſon axe ℓ⁊, ſur lequel plan NF eſt (*demonſtr. art.* 2.) perpendiculaire en F; la poſition de PE ſur ce plan touchant FPE, ſera auſſi donnée avec celle de la ſection commune PE de ce plan avec le plan MD⁊; & conſequemment les angles NPF, FPE, le ſeront de même avec les complemens PNF, PFE, de chacun d'eux à un droit, la conſtruction ſuppoſée rendant (*démonſtr. art.* 2.) FE perpendiculaire en E ſur PE, comme NF en F ſur PE.

II. Cela poſé, ſoient appellez *a*, le ſinus total; *b*, le ſinus de l'angle MGS donné ſuivant le nomb. 1. de l'art. 1. *c*, le ſinus de ſon complement GMS à un droit; *m*, le ſinus de l'angle DMS ou DMT pareillement donné ſuivant le même nomb. 1. de cet art. 1. *n*, le ſinus de l'an-

gle PNF, auſſi donné ſuivant le nomb. 2. de ce même art. 1. p, le ſinus de l'angle PFE, pareillement donné dans le même nomb. 2. de cet art. 1. & q, le ſinus de ſon complement FPE. Voici ces noms en liſte pour les rendre plus preſens.

Sinus total ou de l'angle droit,	a.
Sinus de l'angle MGS,	b.
Sinus de ſon complement GMS,	c.
Sinus de l'angle DMS ou DMT,	m.
Sinus de l'angle PNF,	n.
Sinus de l'angle PFE,	p.
Sinus de ſon complement FPE,	q.

III. Suivant ces noms de l'art. 2. le Corol. 2. du Lem. 8. donnera $a.b::GM.SM=\frac{b}{a}\times GM$. Et $a.m::TM.TD=\frac{m}{a}\times TM$. Et $q.p::EF.PE=\frac{p}{q}\times EF$. De plus $p.a::PE.PF$. Et $n.a::PF.PN$. Ce qui (en multipliant par ordre) donne $np.aa::PE.PN$ (à cauſe de $PE=\frac{p}{q}\times EF$) $::\frac{p}{q}\times EF.PN=\frac{aa}{nq}\times EF$. De plus encore $b.a::SM.GM$. Et $a.c::GM.GS$. Ce qui (en raiſon ordonnée) donne auſſi $b.c::SM.GS=\frac{c}{b}\times SM$.

Par conſequent on aura ici $PE=\frac{p}{q}\times EF$, $SM\times TD\times PN=\frac{b}{a}\times GM\times\frac{m}{a}\times TM\times\frac{aa}{nq}\times EF=\frac{bm}{nq}\times GM\times TM\times EF$, & $GS\times PN=\frac{c}{b}\times SM\times\frac{aa}{nq}\times EF=\frac{aac}{bnq}\times SM\times EF$.

Donc en ſubſtituant ces valeurs de PE, $SM\times TD\times PN$, $GS\times PN$, en leur place dans l'analogie generale du precedent Th. 34. elle deviendra encore en general $R.P::\frac{2p}{q}\times AC\times EF\times SM\times GM\times TM\mp O\times EF\times SM\times GM\times TM.\frac{bm}{nq}\times O\times SM\times GM\times TM\times EF\mp\frac{2aac}{bnq}\times AC\times SM\times EF\times GM\times TM::\frac{2p}{q}\times$

$AC \mp O. \frac{bm}{nq} \times O \mp \frac{2aac}{bnq} \times AC :: 2bnp \times AC \mp bnq \times O. \; bbm \times O \mp 2aac \times AC.$ c'eſt-à-dire, R. P :: $2bnp \times AC \mp bnq \times O. \; bbm \times O \mp 2aac \times AC.$ toute exprimée en ſinus, qui multiplient le pas ($2 \times AC$) de la Vis, & la circonference (O) d'un cercle décrit du rayon DM: les ſignes particuliers des generaux ($\mp$) ſe prendront encore ici comme dans l'analogie generale du Théoreme transformée en celle-ci, dont les ſinus en rendent le calcul le plus facile qu'il puiſſe être, ſans rien diminuer de ſa generalité.

IV. Quant aux analogies particulieres des Corollaires précedens de ce Th. 34. réſultantes de ſa generale, les voici de même en ſinus, réſultantes de la derniere du précedent art. 3.

1°. Si, comme dans le Corol. 1. la direction PN de la charge abſolue P de la Vis ou de ſon Ecroue, étoit en PE parallele (*démonſtr. art.* 2.) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, cette hypotheſe, qui confond PN, PF, avec cette parallele PE, & leurs points N, F, avec le ſien E rendant ainſi droits les angles PNF, PFE, à l'inſtant de cette confuſion, & leurs complemens infiniment petits ou nuls en P par rapport à eux, rendroit alors (ſuivant les noms de l'art. 2.) leurs ſinus $n = a$, $p = a$, & $q = o$: ce qui réduiroit pour ici la derniere analogie generale du précedent art. 3. à R. P :: $2aab \times AC. \; bbm \times O \mp 2aac \times AC.$

2°. Si de plus on ſuppoſe que la direction GMR de la puiſſance R ſoit dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, comme dans le Corol. 2. Cette autre hypotheſe, qui confond auſſi cette direction GMR avec SMH dans ce plan, & ſon point G avec celui S de celle-ci, rendant ainſi l'angle MGS droit à l'inſtant cette confuſion, & ſon complement GMS infiniment petit ou nul par rapport à lui, rendroit alors (ſuivant les noms de l'art. 2.) le ſinus $b = a$, & le ſinus $c = o$; ce qui réduiroit pour ici l'analogie précedente du nomb. 1. à R. P :: $2a^3 \times AC. \; aam \times O$ :: $2a \times AC. \; m \times O.$

3°. Enfin ſi aux deux hypotheſes du précedent nomb. 2.

dont la ſeconde confond la droite GMR avec SMH dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, l'on ajoûte celle de MR ou de MH en MK perpendiculaire à DM dans ce plan, ainſi que dans le Corol. 3. ce qui eſt le cas du Th. 33. Cette troiſiéme hypotheſe rendant l'angle DMS droit, & conſequemment ſon ſinus $m=a$, réduiroit alors l'analogie du précedent nomb. 2. à cette autre, R. P :: 2×AC. O. qui eſt la même qu'on a déja trouvée pour ce cas-ci dans le Th. 33. & dans le précedent Corol. 3.

DEFINITION XXIX.

FIG. 243. 244. La Vis employée comme ci-deſſus (Th. 33. & Corol. 3. du Th. 34.) avec ſon Ecroue ſeulement, s'appelle *Vis ſimple*, ou ſimplement *Vis*; & lorſqu'elle eſt appliquée à d'autres Machines, elle s'appelle *Vis compoſée*, laquelle prend le nom de *Vis ſans fin*, quand, ſans Ecroue, ſon cordon s'engraine dans une roue dentée, comme dans la Fig. 245. parce qu'alors en tournant ſur ſon axe fixe, elle fait tourner ſans fin cette roue par l'engrenement continuel des ſpires ou helices de ſon cordon entre les nouvelles dents que le tournoyement de la roue lui preſente, & fait entrer ces dents ſans ceſſe les unes après les autres entre ces mêmes ſpires à meſure que d'autres dents de cette roue en ſortent auſſi les unes après les autres.

THEOREME XXXV.

FIG. 245. *Soit la Vis DAGP mobile autour de ſon axe fixe DG par le moyen d'une Manivelle DFR, & dont les ſpires ou helices AP, BP, du cordon s'engrainent entre les dents P de la Roue PS d'un Tour mobile auſſi autour de ſon centre fixe C avec ſon rouleau HE, ſur lequel s'entortille la corde QHE, à laquelle pende un poids quelconque Q, que la puiſſance R, appliquée en R au manche FR de la Manivelle DFR, ſoûtienne en equilibre ou en repos par le moyen de toute la Machine.*

Je dis que ſi l'on imagine le rayon CP de la Roue dentée PS,

PS, lequel rencontre ſon rouleau HE en E, & une perpendiculaire RK à l'axe GD prolongé en K, l'équilibre ici ſuppoſé entre la puiſſance R & le poids Q ſur une telle Machine, y donnera toûjours cette puiſſance R à ce poids Q, comme le produit d'un des pas AB de la Vis par le rayon EC du rouleau, ſera au produit du rayon CP de la Roue par la circonference entiere du cercle décrit du rayon RK; c'eſt-à-dire, qu'en appellant O cette circonference circulaire, l'on aura toûjours ici R. Q :: AB×EC. CP×O.

DEMONSTRATION.

Soit appellée P la réſiſtance que le poids Q fait faire à la Roue dentée au tournoyement de la Vis, par le moyen duquel la puiſſance R tend à enlever ce poids Q; l'on aura (*Th.* 33. *& Corol.* 2. *du Th.* 34. *& Corol.* 3. *du Th.* 34.) cette puiſſance R à cette réſiſtance P, comme le pas AB de la Vis à la circonference Z du cercle, que la même puiſſance R tend ainſi à décrire du rayon RO autour du centre K; c'eſt-à-dire, R. P :: AB. O. De plus on aura (*Th.* 19. *Corol.* 1.) P. Q :: CE. CP. Donc (en multipliant par ordre) l'on aura R. Q :: AB×CE. CP×O. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

I. On a vû dans les art. 2. des Schol. des Th. 17. 18. comment un homme peut s'enlever ſoi-même à la hauteur d'une voûte par le moyen des Poulies à Mouffles; on a vû auſſi dans l'art. 3. du Schol. du Th. 20. comment cet homme le peut auſſi ſeul par le moyen d'un Criq: voici preſentement comment il le peut faire encore par le moyen de la Vis ſans fin. Il n'a qu'à attacher la cage de cette Machine fermement au bord ou au dedans du panier dans lequel il ſe veut mettre, en ſorte qu'il ait la liberté de tourner la Manivelle, & par ſon moyen la Vis & la Roue avec ſon rouleau; attacher enſuite ſur ce Rouleau la corde déja attachée au haut de la voûte; ſe mettre

III. Cela posé, le Th. 33. le Corol. 2. du Th. 34. & le Corol. 3. du Th. 35. donneront R. P :: AB. Z.

Le Cor. 1. du Th. 19. donnera aussi
P. E :: CE. CR.
E. K :: HK. EG.
K. M :: LM. LK.
M. T :: ST. MN.
T. Q :: XV. XT.

Donc (en multipliant par ordre) R. Q :: AB×CE×HK×LM×ST×XV. Z×CR×EG×LK×MN×TX. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Donc si les Vis βEγK, λMμT, étoient par tout chacune de même grosseur, ayant alors EG=KT, MN=ST; l'on auroit aussi pour lors R. Q :: AB×CE×LM×XV. Z×CR×LK×TX. c'est-à-dire, qu'alors la puissance R seroit au poids Q, comme le produit des rayons de tous les pignons & du rouleau, multipliez entr'eux, & par un des pas AB de la premiere Vis DAGP, est au produit des rayons de toutes les roues, multipliez entr'eux, & par la circonference Z du cercle qui auroit pour rayon la distance RO de la puissance R à l'axe GDO de cette même Vis DAGP.

Digitized by Google

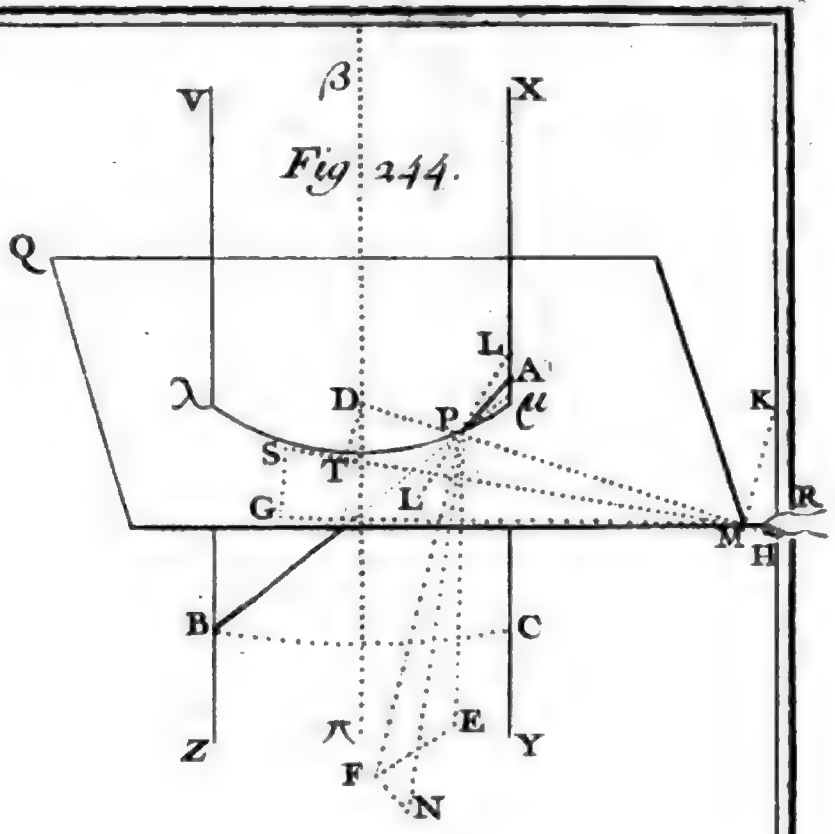


Fig. 244.

P

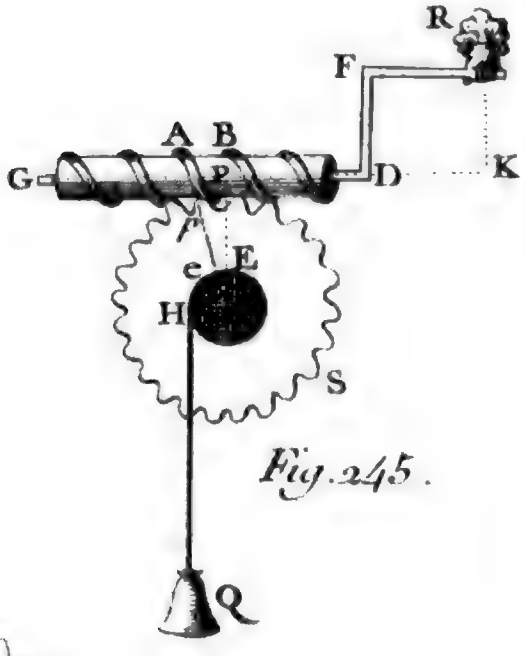
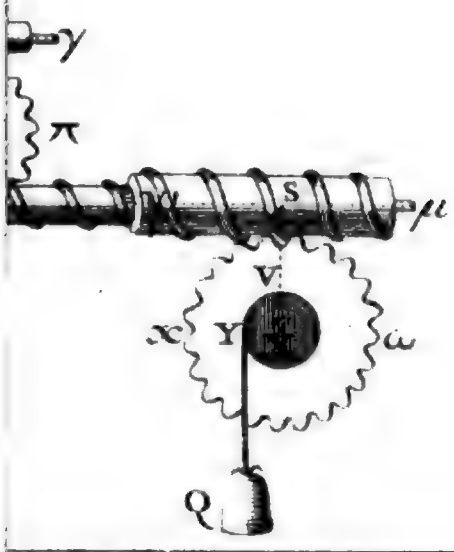


Fig. 245.

.246.



Digitized by Google

Digitized by Google

SECTION VIII.

Du Coin.

LE Coin étant beaucoup moins propre à mouvoir qu'à fendre des corps durs, & le Principe que j'expoſai en 1687. au jugement des Connoiſſeurs dans le *Projet* de cette Mécanique-ci me paroiſſant applicable ſans peine à cette Machine de la maniere que je l'appliquois aux autres, pour en donner un eſſai, & dans une auſſi grande univerſalité que celle à laquelle je les élevai ; je négligeai de parler de celle-ci dans ce Projet. Cependant comme il s'agit de l'executer, & de rendre cette Mécanique ou Statique complete, le rang que l'on donne d'ordinaire au Coin parmi les Machines élementaires, propres à faciliter les mouvemens, peut-être à cauſe de ceux de ſéparation qu'il facilite entre les parties des corps à fendre, m'engage à traiter pareillement ici de cette Machine.

DEFINITION XXX.

J'appelle en general *Coin* un corps dur de figure quelconque, propre à entrer par force dans un autre corps dur, & à le fendre ainſi en deux. On fait d'ordinaire le Coin en Priſme triangulaire, tel que ABEFCD (Fig. 247.) dont les baſes paralleles oppoſées AEB, DFC, ſont deux triangles iſoſcecles égaux & ſemblables ; deſquels un, par exemple, AEB, mu parallelement à lui-même ſuivant AD perpendiculaire à ſon plan, décriroit ou traceroit ce Coin. Le parallelogramme ABCD en eſt appellé la *Tête* ou la *Baſe* ; la droite EF en eſt appellée le *Tranchant*, lequel y eſt parallele à cette baſe ou tête ; & les deux parallelogrammes oppoſez BEFC, AEFD, dont ce tranchant eſt la ſection commune, s'appellent les *Faces* ou les *Côtez* du Coin. Fig. 247.

D'ordinaire on n'exprime ce Coin qu'en profil par ſon triangle générateur AEB, dont la pointe E en exprime le *tranchant*; ſa baſe AB exprime celle du Coin ou ſa tête; les côtez AE, BE, de triangle expriment ceux de ce Coin ou ſes *faces*; & la hauteur de ce triangle, c'eſt-à-dire, la diſtance de ſa pointe E à ſa baſe AB, eſt elle-même la *hauteur* de ce Coin. C'eſt pour cela qu'il s'appellera ici iſoſcelle comme ce triangle, pour le diſtinguer des autres Coins de figures quelconques, dont nous allons parler, & que nous ne repreſenterons ainſi qu'en profil, pour moins d'embarras de lignes dans les Figures.

DEFINITION XXXI.

On appellera ici *Réſiſtance abſolue* d'un corps à rompre, à caſſer, ou à fendre en quelqu'endroit que ce ſoit, ce que les fibres de ce corps en feroient à ſe caſſer ou à ſe détacher toutes à la fois en cet endroit: mais parce qu'on peut douter qu'il y ait aucun corps dont les fibres caſſent ou ſe détachent ainſi toutes à la fois à l'endroit où il ſe romproit, de quelque maniere qu'on le rompît, même en le tirant ſuivant ſa longueur; nous appellerons en general *Réſiſtance de Tenacité*, ou *Réſiſtance totale* des fibres d'un corps, ce que celles qui s'oppoſent à ſa rupture, en font toutes enſemble à la force qui tend à le rompre, ou à le fendre, ſoit que vaincues par cette force, elles caſſent ou ſe détachent toutes à la fois, ou ſeulement les unes après les autres, en prêtant ſucceſſivement juſqu'à certaines longueurs avant que de ſe caſſer ou de ſe détacher, en quelque proportion de longueurs qu'elles prêtent juſqu'à ce terme d'alongement. Enfin nous appellerons *Réſiſtances des côtez de la fente* d'un corps à fendre par le moyen d'un Coin, ce que ces côtez de la fente, retenus enſemble par la réſiſtance des fibres qui s'oppoſent à leur ſéparation, en font aux efforts des côtez du Coin contr'eux pour les écarter malgré ces fibres, & les forcer ainſi de permettre à ce Coin d'entrer plus avant dans le corps à fendre.

REMARQUE.

Je ne ſçais point d'Auteur qui ait recherché la force du Coin ſur d'autre que ſur l'iſoſcelle ; je n'en ſçais non plus aucun qui avant M. Deſcartes l'ait conſideré indépendamment de toute autre Machine : de tous ceux qui ont parlé des proprietez du Coin avant cet Auteur, je n'en ſçais point qui n'ayent rapporté la force de cette Machine à celle du Levier, ou à la réſiſtance du plan incliné, en prenant la force du Coin pour celle d'un coup dont il ſeroit frappé perpendiculairement à ſa baſe, ou (ce qui revient au même) pour celle dont il tend à s'enfoncer dans le corps à fendre.

I. Les premiers ont regardé les côtez du Coin comme des Leviers, dont les uns ont mis les appuis à la pointe de ce Coin, & les autres à l'entrée de la fente qu'il fait dans le corps à diviſer : mais ne ſçachant à quelles diſtances de chacun de ces appuis ſuppoſez, ils devoient conſiderer la force employée pour enfoncer le Coin & la réſiſtance du corps à fendre, ils n'en ont pû conclure aucun rapport entre cette réſiſtance & cette force.

II. Quant à ceux qui ont regardé les côtez du Coin comme des plans inclinez, ils ne nous ont donné guéres plus de lumiere : la plûpart ſe contentent auſſi d'expliquer la queſtion ſans la décider ; & les autres, en la décidant, ſe partagent en deux ſentimens. Il y en a parmi eux qui diſent qu'à l'inſtant d'équilibre entre la force dont on frappe le Coin perpendiculairement à ſa tête, & la réſiſtance du corps à fendre, cette force du Coin eſt toûjours à cette réſiſtance, comme la demi-baſe de ce Coin eſt à ſa hauteur ; d'autres prétendent que c'eſt comme ſa demi-baſe à un de ſes côtez.

III. Enfin ceux qui ont conſideré le Coin indépendamment de toute autre Machine, ſe trouvent encore de deux ſentimens differens : les uns croyent qu'à l'inſtant d'équilibre entre la force du Coin & la réſiſtance du corps à fendre, cette force eſt toujours à cette réſiſtance comme la

baſe du Coin eſt à ſa hauteur ; & d'autres ſoûtiennent que c'eſt comme la plus grande largeur de la fente à ſa profondeur. Ce qui eſt encore tout different ; puiſque ceux-ci ne veulent pas que la pointe, ou le tranchant du Coin aille juſqu'au fond de la fente, ni par conſequent que la baſe du Coin ſoit à ſa hauteur comme la largeur de la fente eſt à ſa profondeur.

IV. Outre ces Auteurs, il y en a encore qui conſiderant d'abord le Coin indépendamment de toute autre Machine, & le faiſant enſuite dépendre du Levier, diſent que ſuivant chacune de ces deux manieres, la force du Coin eſt à la réſiſtance du corps à fendre comme la baſe de ce Coin eſt à la ſomme de ſes côtez ; ce qui s'accorde avec le ſecond des ſentimens du précedent art. 2.

V. La diverſité de tous ces ſentimens fait déja voir qu'il y a là du paralogiſme, de quelque côté qu'il ſoit, & en quelque ſens (*Déf.* 30.) que le mot de *Réſiſtance* y ſoit employé : on en jugera par les Th. 39. 40. qui tant pour les réſiſtances rélatives (*Déf.* 1. 22. 31.) que pour les abſolues, comprendront en general tous les cas poſſibles de cette queſtion, c'eſt-à-dire, toutes les configurations poſſibles des Coins avec toutes les directions imaginables de la force qui les frappe ou les pouſſe, ſoit que ces côtez enfoncent, ou non, juſqu'au fond de la fente du corps à diviſer. On va commencer par le rapport de cette force abſolue (*Déf.* 31.) aux réſiſtances rélatives (*Déf.* 22.) des parties du corps à fendre, que le Coin tend à écarter l'une de l'autre ; parce que de la connoiſſance de ce rapport dépend celle de cette force abſolue (*Déf.* 1. 22. 31.) aux réſiſtances rélatives des parties du corps à fendre, que le Coin tend à écarter l'une de l'autre ; parce que de la connoiſſance de ce rapport dépend celle du rapport de cette force abſolue du Coin à la réſiſtance abſolue du corps à fendre, & auſſi pour voir en quel ſens les ſentimens précedens ſont vrais ou faux.

Ne craignant rien tant que d'offenſer qui que ce ſoit, je n'ai nommé juſqu'ici aucun des Auteurs que j'ai fait voir s'être mépris,

mépris, excepté M. Borelli, & le P. Vannius, que j'ai été force de dire dans la réflexion italique qui précede le Corol. 1. du Th. 1. être de ce nombre, ne pouvant faire ſentir leurs mépriſes dans ce qu'ils ont dit de contraire à ce que j'ai établi ci-deſſus, ſans citer leurs paroles pour les ſuivre pied à pied, & conſequemment ſans citer leurs Livres, qui les auroient également décelez. Sans cela j'aurois tû leurs noms, comme j'ai tû ceux des Auteurs que j'ai refutez juſqu'ici dans cet Ouvrage ſur leurs ſimples propoſitions : c'eſt pour cette derniere raiſon que je ne nomme point ici non plus ceux dont je viens de rapporter les ſentimens ſur le Coin, leſquels je vas faire voir être les uns faux, & les autres trop limitez.

THEOREME XXXVII.

De quelque maniere qu'un Coin quelconque AEB ſoit pouſſé dans la fente HRK d'un corps δελμ à fendre : ce qu'il employe de force pour diviſer ainſi ce corps, eſt toûjours dirigé ſuivant une ligne droite qui paſſe par l'angle ou la pointe R de la fente, & par un point D, d'où l'on peut toûjours mener deux perpendiculaires aux côtez HR, KR, de cette fente HRK, en des points H, K, où le Coin AEB rencontre ces côtez de la fente, en quelque rapport que cette direction DR diviſe l'angle HRK de la fente. Fig. 248. 249. 250. 251.

DEMONSTRATION.

Il eſt viſible qu'un Coin AEB, quel qu'il ſoit, & de quelque force ou maniere qu'il ſoit pouſſé, ne tend à fendre un corps δελμ qu'en vertu (*Déf.* 22.) des *Momens* égaux en ſens contraires qu'il cauſe aux côtez HR, KR, de la fente HRK, dans laquelle on le ſuppoſe, par les efforts perpendiculaires (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) qu'il fait contr'eux pour les écarter l'un de l'autre ; puiſque ſi ces *Momens* étoient inégaux, leur difference ne tendroit qu'à mouvoir ce corps entier δελμ dans le ſens du plus fort de ces deux *Momens*, & nullement à le diviſer ou fendre. Donc tout ce que le Coin AEB employe de force (que

j'appelle G) à fendre ce corps, doit être ſuivant une direction DG, telle que cette force G ſe puiſſe décompoſer en deux autres (que j'appelle M, N, ſuivant DM, DN, perpendiculaires aux côtez HR, KR, de la fente HRK en des points H, K, où ce Coin les rencontre; & qu'il en réſulte des *Momens* égaux à ces côtez HR, KR, de la fente; c'eſt-à-dire (*Déf.* 22.) en ſorte qu'il en réſulte M×HR=N×KR; & conſequemment M. N :: KR. HR. Or la force G ſuivant DG eſt (*Lem.* 3. *Coral.* 6.) à chacune des deux M, N, dans leſquelles elle ſe décompoſe, comme cette diagonale DG du parallelogramme DMGN, eſt à chacun de ſes côtez correſpondans DM, DN; ce qui donne auſſi M. N :: DM. DN. Donc on aura toûjours ici DM. DN :: KR. HR. Ce qui donnant DM× HR=DN×KR, fait voir (*Lem.* 12.) que la direction DG de la force G employée par le Coin AEB à fendre le corps δελμ, doit paſſer par l'angle R de la fente HRK, & par quelque point D d'où l'on puiſſe mener deux perpendiculaires DM, DN, aux deux côtez HR, KR, de la fente HRK en des points H, K, où ces côtez ſoient rencontrez par le Coin AEB, en quelque rapport que cette direction DR de la force G toute employée à fendre le corps δελμ, diviſe l'angle HRK de la fente dans laquelle le Coin AEB tend à s'enfoncer de cette force G. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Si l'on imagine un cercle qui paſſe par les trois points H, R, K, il ſuit de-là que ſon diamétre mené du point R, en rencontrera la circonferenee en un autre point D, d'où l'on pourra toûjours mener deux perpendiculaires DM, DN, aux côtez HR, KR, de la fente HRK, par les deux points H, K, où l'on ſuppoſe que ces deux côtez ſont rencontrez par le Coin AEB.

THEOREME XXXVIII.

Soit un coup de marteau ΦOF d'une direction quelconque FP, donné en F ſur la baſe AB de tel coin AEB qu'on voudra, en équilibre avec la réſiſtance que les côtez HR, HK, de la fente HRK du corps à fendre δελμ, dans laquelle ce coup tend à enfoncer ce Coin, ſont à s'écarter davantage, ou avec ce que ces côtez HR, KR, ſont d'effort pour ſe rapprocher l'un de l'autre, s'ils ont du reſſort. Soit en F une perpendiculaire FΠ à la baſe AB du Coin, laquelle FΠ ſoit rencontrée en C par le diamétre RD prolongé du cercle imaginé par trois points H, R, K, deſquelles le ſecond R ſoit la pointe ou le fond de la fente HRK; & les deux autres H, K, deux quelconques de ceux où le Coin AEB rencontre les deux côtez HR, KR, de cette fente, auſquels côtez les droites DH, DK, ſeront ainſi perpendiculaires. Enfin ſur ces perpendiculaires DH, DK, prolongées ſoient les côtez DM, DN, d'un parallelogramme MN, dont la diagonale DG de grandeur arbitraire, ſoit ſur DR prolongée à volonté. Fig. 248. 249. 250. 251.

Cela fait, je dis qu'en cas d'équilibre entre la force abſolue du coup de marteau ΦOF ſuivant FP, & les réſiſtances en H, K, des côtez HR, KR, de la fente HRK du corps δελμ à fendre; cette force abſolue du coup de marteau ΦOF, ſuivant FP, ſera toûjours à la ſomme de ces réſiſtances en H, K, des côtez HR, KR, de la fente HRK de ce corps, comme le produit du quarré du ſinus total par la diagonale DG du parallelogramme DMGN, ſera au produit des ſinus des complemens des angles PFΠ, ΠCZ, multipliez entr'eux, & par la ſomme DM + DN des côtez DM, DN, de ce parallelogramme DMGN.

DEMONSTRATION.

I. Il eſt viſible (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) que de la force abſolue du coup de marteau ΦOF ſuivant FP en F ſur la baſe AB du Coin AEB, il en réſultera une autre à ce Coin ſuivant FΠ perpendiculaire à cette baſe AB; & que de

celles-ci il en réſultera auſſi une à ce même Coin AEB ſuivant CR, ou (*Th.* 38.) DG, de laquelle il en réſultera pareillement deux autres ſuivant DM, DN, directement contraires aux réſiſtances en H, K, des côtez HR, KR, de la fente HKR du corps à fendre; la ſomme deſquelles réſiſtances ſera la totale que ces côtez de cette fente HRK font au Coin en ces points H, K. Pour plus de brieveté & de netteté ou clarté, voici les noms de toutes ces forces, & des ſinus précedens, après avoir fait des points quelconques P, Π, pris à volonté ſur FP, FΠ, les perpendiculaires PQ en Q ſur FΠ, & Πβ en β ſur CR prolongée à volonté.

Forces	Abſolue du coup de marteau φOF ſuivant FP,	F.
	Réſultante de F ſuivant FΠ ou CΠ,	C.
	Réſultante de C ſuivant CR ou DG,	G.
	Réſultante de G ſuivant DM,	M.
	Réſultante auſſi de G ſuivant DN,	N.
Réſiſtances	En H,	H.
	En K,	K.
	Totale en H, K,	R=H+K.
Sinus	Total,	Q.
	De l'angle FPQ ou BFP d'incidence du coup de marteau ſur AB,	P.
	De l'angle CΠβ,	Π.

II. Cela poſé, on verra (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) que la force abſolue (F) du coup de marteau en F ſuivant FP ſur la baſe AB du Coin AEB, eſt à ce que ce coup fait d'impreſſion ſuivant FΠ ſur cette baſe, & conſequemment à ce qu'il en réſulte de force (C) à ce Coin ſuivant FΠ ou CΠ, comme FP eſt à FQ; & conſequemment auſſi (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le ſinus total (Q) de l'angle droit FQP eſt au ſinus (P) de l'angle FPQ ou BFP d'incidence du coup de marteau φOF ſur la baſe AB du Coin AEB; c'eſt-à-dire, que ſuivant les noms précedens (*art.* 1.) on aura ici F. C :: Q. P.

KR, de la fente HRK ſont en H, K, aux efforts perpendiculaires (M, N,) que le Coin AEB, frappé en F ſuivant FP, fait contr'eux en H, K. Donc (*art.* 4.) F. R :: $Q^2 \times DG.\ P \times \Pi \times \overline{DM + DN}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Or la démonſtration du Th. 38. donne HR. KR :: DN. DM. d'où réſulte HR. HR + KR :: DN. DM + DN. de ſorte qu'ayant DG. DN :: DG. DN. l'on aura ici (en multipliant par ordre) $DG \times HR.\ DN \times \overline{HR + KR}$ :: DG. DM + DN. Donc (en multipliant les antecedens de cette analogie par Q^2, & les conſequens par $P \times \Pi$) l'on aura pareillement $Q^2 \times DG \times HR.\ P \times \Pi \times DN \times \overline{HR + KR}$ :: $Q^2 \times DG.\ P \times \Pi \times \overline{DM + DN}$ (*démonſtr. art.* 5.) :: F. R. c'eſt-à-dire, F. R :: $Q^2 \times DG \times HR.\ F \times \Pi \times DN \times \overline{HR + KR}$.

COROLLAIRE II.

Si l'on mene HL perpendiculaire en Δ ſur DR, & qui prolongée rencontre en L le côté RK de la fente HRK, prolongé auſſi, s'il eſt néceſſaire ; les triangles DKR, LΔR, rectangles (*Hyp.*) en K, Δ, ayant l'angle DRL commun, auront les angles KDR, ΔLR, égaux entr'eux. Par la même raiſon les angles HDR, ΔHR, des triangles DHR, HΔR, rectangles (*Hyp.*) en H, Δ, ſeront égaux entr'eux. Par conſequent ayant ainſi les angles ΔLR ou HLR = NDG, LHR = MDG = NDG, les triangles DNG, LRH, ſeront ſemblables entr'eux, & donneront HL. LR :: DG. DN. Donc en ſubſtituant les deux premiers termes de cette analogie à la place des deux derniers dans la derniere du précedent Corol. 1. l'on aura ici F. R :: $Q^2 \times HL \times HR.\ P \times \Pi \times LR \times \overline{HR + KR}$.

COROLLAIRE III.

Si preſentement on ſuppoſe que la direction DR de la

Digitized by Google

force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps ϑελμ, partage également en deux l'angle ARK de la fente : alors les angles (*Hyp.*) droits DKR, DHR, & en Δ, rendant KR=HR=LR, & HΔ=ΔL, la derniere analogie du précedent Corol. 2. ſe changera ici en F. R :: $Q^2 \times$ Fig. 248.
HL. $P \times \Pi \times \overline{HR+KR}$ :: $2Q^2 \times H\Delta$. $2 \times P \times \Pi \times HR$ :: $Q^2 \times H\Delta$. $P \times \Pi \times HR$. pour tous les cas du preſent Th. 38. ce qui, dans ceux de la Figure 248. où les côtez du Coin touchent par tout ceux de la fente, donnera auſſi F. R :: $Q^2 \times H\Delta$. $P \times \Pi \times HE$.

COROLLAIRE IV.

En quelque rapport que l'angle HRK de la fente ſoit diviſé par la direction DR de la force G avec laquelle le Coin AEB tend à diviſer le corps ϑελμ, ſuppoſons que la direction FP du coup de marteau POF ſur la baſe AB de ce Coin, ſoit ſuivant FΠ perpendiculaire à cette baſe. Cette hypotheſe, qui confond FP avec FΠ, rendant ainſi l'angle FPQ droit, comme l'eſt (*Hyp.*) FQP, & conſequemment auſſi leurs ſinus P, Q, égaux entr'eux.

1°. Les deux dernieres analogies des Cor. 1. 2. ſe changeront ici en F. R :: $Q \times DG \times HR$. $\Pi \times DN \times \overline{HR+KR}$. Et en F. R :: $Q \times HL \times HR$. $\Pi \times LR \times \overline{HR+KR}$. en quelque rapport que l'angle HRK de la fente ſoit diviſé par la direction CR ou DR de la force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps ϑελμ, de quelque maniere que les côtez de ce Coin rencontrent ceux de la fente.

2°. Les deux dernieres analogies du Corol. 3. dans lequel on ſuppoſe que DR diviſe en deux également l'angle HRK de la fente, ſe changeront de même ici pour cette hypotheſe du Corol. 3. en F. R :: $Q \times H\Delta$. $\Pi \times HR$. de quelque maniere encore que les côtez du Coin rencontrent ceux de la fente ; & en F. R :: $Q \times H\Delta$. $\Pi \times HE$. lorſque les côtez du Coin AEB touchent par tout ceux de la fente HRK.

Digitized by Google

COROLLAIRE V.

Fig. 249. 251. Outre la direction FP du coup de marteau ϕOF confondue avec la perpendiculaire FΠ à la baſe AB du Coin AEB ſoit cette perpendiculaire FΠ auſſi confondue avec la direction CR de la force (G) employée par ce Coin pour fendre le corps ϑελμ ; laquelle direction CR ainſi perpendiculaire en F à cette baſe AB, diviſe en deux également l'angle HRK de la fente de ce corps ϑελμ : le tout comme dans les Fig. 249. 251. où le Coin AEB eſt iſoſcele, & ſa baſe AB parallele à HL, qui eſt ici HK, diviſée perpendiculairement en deux parties égales en F, comme celle-ci en Δ, par RD prolongée juſques-là. Ce cas, qui eſt en tout celui qu'on ſuppoſe d'ordinaire, rendant non ſeulement Γ=Q comme dans le précedent Corollaire 2. mais encore, pour la même raiſon, Π=Q, changera pour ici (Fig. 249. 251.) les analogies du nomb. 2. du Corol. 4. en F.R :: HΔ. HR. d'où réſulte F.R :: AF. AE :: AB. 2×AE. pour le cas de la Fig. 249.

Cela fait voir que dans ce cas-ci (qui eſt celui de l'hypotheſe ordinaire) d'un Coin iſoſcele AEB enfoncé dans une fente iſoſcele HRK d'un corps ϑελμ à fendre, & frappé ou pouſſé perpendiculairement à ſa baſe AB en ſon milieu F ſuivant une direction FR qui diviſe en deux également l'angle HRK de la fente du corps à fendre, comme dans les Fig. 246. 248. la force abſolue F, dont ce Coin AEB eſt ainſi frappé ou pouſſé, eſt toûjours à la réſiſtance R, que les côtez HR, KR, de la fente lui font enſemble aux points H, K, marquez ci-deſſus, comme la demi-largeur HΔ de cette fente HRK eſt à un de ſes côtez H, ou comme ſa largeur entiere HK eſt à la ſomme HR + KR de ſes côtez, ſoit que ce Coin ne rencontre cette fente qu'en ces points H, K, comme dans la Fig. 251. ou qu'il la touche par tout juſqu'au fond, comme dans la Fig. 249.

D'où l'on voit que lorſque ce Coin iſoſcele AEB touche par tout juſqu'au fond cette fente iſoſcele HRK, comme dans

dans la Fig. 249. la force abſolue F, dont on le ſuppoſe ici frappé ou pouſſé perpendiculairement à ſa baſe AB en ſon milieu F, eſt toûjours à la réſiſtance R, que lui font enſemble les côtez HR, KR, de cette fente HRK, comme la demi-baſe AF de ce Coin AEB eſt à un de ſes côtez AE conformément au ſecond ſentiment de l'art. 2. de la Remarque qui eſt entre la Déf. 30. & le Th. 38. ou comme la baſe entiere AB de ce Coin eſt à la ſomme AE+BE de ſes deux côtez, conformément auſſi au ſentiment de l'art. 4. de la même Remarque, lequel revient à celui-là.

SCHOLIE.

I. C'eſt ainſi que le précedent Corol. 5. juſtifie le ſecond ſentiment de l'art. 2. & celui de l'art. 4. de la Remarque précedente, leſquels reviennent au même, auquel revient auſſi celui (bien entendu) d'un illuſtre Auteur, dont voici les paroles : *Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi, ſunt ad vim mallei in Cuneum, ut progreſſus Cunei ſecundùm determinationem vis à malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt Cuneo ſecundùm lineas faciebus Cunei perpendiculares.*

II. Quant au premier ſentiment de l'art. 2. & aux deux de l'art. 3. de la Remarque précedente ; ſçavoir, qu'*à l'inſtant d'equilibre entre la force dont on frappe le Coin, & la réſiſtance du corps à fendre, cette force eſt toûjours à cette réſiſtance comme la demi-baſe du Coin à ſa hauteur*, ſelon le premier de ces trois ſentimens ; *comme la baſe entiere du Coin à ſa hauteur*, ſelon le ſecond ; & *comme l'ouverture de la fente à ſa profondeur*, ſuivant le troiſiéme, qui ne ſuppoſe pas, comme les deux autres, que le Coin touche par tout juſqu'au fond les deux côtez de la fente, & ſeulement qu'il les rencontre à l'entrée de l'ouverture de cette fente. L'Auteur du premier de ces trois ſentimens n'en rapporte aucune raiſon ; ainſi l'on ne ſçauroit dire ce qui l'a fait s'y méprendre. Les Auteurs des deux autres tirent la leur de cette maxime, qu'*il y a toûjours équilibre dans*

les Machines, lorſque les viteſſes priſes ſuivant les directions des forces y ſont en raiſon reciproque de ces forces. Cette maxime bien entendue eſt vraye ; mais ces Auteurs ſe ſont mépris dans la détermination de ces directions des vîteſſes des côtez de la fente du corps à fendre : ils les ont priſes paralleles à la baſe du Coin, au lieu qu'elles y ſont perpendiculaires à ces côtez de la fente dans laquelle on le pouſſe, comme ſon action l'eſt ſur ces mêmes côtez ; ce qui rend auſſi ces vîteſſes perpendiculaires aux côtez du Coin, lorſqu'il touche par tout juſqu'au fond ceux de la fente, ou du moins lorſqu'il les touche aux endroits où tombent ces perpendiculaires, lorſque les côtez de la fente ſont courbes.

Fig. 250. 251. III. Au reſte, dans les Fig. 250. 251. je n'ai conſideré les côtez HR, KR, de la fente HRK rencontrez ſeulement en deux points H, K, par le Coin AEB, que pour juſtifier, ſi je l'euſſe pû, le ſecond ſentiment de l'art. 3. de la Remarque précedente, dépendant de cette ſuppoſition. Mais ſi l'on veut que dans ces Fig. 250. 251. H, K, ſoient des parties communes au Coin AEB & à la fente HRK, comme la compreſſibilité des corps le doit faire penſer ; alors DM, DN, perpendiculaires à ces parties H, K, de la fente, ſe trouvant auſſi perpendiculaires aux côtez du Coin dans ces deux cas comme dans tous les autres, ſi l'on prolonge dans tous HΔ juſqu'à la rencontre en θ du côté EB du Coin, auſſi prolongé, s'il eſt néceſſaire ; les angles (*Hyp.*) droits DHE, DKB, & Δ, qui rendent les angles HθE=GDN & θHE=GDM=DGN, rendant ainſi les triangles HEθ, GND, ſemblables entr'eux, on aura ici en general pour tous les cas Hθ. HE+θE :: DG. GN+DN :: DG. DM+DN. Donc,

Fig. 248. 249. 250. 251.

1°. L'analogie generale du preſent Th. 38. démonſtr. art. 5. donnera ici F. R :: $Q^2 \times H\theta$. $P \times \Pi \times \overline{HE+\theta E}$. pour tous les cas. Ce qui,

2°. Dans le cas du Cor. 3. où DR diviſe en deux également l'angle HRK de la fente du corps ſ, ſe change

en F. R :: $Q^2 \times H\theta$. $2 \times P \times \Pi \times HE$ :: $Q^2 \times H\Delta$. $P \times \Pi \times HE$. Ce qui,

3°. Dans le cas du nomb. 2. du Corol. 4. où l'on ſuppoſe de plus la direction FP du marteau confondue avec FΠ perpendiculaire à la baſe AB du Coin, ſe change en F. R :: $Q \times H\Delta$. $\Pi \times HE$. Ce qui,

4°. Dans le cas du Corol. 5. qui, outre tout cela, ſuppoſe dans les Fig. 249. 251. FΠ auſſi confondue avec CR, c'eſt-à-dire, toutes les lignes FP, FΠ, CR, confondues en une FR au milieu F de la baſe AB du Coin iſoſcele AEB, ſe change en F. R :: HΔ. HR. pour ces deux Fig. 249. 251. ainſi qu'on l'a déja vû pour la ſeule Fig. 246. dans le Corol. 5. cette derniere hypotheſe rendant comme là Q=Π. Fig. 249. 251.

IV. Quoique dans les Fig. 250. 251. je n'aye conſideré le Coin AEB comme rencontré ſeulement en deux points H, K, & non en des parties communes, par les côtez de la fente HRK du corps ϕλμ à fendre, que pour juſtifier, ſi je l'euſſe pû, le ſecond des ſentimens de l'art. 3. de la Remarque précedente; ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe conſiderer avec l'Auteur de ce ſentiment, le Coin comme ainſi rencontré par les côtez de la fente à ſon entrée ou ailleurs, en prenant le tout mathématiquement, & comme ſi le corps à fendre étoit incompreſſible au point H, K, & incapable de ceder ailleurs qu'en R. Car quoique le reſſort qu'on lui peut ſuppoſer en ce point R, tendant à en rapprocher l'un de l'autre les côtez HR, KR, de la fente HRK ſuivant des perpendiculaires en H, K, à ces côtez de la fente, & obliques à ceux AE, BE, du Coin AEB, tendît à rejetter ce Coin, & à le faire reſſortir de cette fente, comme un noyau eſt forcé de ſortir d'entre les doigts entre leſquels il eſt preſſé; il eſt viſible que l'effort du coup de marteau ϕOF ſur la baſe ou la tête AB de ce Coin AEB, le pourroit retenir dans cette fente HRK malgré ce reſſort; & que l'équilibre de ce coup de marteau avec la réſiſtance des côtez de cette fente de tel corps qu'on voudra, pourroit ſe faire ſur ces points ma- Fig. 250. 251.

thématiques H, K, de même que s'ils étoient des parties communes aux côtez de ce Coin AEB, & à ceux de la fente HRK que ceux-là toucheroient en ces points. Ce qui fait voir que cette ſuppoſition de l'Auteur du ſecond ſentiment de l'art. 3. de la Remarque précedente, eſt mathématiquement poſſible; & qu'ici le Coin ſans parties communes avec les côtez de la fente du corps à fendre, ne laiſſeroit pas à l'inſtant qu'il ſeroit frappé, de faire des efforts contr'eux, capables de produire l'équilibre ſuppoſé, s'il étoit aſſez fortement frappé pour cela; puiſqu'il les empêcheroit ainſi de ſe rapprocher l'un de l'autre, & en ſoutiendroit tellement toute la réſiſtance, ou toute la tendance à ſe rapprocher en vertu de leur reſſort, que pouſſé ou frappé plus fortement que cet équilibre ne requiert, il les forceroit de s'écarter l'un de l'autre, & la fente de s'augmenter pendant l'inſtant que ce Coin ſeroit ainſi pouſſé ou frappé. Il eſt vrai que la compreſſibilité phyſique des corps permettroit à ce Coin d'enfoncer ces points H, K, & de s'y faire ainſi deux parties communes à ſes côtez, & à ceux de la fente qui en ſeroient touchez en ces points; mais cela n'empêche pas la poſſibilité mathématique dont il eſt ici queſtion.

Ajoutez à cela que deux parties en H, K, ou ailleurs, communes aux côtez du Coin AEB, & à ceux de la fente HRK, mathematiquement polies, comme on les ſuppoſe d'ordinaire, & mêmes telles qu'on voudra, fuſſent-elles de toute la longueur des côtez de la fente, ne rendroient pas l'équilibre entre la force du Coin & la réſiſtance des côtez du corps à fendre plus poſſible que ne le rendroient les deux points mathématiques communs H, K, des Fig. 250. 251. dont il eſt ici queſtion; puiſque le reſſort ou l'effort des côtez HR, KR, de la fente HRK pour ſe rapprocher l'un de l'autre, tendroit autant à en faire ſortir le Coin qui les toucheroit en ces parties communes, que s'il ne les rencontroit qu'aux ſeuls points mathématiques H, K: de ſorte que ſi dans la pratique le Coin reſte dans la fente après le coup reçû du marteau, ou de maſſe, ce

n'eſt pas l'effet d'un ſimple contact en des parties communes ; mais de l'âpreté ou de l'inégalité des côtez du Coin & de la fente, dont ceux-là s'accrochent avec ceux-ci par l'engrenement entr'elles de leurs parties inégalement avancées, leſquelles enfoncées par force les unes entre les autres, y demeurent embaraſſées.

V. C'eſt pour cela qu'en fait de conſideration mathématique, où les côtez du Coin & de la fente du corps à fendre, ſont regardez comme mathématiquement polis, il ne peut y avoir d'équilibre entre la force du Coin & la réſiſtance des côtez élaſtiques du corps à fendre, qu'à l'inſtant que le Coin eſt frappé ou pouſſé d'une force la plus grande qui puiſſe être ſoutenue par toute la réſiſtance de ce corps à être diviſé par ce Coin, ſoit que ce Coin en rencontre les côtez de la fente ſeulement en des points H, K, ou en des parties communes quelconques : auſſi eſt-ce-là l'état dans lequel nous l'avons ſuppoſé juſqu'ici.

VI. La conſideration du Coin AEB ſoutenu en équilibre entre les côtez HR, KR, de la fente HRK, comme entre deux plans inclinez, fait aſſez voir (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9. *& Th.* 26. *part.* 1.) que pour cet équilibre il faut que les efforts du Coin contre ces deux côtez HR, KR, de la fente du corps ſ à fendre, leurs ſoient perpendiculaires en deux points H, K, communs à eux, & à ceux AE, BE, de ce Coin, ſoit qu'ils le ſoient auſſi, ou non, à ces côtez du Coin ; & qu'ainſi l'on a eu raiſon ci-deſſus de prendre DM, DN, perpendiculaires en H, K, aux côtez HR, KR, de la fente HRK pour les directions des forces exercées par le Coin contre ces côtez de la fente en vertu de ſa force G ſuivant DG, ſans ſe mettre en peine ſi ces directions DM, DN, ſont auſſi perpendiculaires comme dans les Fig. 248. 249. ou non, comme dans les Fig. 250. 251. aux cotez AE, BE, de ce Coin AEB. Fig. 248. 249. 250. 251.

Un Levier chargé d'un poids entre ſes deux extrêmitez ſoûtenues ſur deux plans inclinez, fait encore voir que pour l'équilibre d'un Coin avec la réſiſtance des côtez de la fente d'un corps à fendre, entre leſquels ce Coin eſt-

ſoûtenu comme entre deux plans inclinez ; il eſt ſeulement requis que les directions des efforts de ce Coin contre ces cotez de la fente dans laquelle il tend à s'enfoncer, leur ſoient perpendiculaires en des points communs à eux & aux côtez du Coin, & qu'il eſt tout-à-fait indifferent que ces directions ſoient auſſi perpendiculaires à ces côtez du Coin. C'eſt pour cela que la difficulté de trouver la ſituation requiſe à ce Levier ainſi chargé pour demeurer en équilibre entre deux plans inclinez donnez de poſition, ne conſiſte pas à trouver ce que le poids dont ce Levier eſt chargé, lui fait d'impreſſions perpendiculaires à ſes extrêmitez, cela étant facile ; mais ſeulement à trouver deux points de ces deux plans (un de chacun) ſur leſquels ce poids doit faire des efforts perpendiculaires à ces plans, leſquels deux points ſoient diſtans entr'eux de la longueur du Levier chargé de ce poids, pour être ſoûtenu ſur eux en équilibre entre ces deux plans.

Fig. 248. 249. VII. Quant aux forces ſuivant QP, ϱΠ, dont la premiere ſuivant QP parallele à la baſe AB du Coin AEB, réſulte immédiatement du coup oblique du marteau ΦOF ſuivant FP ſur cette baſe AB dans les Fig. 248. 249. & dont la ſeconde ſuivant ϱΠ réſulte de même de l'autre ſuivant FΠ, réſultante immédiatement auſſi de la premiere ſuivant FP ; on n'en a fait ci-deſſus aucun uſage, parce qu'elles ne tendent aucunement à fendre le corps ϑιλμ, mais ſeulement à le faire avancer, & même à le renverſer du côté où elles tendent toutes deux, ſi elles tendent vers le même, comme dans la Fig. 248. ou bien du côté vers lequel tend la plus forte des deux, ſi elles tendent vers des côtez differens comme dans la Fig. 250. à moins qu'il ne ſoit bien retenu en ϑλ par ſa peſanteur ou autrement.

THEOREME XXXIX.

Fig. 248. 249. 250. 251. *Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent Th.* 38. *dans lequel la force abſolue du coup de maſſe ou de marteau ΦOF ſuivant FP ſur la baſe AB du Coin AEB,*

été appellée F, d'où réſultoit l'employée G ſuivant CR ou DG par ce Coin pour fendre le corps ſελμ en vertu des deux autres forces M, N, dans leſquelles celle-ci (G) ſe decompoſoit ſuivant DM, DN, perpendiculaires en H, K, aux côtez HR, KR, de la fente HRK, & qui étoient ainſi toutes employées contre ces deux côtez de la fente pour les écarter l'un de l'autre: cela, dis-je, ſuppoſe tel qu'on l'a trouvé dans la démonſtration du précedent Th. 38. ſoit Z le centre du premier mouvement que les deux parties ſRZε, μRZλ, du corps à fendre, auroient en cedant au Coin AEB; & de ce point Z ſoient menées ZS, ZT, perpendiculaires en S, T, ſur DM, DN, prolongées. Enſuite par le centre (quel qu'il ſoit) de tenacité ou de réſiſtance des fibres qui s'oppoſent à ce premier mouvement autour de Z, ſoit imaginé un plan VX perpendiculaire en T à DR prolongée, dans laquelle on va faire voir que cet appui Z doit toûjours être.

Tout cela poſé, ſi outre les noms aſſignez dans la démonſtration du précedent Th. 38. l'on appelle T la tenacité ou la réſiſtance actuelle que les fibres en equilibre avec l'effort du Coin contr'elles, ſont alors à ſe caſſer ou à ſe détacher toutes à la fois, comme dans le Syſtéme de Galilé ſur la Reſiſtance des corps à être rompus, ou ſucceſſivement ſuivant tel autre ſyſtéme qu'on voudra; l'on aura toûjours en general F. T :: $2^2 \times DG \times TZ$. $2 \times P \times \Pi \times DM \times SZ$.

DEMONSTRATION.

I. Quelque ſyſtême qu'on adopte ſur la maniere dont les fibres qui tiennent les parties ſRZε, μRZλ, du corps ſελμ à fendre, attachées enſemble depuis R vers ελ, cederoient ou caſſeroient, ſi leur réſiſtance étoit ſurmontée par les efforts M, N, du Coin AEB contr'elles; il eſt viſible qu'il y a un certain point T entre R & ελ, dans lequel ſi tout ce que ces fibres font de réſiſtance à ce Coin, étoit ramaſſé, cette réſiſtance totale de toutes ces fibres enſemble, ſeroit la même contre lui, que lorſqu'elles ſont répandues entre R & ελ: de ſorte que ce point T (que j'appelle *centre de Tenacité* ou *de Réſiſtance* de toutes ces fibres

en équilibre avec l'effort du Coin) peut être regardé comme le ſeul ou les deux parties ſRZε, μRZλ, du corps à fendre, ſont attachées enſemble, & de même que ſi elles y étoient preſſées ou tirées l'une contre l'autre ſuivant TV, TX, en ligne droite parallele à HL, par deux forces V, X, directement oppoſées ſuivant cette ligne VX, égales entr'elles, & égales enſemble à tout ce que les fibres répandues depuis R vers ελ, ſont de réſiſtance en équilibre avec l'effort que le Coin AEB fait pour les rompre, & les obliger ainſi à le laiſſer entrer plus avant dans le corps à fendre; laquelle réſiſtance totale étant appellée T, l'on aura ici T=V+X.

II. De plus ſi l'on conſidere, comme dans la démonſtration du Th. 36. que de quelque maniere ou force que le Coin AEB ſoit pouſſé, il ne tend à fendre le corps ſελμ qu'en vertu de *Momens* égaux qu'il doit imprimer pour cela aux parties ſRZε, μRZλ, de ce corps qu'il tend à écarter l'une de l'autre; puiſque la difference des *Momens* inégaux ne tendroit qu'à mouvoir ce corps entier ſελμ dans le ſens du plus fort de ces mêmes *Momens*, & non à le diviſer ou le fendre: on verra que, quel que ſoit le point ou appui Z ſur lequel fixe ces deux parties ſRZε, μRZλ, du corps à fendre commenceroient à ſe mouvoir en cas que les efforts M, N, du Coin AEB contr'elles, l'emportaſſent ſur la réſiſtance des fibres qui les tiennent attachées enſemble, ce point Z doit, pour l'équilibre ici ſuppoſé, être tel (*Théor.* 21. *Corol.* 6.) qu'il rende M×SZ = N×YZ; & conſequemment YZ. SZ :: M. N (*démonſtr. du Th.* 37.) :: KR. HR. c'eſt-à-dire, YZ. SZ :: KR. HR. Or il eſt évident que cela ne ſçauroit être, à moins que ce point ou appui Z ne ſoit quelque part dans la droite DR continuée, laquelle (à cauſe des perpendiculaires ſuppoſées HR, SZ, ſur DM prolongée; & KR, YZ, ſur DN auſſi prolongée) rend YZ. KR :: DZ. DR :: SZ. HR. & conſequemment YZ. SZ :: KR. HR. Donc l'appui Z des *Momens* cauſez aux parties ſRZε, μRZλ, du corps à fendre, par les efforts M, N, que le Coin AEB fait ſuivant

Digitized by Google

vant DM, DN, pour les ſéparer l'une de l'autre, doit être quelque part dans la droite DR continuée du côté de la baſe ελ du corps δελμ à fendre par delà le centre T de tenacité ou de réſiſtance de tout ce qu'il y a de fibres qui s'y oppoſent à l'inſtant de leur équilibre avec ce que ce Coin exerce de forces pour diviſer ce corps δελμ malgré ces fibres, en quelque point T, entre R & ελ, que ſoit alors le centre de leur réſiſtance totale, & quel que ſoit dans cet eſpace la trace de la ſéparation qui s'y feroit entre les parties δRZε, μRZλ du corps δελμ à fendre, ſi l'effort du Coin AEB l'emportoit ſur cette réſiſtance totale T des fibres qui retiennent ces deux parties attachées enſemble.

III. Cela étant, & VX, qu'on ſuppoſe paſſer par le centre de cette réſiſtance, étant (*Hyp.*) perpendiculaire à RZ, comme SZ, YZ, le ſont (*Hyp.*) à DM, DN, prolongées; l'équilibre ici ſuppoſé entre les efforts M, N, (ſuivant DM, DN,) du Coin AEB, & cette réſiſtance totale T équivalente (*art.* 1.) à deux forces égales V, X, avec chacune deſquelles chacun de ces efforts M, N, ſeroit en équilibre ſur l'appui Z, donnera (*Th.* 21. *Corol.* 6.) M×ZS=V×TZ=X×TZ=N×YZ, & conſequemment $2\times M\times SZ=\overline{V+X}\times TZ$ (*art.* 1.)=T×TZ; d'où réſulte M.T:: TZ. 2×SZ. Or l'art. 4. de la démonſtration du Th. 38. donne G. M:: DG. DM. Donc (en multipliant par ordre) G. T:: DG×TZ. 2×DM×SZ. Or l'art. 3. de la démonſtration du Th. 38. donne de plus F. G:: Q^2. P×Π. Donc enfin (en multipliant encore par ordre) F.T:: Q^2×DG×TZ. 2×P×Π×DM×SZ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Or ſuivant le Corol. 2. du Th. 39. les triangles LRH, DNG, ou GMD étant ſemblables entr'eux, l'on aura DG. DM:: HL. HR. Donc en ſubſtituant les deux derniers termes de cette analogie au lieu des deux premiers dans la derniere de l'art. 3. de la précedente démonſtra-

tion, l'on aura auſſi en general F. T :: $Q^2 \times HL \times TZ$. $2 \times P \times \Pi \times HR \times SZ$.

COROLLAIRE II.

Si preſentement on ſuppoſe, comme dans le Corol. 3. du Th. 38. que la direction DRZ de la force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps ϛαλμ, diviſe également en deux l'angle HRK de la fente que ce Coin tend à y augmenter par les efforts M, N, ſuivant DM, DN, que cette force G (réſultante de l'abſolue F du marteau ou de la maſſe φOF) exerce perpendiculairement en H, K, contre les côtez HR, KR, de cette fente HRK; l'on aura ici comme là $H\Delta = \Delta L$, & conſequemment $HL = 2 \times H\Delta$. Ce qui pour ce cas-ci changera la derniere analogie du précedent Corol. 1. en F. T :: $Q^2 \times H\Delta \times TZ$. $P \times \Pi \times HR \times SZ$.

COROLLAIRE III.

En quelque rapport que l'angle HRK de la fente ſoit diviſé par la direction DR de la force G, avec laquelle le Coin AEB tend à fendre le corps ϛαλμ, ſupoſons (comme dans le Corol. 4. du Th. 39. que la direction FP du coup de marteau ou de maſſe φOF ſur la baſe AB de ce Coin, ſoit ſuivant FΠ perpendiculaire à cette baſe. Cette hypotheſe, qui confond FP avec cette perpendiculaire FΠ, rendant ainſi P = Q, comme dans le Corollaire 4. du Th. 38.

1°. L'analogie du preſent Th. 39. ſe changera ici en F. T :: $Q \times DG \times TZ$. $2 \times \Pi \times DN \times SZ$. en quelque rapport que l'angle HRK de la fente du corps à fendre, ſoit diviſé par la direction DR de la force G dont le Coin AEB tend à fendre ce corps ϛαλμ.

2°. La derniere analogie de ſon Corol. 1. ſe changera ici en F. T :: $Q \times HL \times TZ$. $2 \times \Pi \times HR \times SZ$. quel que ſoit encore le rapport des parties de l'angle HRK diviſé par DR.

3°. L'analogie du Corol. 2. ſe changera pareillement ici en F. T :: Q×HΔ×TZ. Π×HR×SZ pour le cas de ce Corol. 2. où l'on ſuppoſe que DR diviſe en deux parties égales l'angle HRK de la fente que le Coin AEB tend à augmenter.

COROLLAIRE IV.

Outre la direction FP du coup de marteau confondue avec la perpendiculaire FΠ à la baſe AB du Coin AEB, comme dans le précedent Corol. 3. ſoit cette perpendiculaire FΠ auſſi confondue avec la direction CR ou DR de la force G employée par ce Coin pour fendre le corps ϑειμ, comme dans le Corol. 5. du Th. 38. laquelle CR ainſi perpendiculaire en F à cette baſe AB, diviſe ici comme là en deux parties égales l'angle HRK de la fente de ce corps ϑειμ: le tout comme dans les Fig. 249. 250. dans leſquelles le Coin AEB eſt iſoſcele, & ſa baſe AB parallele à HL, qui eſt ici HK, diviſée perpendiculairement en deux parties égales en F, comme celle-ci l'eſt en Δ par RD prolongée juſques-là. Ce cas, qui en tout eſt celui qu'on ſuppoſe d'ordinaire, rendant non ſeulement P=Q, comme dans le précedent Corol. 3. mais encore pour la même raiſon Π=Q, ainſi que dans le Corol. 5. du Th. 38. changera pour ici (Fig. 249. 250.) l'analogie du nomb. 3. du précedent Corol. 3. en F. T :: HΔ×TZ. HR×SZ. D'où réſulte F. T :: AF×TZ. AE×SZ :: AB×TZ. 2×AE×SZ :: AB×TZ. SZ×$\overline{AE+BE}$. pour le cas de la Fig. 250. Fig. 249. 250.

SCHOLIE.

La recherche qu'on vient de faire du rapport de la force du Coin F, qui frappe ou pouſſe le Coin AEB, à la réſiſtance des fibres, qui en équilibre avec lui, tiennent malgré lui attachées enſemble les parties ϑRZε, μRZλ, du corps à fendre, ayant introduit les bras TZ, SZ, du Levier recourbé SZT dans les analogies du preſent Th. 39. & de ſes Corollaires; il n'eſt pas ſurprenant qu'auçu- Fig. 248. 249. 250. 251.

ne de ces analogies ne reſſemble à une de celle des ſentimens rapportez dans la Remarque qui précede le Th. 37. aucun des Auteurs de ces ſentimens n'ayant cherché ce rapport, mais ſeulement celui de la force du Coin aux *Momens* dont les côtez HR, KR, de la fente HKR du corps ϛελμ à fendre, réſiſtent à la force du Coin AEB. Ce qui fait qu'aucun de ces ſentimens ne peut être juſtifié dans le ſens du preſent Th. 39. & que n'étant tous que dans l'hypotheſe & dans le ſens du Corol. 5. du Th. 38. il n'y a que ce Corollaire qui les puiſſe juſtifier ; lequel pourtant n'en juſtifie que deux qui reviennent au même, ainſi qu'on l'a vû dans l'art. 1. du Scholie de ce Théoreme-là. D'ou il faut neceſſairement conclure que les Auteurs des autres ſentimens s'y ſont mépris ; ce qui ſoit ſeulement dit pour que le Lecteur ne s'y méprenne pas après eux, & non pour les offenſer, ne craignant rien tant que de faire de la peine à qui que ce ſoit. C'eſt pour cela (ainſi que j'en ai déja averti) que je ne nomme point ces Auteurs, ni même ceux des ſentimens juſtifiez dans l'art. 1. du Scholie du Th. 38. leſquels pourroient auſſi trouver mauvais que je faſſe ici remarquer qu'ils n'ont touché qu'au cas le plus ſimple de ce Théoreme, rapporté dans ſon Corol. 5. la verité pouvant ainſi être miſe à couvert ſans offenſer perſonne.

REMARQUE.

Au reſte il eſt à remarquer que tout ce qu'on voit démontré dans les trois derniers Th. 37. 38. 39. pour le Coin priſmatique triangulaire quelconque, exprimé en profil par le triangle rectiligne auſſi quelconque AEB, qui en ſeroit le generateur à la maniere expliquée dans la Déf. 30. & pour une fente rectiligne HRK, dans laquelle on a ſuppoſé ce Coin, ſe démontrera de même par toutes autres figures de Coin & de fente qu'on voudra. Pour le voir, il n'y a qu'à imaginer le profil de ce nouveau Coin inſcrit dans un triangle rectiligne, dont les côtez le touchent aux points H, K, ou ce Coin de figure quelconque

Digitized by Google

248.

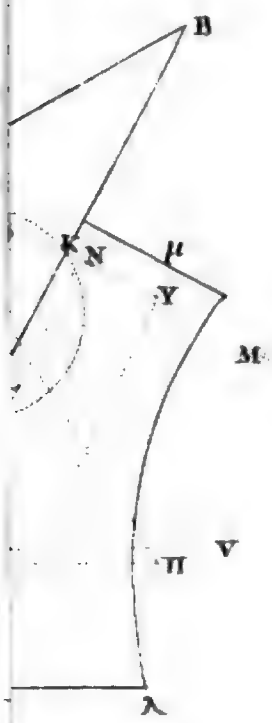
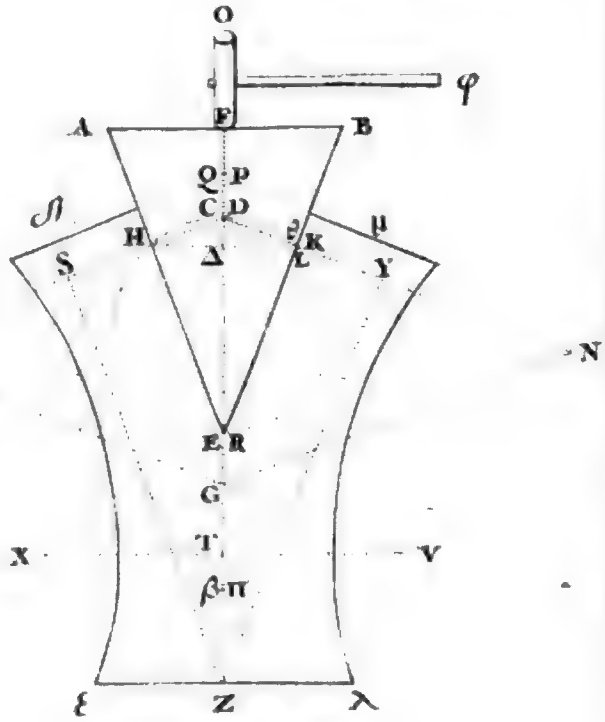


Fig. 249.



250.

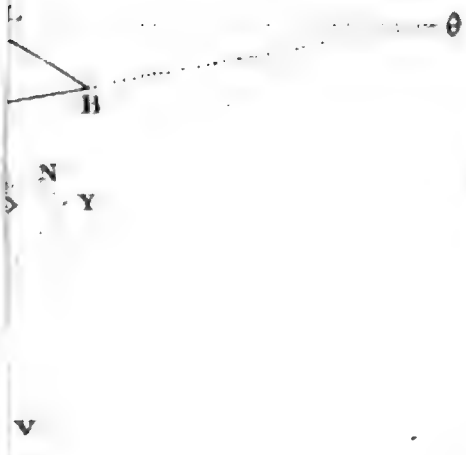
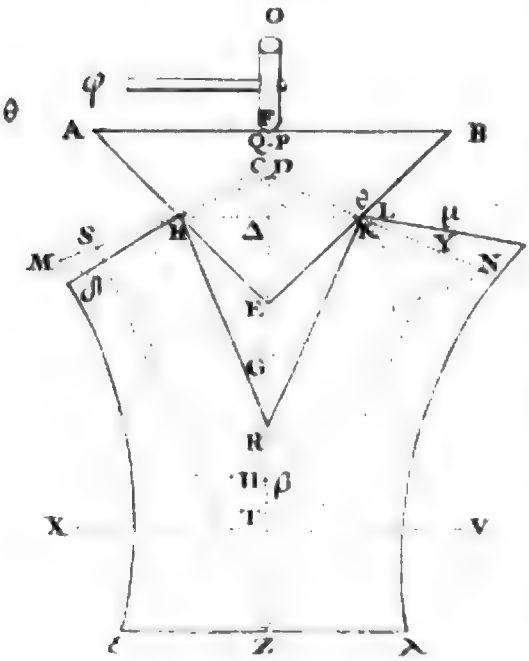


Fig. 251.



Digitized by Google

rencontrera les côtez quelconques de la fente, & au point F, où il ſera rencontré par le marteau, ou par la maſſe ΦOF qui le frappera; prendre enſuite ce triangle, tel que ſeroit AEB, ſi ce nouveau Coin lui étoit ainſi inſcrit, pour le véritable Coin; & les parties HE, KE, des côtez de ce Coin triangulaire pour ceux de la fente, ſi elle eſt curviligne; auquel cas la pointe E de ce Coin ſera toûjours (*Th.* 36.) dans la direction DR de la force G, dont il tendra à fendre le corps Δελμ. Cela conçû ou imaginé, tout le reſte demeurant le même que dans les Fig. 248. 249. 250. 251. les démonſtrations des Th. 37. 38. 39. & leurs Corollaires pour le Coin triangulaire AEB dans une fente rectiligne HRK, pour laquelle on prendra HEK, s'appliqueront de même à tout autre Coin de figure auſſi quelconque, & à ce Coin rectiligne AEB dans une fente curviligne ou de côtez courbes. Les figures de ces nouveaux cas ſont ſi aiſées à imaginer, que ç'auroit été multiplier inutilement le nombre de celles-ci, que de les y ajouter.

SECTION IX.

Corollaire general de la Théorie précedente.

DAns une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717. M. (Jean) Bernoulli, après y avoir défini ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, de la maniere qu'on le va voir dans la définition ſuivante, m'annonça qu'*en tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles ſoient appliquées les unes ſur les autres, ou médiatement ou immédiatement; la ſomme des Energies affirmatives ſera égale à la ſomme des Energies negatives, priſes affirmativement.*

Cette propoſition me parut ſi generale & ſi belle, que, voyant que je la pouvois aiſément déduire de la Théorie précedente, je lui demandai la permiſſion qu'il m'accorda, de l'ajouter ici avec la démonſtration que cette Théorie m'en fourniſſoit, & qu'il ne m'envoyoit pas. La voici ſéparée pour toutes les Machines précedentes; la Théorie, qui en étoit achevée lorſque ce ſçavant Mathématicien m'annonça cette propoſition, ne m'ayant pas permis de la démontrer ſur chacune de ces Machines en ſa place, ſans changer un très-grand nombre de citations répandues dans cette Théorie, & toutes celles des Figures qui auroient ſuivi la premiere des nouvelles qu'il y auroit fallu ajouter dès la Section 2. ce qui m'auroit fort embarraſſé, & expoſé à de fauſſes citations, n'étant pas poſſible de n'omettre aucun de ces changemens. Pour l'intelligence de cette propoſition de M. Bernoulli, & de la démonſtration que la Théorie précedente en va fournir. Voici comment il s'expliquoit ſur ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, dans la Lettre où il m'annonçoit cette belle propoſition.

Digitized by Google

DEFINITION XXXII.

Concevez (diſoit-il) pluſieurs forces differentes qui « agiſſent ſuivant differentes tendances ou directions pour « tenir en équilibre un point, une ligne, une ſurface, ou « un corps ; concevez auſſi que l'on imprime à tout le ſy- « ſtême de ces forces un petit mouvement, ſoit parallele « à ſoi-même ſuivant une direction quelconque, ſoit au- « tour d'un point fixe quelconque : il vous ſera aiſé de « comprendre que par ce mouvement chacune de ces for- « ces avancera ou reculera dans ſa direction, à moins que « quelqu'une ou pluſieurs des forces n'ayent leurs ten- « dances perpendiculaires à la direction du petit mouve- « ment ; auquel cas cette force, ou ces forces n'avance- « roient ni ne reculeroient de rien : car ces avancemens « ou reculemens, qui ſont ce que j'appelle *viteſſes vir-* « *tuelles*, ne ſont autre choſe que ce dont chaque ligne de « tendance augmente ou diminue par le petit mouvement ; « & ces augmentations ou diminutions ſe trouvent, ſi « l'on tire une perpendiculaire à l'extrêmité de la ligne « de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire « retranchera de la même ligne de tendance, miſe dans la « ſituation voiſine par le petit mouvement, une petite « partie qui ſera la meſure de la *viteſſe virtuelle* de cette « force. «

Soit, par exemple, P un point quelconque dans le « Fig. 52. ſyſtême des forces qui ſe ſoûtiennent en équilibre ; F, une « de ces forces, qui pouſſe ou qui tire le point P ſuivant la « direction FP ou PF ; P*p*, une petite ligne droite que dé- « crit le point P par un petit mouvement, par lequel la « tendance FP prend la ſituation *fp*, qui ſera ou exacte- « ment parallele à FP, ſi le petit mouvement du ſyſtême « ſe fait en tous ſes points parallelement à une droite don- « née de poſition ; ou elle ſera, étant prolongée, avec FP « un angle infiniment petit, ſi le petit mouvement du ſy- « ſtême ſe fait autour d'un point fixe. Tirez donc PC per- « pendiculaire ſur *fp*, & vous aurez C*p* pour la *viteſſe vir-* «

» *tuelle* de la force F, en ſorte que FxC*p* fait ce que j'appel-
» le *Energie*. Remarquez que C*p* eſt ou *affirmatif* ou *néga-*
» *tif* par rapport aux autres : il eſt *affirmatif*, ſi le point P
» eſt pouſſé par la force F, & que l'angle F*Pp* ſoit obtus ;
» il eſt *négatif*, ſi l'angle F*Pp* eſt aigu : mais au contraire ſi
» le point P eſt tiré, C*p* ſera *négatif*, lorſque l'angle F*Pp* eſt
» obtus ; & *affirmatif*, lorſqu'il eſt aigu. Tout cela étant
» bien entendu, je forme (dit M. Bernoulli) cette

PROPOSITION GENERALE.

THEOREME XL.

» *En tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere*
» *qu'elles ſoient appliquées, & ſuivant quelques directions*
» *qu'elles agiſſent les unes ſur les autres, ou mediatement, ou*
» *immédiatement, la ſomme des Energies affirmatives ſera*
» *égale à la ſomme des Energies négatives priſes affirmative-*
» *ment.*

DEMONSTRATION.

Telle eſt la propoſition de M. Bernoulli, rapportée au commencement de cette Section ; & voici comment la Théorie précedente en fournit la démonſtration.

PARTIE I.

Pour l'équilibre d'un poids ſoûtenu avec des cordes ſeulement, par tant de puiſſances qu'on voudra, de directions quelconques ; & pour l'équilibre d'un corps choqué par pluſieurs autres à la fois.

FIG. 153. 154. I. Toutes choſes demeurant ici les mêmes que dans la Fig. 71. du Th. 6. Corol. 20. c'eſt-à-dire, le poids K étant ſoutenu en équilibre par tant de puiſſances P, Q, R, S, T, &c. qu'on voudra, appliquées (comme lui) à autant de branches de corde, ſur leſquelles branches ou cordons ſoient AB, AC, AE, AF, AM, &c. proportionnelles à ces puiſſances P, Q, R, S, T, &c. des extrêmitez deſquelles proportionnelles tombent autant de perpendiculaires

laires Bb, Ce, Ee, Ff, Mm, &c. ſur la direction AK du poids K prolongée de part & d'autre : cela, dis-je, étant ainſi dans les Fig. 253. 254. comme dans la Fig. 71. Th. 6. Corol. 20. ſoit priſe de A vers K ſur la direction AK du poids K, une partie quelconque Aa dans la Fig. 253, où les puiſſances P, Q, R, S, T, &c. tirent droit, ſans s'appuyer ſur rien, & infiniment petite dans la Fig. 254. où les cordons de ces puiſſances ſont appuyez ſur des poulies $\beta, \lambda, \iota, \Theta, \mu$, &c. Du point a, ſur les directions AB, AC, AE, AF, AM, &c. de ces puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſoient autant de perpendiculaires $ap, aq, ar, a\ſ, at$, &c. qui rencontrent ces directions en $p, q, r, \ſ, t$, &c.

Cela fait, il eſt viſible que les triangles (*conſtr.*) rectangles Apa, Abb ; Aqa, AcC ; Ara, AeE ; $A\ſa$, AfF ; Ata, AmaM, &c. ayant deux à deux (diſtinguez comme on les voit ici par la marque ;) leurs angles égaux A, ſont ſemblables entr'eux pris ainſi deux à deux. Par conſequent, en appellant b, c, e, f, m, &c. les forces ſuivant la direction AK ou Ae du poids K, pour ou contre ce poids, réſultantes (*Lem. 3. Corol. 6.*) des forces abſolues des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuivant leurs directions AB, AC, AE, AF, AM, &c. l'on aura ſuivant la part. 1. du Lem. 3. employée comme dans la démonſtr. 2. du Th. 6.

$$Aa.\ Ap :: AB.\ Ab :: P.\ b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa.\ Aq :: AC.\ Ac :: Q.\ c = \frac{Q \times Aq}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ar :: AE.\ Ae :: R.\ e = \frac{R \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa.\ A\ſ :: AF.\ Af :: S.\ f = \frac{S \times A\ſ}{Aa}.$$

$$Aa.\ At :: AM.\ Am :: T.\ m = \frac{T \times At}{Aa}.$$

&c.

Donc $\frac{Q\times Aq+R\times Ar+S\times Af-P\times Ap-T\times At\pm \&c.}{Aa}$

$=c+e+f-b-m\pm$ &c. (*Th. 6. démonſtr. 2.*) $=K$; ce qui en ce cas d'équilibre donne $Q\times Aq+R\times Ar+S\times AS-P\times Ap-T\times At\pm$ &c $=K\times Aa$, ou $K\times Aa+P\times Ap+T\times At\pm$ &c $=Q\times Aq+R\times Ar+S\times Af\pm$ &c.

Fig. 253. 1°. Soit preſentement tout le ſyſtême de la Fig. 253. mû de maniere que ſon point A parcourant la partie quelconque Aa de la direction AK du poids K, tous les cordons ou directions AB, AC, AE, AF, AM, &c. des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. demeurent toûjours paralleles chacune à ſoi-même ; & que lorſque le point A ſera en a, & le poids K deſcendu de la valeur de Aa ſuivant ſa premiere direction AK, ces autres directions ou cordons AB, AC, AE, AF, AM, &c. ſoient encore perpendiculaires en a aux mêmes lignes fixes ap, aq, ar, af, at, &c. auſquelles elles l'étoient en p, q, r, f, t, &c. avant ce mouvement du point A, ou de tout le ſyſtême de la preſente Figure 253. Un tel mouvement faiſant ainſi reculer ou avancer les puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuivant ces directions, chacune ſuivant la ſienne, des valeurs Ap, Aq, Ar, Af, At, &c. pendant que le poids K deſcend de la valeur de Aa ſuivant la ſienne : la Déf. 31. fait voir qu'en prenant ici Aa pour la vîteſſe virtuelle de ce poids K, l'on y aura Ap, Aq, Ar, Af, At, &c. pour les vîteſſes virtuelles de ces puiſſances P, Q, R, S, T, &c. & que $K\times Aa$, $P\times Ap$, $Q\times Aq$, $R\times Ar$, $S\times Af$, $T\times At$, &c. ſeront les Energies de ce même poids & de ces mêmes puiſſances.

Fig. 254. 2°. Soit auſſi mû tout le ſyſtême de la Fig. 254. mais de maniere que ſon point A parcourant la partie infiniment petite Aa de la direction AK du poids K, les cordons AB, AC, AE, AF, AM, &c. des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. qui y ſont appuyez ſur les poulies fixes β, λ, ι, φ, μ, &c. paſſent de $A\beta P$, $A\lambda Q$, $A\iota R$, $A\varphi S$, $A\mu T$, &c. en $a\beta P$, $a\lambda Q$, $a\iota R$, $a\varphi S$, $a\mu T$, &c. leſquelles ſecon-

Digitized by Google

des ſituations de ces cordons ſont avec les premieres, chacune avec ſa correſpondante, des angles $A\beta a$, $A\lambda a$, $A\epsilon a$, $A\varphi a$, $A\mu a$, &c. infiniment petits, à cauſe de leur baſe commune Aa ſuppoſée infiniment petite par rapport à ſes diſtances finies des ſommets β, λ, ϵ, φ, μ, &c. de ces angles. Ce qui confondant les perpendiculaires infiniment petites ap, aq, ar, as, at, &c. ſuppoſées du point a ſur les côtez $A\beta$, $A\lambda$, $A\epsilon$, $A\varphi$, $A\mu$, &c. de ces angles avec les arcs infiniment petits, qui décrits de leurs ſommets β, λ, ϵ, φ, μ, &c. comme centres, par ce point a, ſeroient compris entre leurs côtez, chacun entre les deux de chacun de ces angles, donne les differences infiniment petites Ap, Aq, Ar, As, At, &c. pour les quantitez dont les puiſſances P, Q, R, S, T, &c. reculeroient ou avanceroient ici ſuivant leurs directions, chacune ſuivant la ſienne, pendant que le poids K y deſcendroit ſuivant la ſienne AK de la valeur de la partie infiniment petite Aa de cette direction. D'où l'on voit, ſuivant la Déf. 31. qu'en prenant ici cette ligne infiniment petite Aa pour la vîteſſe virtuelle de ce poids K, l'on y aura les infiniment petites Ap, Aq, Ar, As, At, &c. pour les vîteſſes virtuelles de ces puiſſances P, Q, R, S, T, &c. & que $K\times Aa$, $P\times Ap$, $Q\times Aq$, $R\times Ar$, $S\times As$, $T\times At$, &c. y ſeront les Energies de ce même poids & de ces mêmes puiſſances.

L'on aura donc ici en general (*nomb.* 1. 2.) dans l'un & dans l'autre ſyſtême des Fig. 253. 254. les produits $K\times Aa$, $P\times Ap$, $Q\times Aq$, $R\times Ar$, $S\times As$, $T\times At$, &c. pour les Energies du poids K & des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuppoſées en équilibre avec lui avant la rupture qu'on y a ſuppoſée faite par une force étrangere; deſquels produits les lignes Aa, Ap, Aq, Ar, As, At, &c. qui expriment les vîteſſes virtuelles de ce poids & de ces puiſſances, ſont (*nomb.* 1.) quelconques (finies ou infiniment petites à volonté) dans la Fig. 253. & infiniment petites (*nomb.* 2.) dans la Fig. 254. Et deſquelles Energies la Déf. 31. fait voir que les affirmatives ſont $K\times Aa$, $P\times Ap$, $T\times At$, &c. & les négatives ſont $Q\times Aq$, $R\times Ar$, $S\times As$, &c. dans le Fig. 253. 254.

mouvement ſuppoſé de l'un & de l'autre ſyſtême des Fig. 253. 254. Or avant les nomb. 1. 2. l'on a trouvé pour l'un & pour l'autre de ces ſyſtêmes $K \times Aa + P \times Ap + T \times At + \&c = Q \times Aq + R \times Ar + S \times As + \&c$. Donc en general dans l'un & dans l'autre ſyſtême du poids quelconque K, ſoûtenu en équilibre par tant de puiſſances quelconques P, Q, R, S, T, &c. qu'on voudra, avec des cordes ſeulement, ou appuyées ſur des poulies fixes; la ſomme des Energies poſitives de ce poids & de ces puiſſances, eſt toûjours égale à la ſomme de leurs Energies négatives priſes affirmativement. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Ce qu'on voit des Energies réſultantes de l'équilibre rompu dans le précedent art. 1. *par un mouvement de A vers a ſuivant la direction AK du poids K, & en conſequence de tout le ſyſtéme de chacune des Fig.* 253. 254. *ſe trouvera de même des Energies réſultantes de cet équilibre rompu par le mouvement de ce point A, ſuivant toute autre direction, & de tout le ſyſtéme mû en conſequence comme dans cet art.* 1. *Voici comment.*

Fig. 255. 256. II. Le poids K étant encore ici ſoûtenu en équilibre par tel nombre qu'on voudra de puiſſances P, Q, R, S, T, &c. avec des cordes ſeulement dirigées à volonté: le tout comme dans le précedent art. 1. ſoit preſentement cet équilibre rompu dans chacune des Figures 255. 256. par le mouvement de A vers *a* ſuivant une direction quelconque *em*; & de tout le ſyſtême mû en conſequence comme dans l'art. 1. ſçavoir, de maniere que pendant que ce point A parcourra une partie A*a* quelconque dans la Fig. 255. & infiniment petite dans la Fig. 256. de cette direction *em*, les directions ou cordons AN, AB, AC, AE, AF, AM, &c. du poids K, & des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. emportées avec le ſyſtême, demeurent toujours paralleles chacun à ſoi-même, c'eſt-à-dire, à ſa premiere ſituation dans la Fig. 256. comme dans la Fig. 253. nomb. 1. de l'art. 1. où paſſent toûjours par-deſſus les mêmes poulies fixes δ, β, λ, ε, φ, μ, &c. dans la Fig. 256.

Digitized by Google

chacune par-deſſus la ſienne, comme dans la Fig. 254. nomb. 2. du même art. 1. de maniere, dis-je, que ſi du point *a* on imagine ſur ces cordons ou directions AN, AB, AC, AE, AF, AM, &c. autant de perpendiculaires *ak*, *ap*, *aq*, *ar*, *aſ*, *at*, &c. qui les rencontrent prolongées en *k*, *p*, *q*, *r*, *ſ*, *t*, &c. ces directions ou cordons ſoient encore perpendiculaires en *a* à chacune d'elles, lorſque le point A ſera en *a* dans la Fig. 255. comme dans le nomb. 1. de l'art. 1. Fig. 253. où ſe trouvent en *aδ*, *aβ*, *aλ*, *aε*, *aφ*, *aμ*, &c. appuyez encore ſur les poulies fixes δ, β, λ, ε, φ, μ, &c. de la Fig. 256. comme dans le nomb. 2. de l'art. 1. Fig. 254.

Cela poſé, ſi ſuivant la Déf. 32. on prend ici A*a* pour la vîteſſe virtuelle du point A, l'on y aura A*k*, A*p*, A*q*, A*r*, A*ſ*, A*t*, &c. pour les vîteſſes virtuelles du poids K, & des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. dans chacune des Fig. 255. 256. comme dans les Fig. 253. 254. nomb. 1. 2. de l'art. 1. Ce qui, ſuivant la même Déf. 32. donnera ici comme là K×A*k*, P×A*p*, Q×A*q*, R×A*r*, S×A*ſ*, T×A*t*, &c. pour les Energies de ce poids & de ces puiſſances.

Preſentement ſi après avoir pris AN, AB, AC, AE, AF, AM, &c. proportionnelles au poids K, & aux puiſſances P, Q, R, S, T, &c ſur leurs directions, on mene des extrêmitez N, B, C, E, F, M, &c. de ces proportionnelles autant de perpendiculaires N*n*, B*b*, C*c*, E*e*, F*f*, M*m*, &c. en *n*, *b*, *c*, *e*, *f*, *m*, &c. ſur la direction *em* du mouvement ſuppoſé du point A, comme *ak*, *ap*, *aq*, *ar*, *aſ*, *at*, &c. le ſont (*Hyp.*) en *k*, *p*, *q*, *r*, *ſ*, *t*, &c. ſur ces directions prolongées; les triangles rectangles A*ka*, A*n*N; A*pa*, A*b*B; A*qa*, A*c*C; A*ra*, A*e*E; A*ſa*, A*ſ*F; A*ta*, A*m*M, &c. ſeront ici ſemblables deux à deux, comme dans l'art. 1. & pour la même raiſon que dans cet art. 1. de ſorte que ſi l'on prend ici *n*, *b*, *c*, *e*, *f*, *m*, &c. pour les efforts ſuivant A*m* ou A*e*, réſultans des abſolus du poids K, & des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuivant leurs directions, l'on aura ici comme dans l'art. 1.

$$Aa.\ Ak :: AN.\ An :: K.\ n = \frac{K \times Ak}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ap :: AB.\ Ab :: P.\ b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa.\ Aq :: AC.\ Ac :: Q.\ c = \frac{Q \times Aq}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ar :: AE.\ Ae :: R.\ e = \frac{R \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa.\ As :: AF.\ Af :: S.\ f = \frac{S \times As}{Aa}.$$

$$Aa.\ At :: AM.\ Am :: T.\ m = \frac{T \times At}{Aa}.$$

&c.

Or les efforts n, b, m, &c. de A vers m ſuivant Am, étant ici directement contraires aux efforts c, e, f, &c. de A vers e ſuivant Ae en ligne droite (*Hyp.*) avec Am ; & en équilibre avec ceux-ci : l'ax. 4. donnera ici $n+b+m+$ &c. $=c+e+f+$ &c. comme dans la démonſtr. 2. du Th. 6. Donc on aura ici $K \times Ak + P \times Ap + T \times At +$ &c. $= Q \times Aq + R \times Ar + S \times As +$ &c. Mais on vient de voir que les produits dont cette égalité eſt faite, ſont autant d'Energies du poids K, & des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuppoſées en équilibre avec lui. Donc ſuivant la Déf. 32. le premier membre de la même égalité étant tout d'Energies affirmatives, & le ſecond tout d'Energies négatives, ce cas d'équilibre donnera ici, comme dans l'art. 1. la ſomme des Energies affirmatives, égale à la ſomme des Energies négatives priſes affirmativement, quelque mouvement qu'on donne au ſyſtème. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

III. 1°. Si l'on veut preſentement que la direction Aa du point A ſoit celle du poids K, comme dans l'art. 1. cette hypotheſe, qui fait tomber a en k, rendant $Ak = Aa$, changera l'équation du précedent art. 2. en celle de cet art. 1. dans le cas duquel on ſera pour lors.

Digitized by Google

2°. Et ſi l'on veut que cette direction Aa du point A ſoit celle d'une quelconque des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. par exemple, celle de la puiſſance P; cette hypotheſe rendant de même $Ap=Aa$, changera l'équation generale du précedent art. 2. en $K\times Ak+P\times Aa+T\times At+$ &c. $=Q\times Aq+R\times Ar+S\times A\int+$&c. donc $P\times Aa$ ſera pour lors l'Energie affirmative de la puiſſance P; & ainſi des autres puiſſances P, Q, R, S, T, &c.

3°. Si l'on veut preſentement que la direction Aa du point A ſoit perpendiculaire à la direction d'une de ces puiſſances, ou du poids K, par exemple, à la direction de la puiſſance P; cette hypotheſe, qui fait tomber ap ſur Aa rendant $Ap=o$, réduiroit l'équation generale du précedent art. 2. à $K\times Ak+T\times At+$&c.$=Q\times Aq+R\times Ar+S\times A\int+$&c. Ce ſeroit la même choſe, ſi la corde ABP de la puiſſance P, étoit attachée à quelque clou ou crochet fixe en B, lequel ſuppléât par ſa réſiſtance cette puiſſance P; mais alors la ligne Aa devenant un arc de cercle décrit de ce centre B par A, devroit être infiniment petite, & conſequemment auſſi toutes les autres Ak, Aq, Ar, $A\int$, At, &c. pour conſerver la reſſemblance des triangles qui, dans le précedent art. 2. ont donné l'égalité generale d'où réſulte celle-ci.

4°. Enfin ſi dans les art. 1. 2. & dans les précedens nomb. 1. 2. 3. de celui-ci, on veut moins de puiſſances en équilibre avec le poids K, ou entr'elles, qu'on n'y en a ſuppoſé; il n'y aura qu'à y faire $=o$ toutes celles qu'on en voudra rejetter, & alors toutes les équations de ces art. 1. 2. & des nomb. 1. 2. 3. de celui-ci ſe réduiront à celles de ce cas-ci pour chacune des hypotheſes de ces art. 1. 2. & de ces nomb. 1. 2. 3. de celui-ci.

Voilà (art. 1. 2.) *pour les Energies d'un poids, & de tant de puiſſances qu'on voudra, qui le ſoûtiennent en équilibre avec des cordes ſeulement attachées enſemble toutes par un ſeul & même nœud. Voici dans les articles ſuivans pour les Energies de ce poids quelconque ſoûtenu encore par tel nombre*

de puiſſances qu'on voudra, avec une corde à pluſieurs branches iſſues preſentement de pluſieurs nœuds à volonté.

Fig. 257. IV. Soit le poids quelconque K ſoutenu encore en équilibre avec des cordes ſeulement par tel nombre qu'on voudra de puiſſances C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S, &c. appliquées à autant de cordons de directions quelconques, iſſus preſentement de tant de nœuds A, B, M, P, &c. qu'on voudra : le tout comme dans la Fig. 257.

1°. Sur le cordon AK du poids K ſoit priſe depuis A vers K, une partie A*a* de longueur arbitraire ; & du point *a* ſoient menées ſur les cordons AC, AB, AM, AP, prolongés de ce côté-là, autant de perpendiculaires *ac*, *aβ*, *aμ*, *aπ*, qui les rencontrent en *c*, *β*, *μ*, *π*.

2°. Après avoir pris ſur le cordon AB, depuis B vers A, la partie B*b*=A*β*, du point *b* ſoient menées ſur les cordons EB, DB, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires *be*, *bδ*, qui les rencontrent en *e*, *δ*.

3°. Après avoir pris ſur le cordon BD depuis D vers B, la partie D*d*=B*δ*, du point *d* ſoient menées ſur les cordons DF, GD, HD, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires *df*, *dg*, *dh*, qui les rencontrent en *f*, *g*, *h*.

4°. Après avoir pris ſur le cordon AM depuis M vers A, la partie M*m*=A*μ*, du point *m* ſoient menées ſur les cordons LM, NM, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires *ml*, *mn*, qui les rencontrent en *l*, *n*.

5°. Après avoir pris ſur le cordon AP depuis P vers A, la partie P*p*=A*ϖ*, du point *p* ſoient menées ſur les cordons PS, QP, RP, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires *pſ*, *pq*, *pr*, qui les rencontrent en *ſ*, *q*, *r*.

6°. Après tout cela ſoient appellées B, D, M, P, les forces avec leſquelles les cordons AB, BD, AM, AP, ſont tirez ſuivant leurs longueurs par le concours des puiſſances appliquées aux extrêmitez de chacun d'eux.

V. Toutcela poſé, l'art. 1. donnera,

1°. K×A*a*+C×A*c*+P×A*ϖ*=B×A*β*+M×A*μ*, ou K×A*a*+C×A*c*=B×A*β*+M×A*μ*−P×A*ϖ*.

2°.

2°. B×Bb=E×Be+D×Bδ, ou (à cauſe que les nomb. 2. 3. de l'art. 4. donnent Bb=Aβ, Bδ=Dd) B×Aβ=E×Be+D×Dd.

3°. D×Dd+F×Df=G×Dg+H×Dh, ou D×Dd=G×Dg+H×Dh−F×Df. De ſorte qu'en ſubſtituant cette valeur de D×Dd dans la derniere équation du précedent nomb. 2. l'on aura B×Aβ=E×Be+G×Dg+H×Dh−F×Df.

4°. M×Mm=L×Ml+N×Mn, ou (à cauſe que le nomb. 4. de l'art. 4. donne Mm=Aμ) M×Aμ=L×Ml+N×Mn.

5°. P×Pp+S×PS=Q×Pq+R×Pr, ou (à cauſe que le nomb. 5. de l'art. 4 donne Pp=Aϖ) P×Aϖ=Q×Pq+R×Pr−S×Pf.

Donc en ſubſtituant dans la ſeconde équation du précedent nomb. 1. les valeurs de B×Aβ, M×Aμ, P×Aϖ, trouvées dans les nomb. 3. 4. 5. qui le ſuivent; l'on aura enfin K×Aa+C×Ac=E×Be+G×Dg+H×Dh−F×Df+L×Ml+N×Mn−Q×Pq−R×Pr+S×Pf, ou K×Aa+C×Ac+F×Df+Q×Pq+R×Pr=E×Be+G×Dg+H×Dh+L×Ml+N×Mn+S×Pf.

VI. Soit preſentement tout le ſyſtême mû d'un mouvement parallele à AK dans tous ſes points, lequel mouvement faſſe décrire au point A une partie quelconque Aa de la direction AK du poids K. Il eſt viſible (*art.* 4. *& Def.* 32.) qu'en prenant Aa pour la vîteſſe virtuelle de ce poids K.

1°. L'on aura Ac pour la vîteſſe virtuelle de la puiſſance C, & Aβ, ou (*art.* 4. *nomb.* 2.) ſon égale Bb pour la vîteſſe virtuelle de la force B, réſultante du concours d'action des puiſſances E, F, G, H; & qu'ainſi la puiſſance E aura Be pour ſa vîteſſe virtuelle; & la force D réſultante du concours des forces F, G, H, aura Bδ, ou (*art.* 4. *nomb.* 3.) ſon égale Dd pour ſa vîteſſe virtuelle; en conſequence de laquelle Df, Dg, Dh, feront auſſi les vîteſſes virtuelles de ces puiſſances F, G, H.

2°. L'on aura de même Aμ, ou (*art.* 4. *nomb.* 4.) ſon égale Mm pour la vîteſſe virtuelle de la force M réſultan-

te du concours d'action des puiſſances L, N; & en conſequence Ml, Mn, pour les vîteſſes virtuelles de ces puiſſances L, N.

3°. L'on aura encore de même Aw, ou (*art. 4. nomb. 5.*) ſon égale Pp, pour la vîteſſe virtuelle de la force P, réſultante du concours d'action des puiſſances Q, R, S; & en conſequence Pq, Pr, Pſ, pour les vîteſſes virtuelles de ces puiſſances Q, R, S. Et toûjours de même en quelque nombre qu'elles ſoient, & les nœuds auſſi de leurs cordons.

VII. Puiſque ſuivant les nomb. 1. 2. 3. du précedent art. 6. en prenant ici Aa pour la viteſſe virtuelle du poids K, l'on y aura Ac, Be, Dſ, Dg, Dh, Ml, Mn, Pq, Pr, Pſ, pour les vîteſſes virtuelles (contemporaines de Aa) des puiſſances C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S; les produits K×Aa, C×Ac, E×Be, F×Dſ, G×Dg, H×Dh, L×Ml, N×Mn, Q×Pq, R×Pr, S×Pſ, exprimeront (*Déf. 32.*) les Energies de ce poids K, & de ces puiſſances C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S, ſuppoſées en équilibre avec lui. Donc l'art. 4. venant de donner K×Ak+C×Ac+F×Dſ+Q×Pq+R×Pr=E×Be+G×Dg+H×Dh+L×Ml+N×Mn+S×Pſ; de laquelle égalité (ſuivant la Déf. 32.) le premier membre étant tout d'Energies affirmatives, & le ſecond membre tout d'Energies negatives priſes affirmativement, la ſomme des Energies affirmatives ſera encore ici égale à la ſomme des Energies negatives priſes affirmativement. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

Il eſt à remarquer que cette égalité de ſommes d'Energies du poids K & des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. trouvée dans les précedens art. 1. & 7. Fig. 253. 255. dans le cas d'équilibre entre ce poids & ces puiſſances avec des cordes ſeulement, ſe trouvera de même entre les forces de pluſieurs corps qui en choquent tous à la fois un autre, qui ſans force ni action aucune de ſa part, demeure en repos, nonobſtant tous ces chocs ſimultanez. Voici comment.

Fig. 253. 255. VIII. Pour appliquer ce qui précede au choc des corps, imaginons-en preſentement un à la place du point

du nœud A des cordes précedentes, lequel ſans peſanteur ni action aucune de ſoi-même, ſoit choqué à la fois par autant d'autres corps qu'il y a ci-deſſus de puiſſances K, P, Q, R, S, T, &c. (en y prenant le poids K pour une de ces puiſſances, laquelle ſoit d'une force égale à la peſanteur de ce poids, & de même direction que lui) ſuivant leurs directions, directement à contre-ſens de ceux ſuivant leſquels ces puiſſances tirent ce point ou nœud A, & avec des forces égales à celles de ces puiſſances, en ſorte que chacun de ces corps choquans pouſſe le choqué en A avec une force égale à celle dont il eſt tiré directement à contre-ſens par la puiſſance dont ce corps choquant eſt ſuivant la direction.

Il eſt manifeſte (*Ax.* 2.) que puiſque (*Hyp.*) tous ces corps choquans pouſſent le choqué en A avec des forces égales & directement contraires à celles dont le nœud A eſt tiré par les puiſſances K, P, Q, R, S, T, &c. qu'on ſuppoſe ſuppléées par ces corps choquans, chacune par celui, qui de force égale à celle de cette puiſſance, ſuit la direction de cette même puiſſance à contre-ſens: tous ces chocs enſemble retiendroient le corps choqué en repos & en équilibre en A, comme ce nœud A y eſt retenu (*Hyp.*) par le concours de toutes ces puiſſances; & que quelque mouvement droit qu'on donnât alors à ce corps choqué, tel que celui qu'on a donné (*art.* 1. 6.) au nœud A dont ce corps choqué tient ici (*Hyp.*) la place, les vîteſſes virtuelles & les Energies de ces corps choquans ſeroient égales à celles de ces puiſſances K, P, Q, R, S, T, &c. c'eſt-à-dire, égales chacune pour chacun de ces corps choquans à celle de la puiſſance correſpondante, qu'il égaleroit (*Hyp.*) en force abſolue, & de laquelle il ſuivroit la direction à contre-ſens. Donc ayant trouvé ci-deſſus (*art.* 1. 7.) qu'en cas d'équilibre entre toutes ces puiſſances, la ſomme de leurs Energies affirmatives ſeroit toujours égale à la ſomme de leurs Energies negatives affirmativement priſes, l'on aura pareillement ici (en cas d'équilibre entre les corps choquans qu'on y ſuppoſe agir

tous à la fois ſur le corps choqué en A, comme les puiſſances dont ils ſuivent les directions à contre-ſens, agiſſent ſur ce nœud A, c'eſt-à-dire, en cas de repos de ce corps choqué, nonobſtant tous les chocs qu'il recevroit à la fois de tous ces corps choquans) la ſomme des Energies affirmatives des corps choquans, égale à la ſomme de leurs Energies negatives priſes affirmativement. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

IX. Si le corps choqué en A, qu'on vient de ſuppoſer (*art.* 8.) ſans aucune force ni action de ſa part, en avoit quelqu'une avec laquelle les corps choquans le trouvaſſent déja en mouvement à l'inſtant qu'ils le choquent tous à la fois, & avec laquelle tous ces corps choquans fiſſent alors équilibre ; il n'y auroit qu'à regarder cette force propre ou ce mouvement du corps choqué, comme l'effet d'un nouveau corps (que j'appelle *choquant imaginaire*) qui l'auroit choqué avant tous ceux-là, & qui à l'inſtant de tous leurs chocs ſimultanez feroit comme s'il commençoit avec eux à pouſſer le corps choqué, lequel étant en ce cas comme s'il n'avoit plus ni force ni action de ſoi-même, & qu'il reçût tous ces chocs à la fois, tant des corps choquans effectifs, que de l'imaginaire, aura encore ici, comme dans le précedent art. 7. la ſomme des Energies affirmatives de tous ces corps choquans en équilibre entr'eux, égale à la ſomme de leurs Energies négatives priſes affirmativement. Donc la force & la direction du corps choquant imaginaire étant (*Hyp.*) les mêmes que celles qu'avoit le corps choqué à l'inſtant qu'il l'a été par tous les autres à la fois, avec leſquels il eſt (*Hyp.*) demeuré en équilibre ; & conſequemment l'Energie de ce corps choqué étant ainſi la même que celle du choquant imaginaire : l'on aura pareillement ici la ſomme des Energies affirmatives des corps choquans effectifs & du choqué, égale à la ſomme de leurs Energies négatives priſes affirmativement. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *démontrer.*

Fig. 155. *Cela* (art. 8. 9.) *démontré dans l'art.* 8. *dépendamment des puiſſances K, P, Q, R, S, T, &c. pourroit auſſi l'être*

indépendamment d'elles, en raiſonnant ſur les forces & directions des corps choquans en équilibre entr'eux, comme l'on a fait dans les art. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Fig. 253. ſur les forces & directions de ces puiſſances en équilibre entr'elles; & en rompant cet équilibre des corps choquans par un mouvement du corps choqué, & de tout le ſyſtême, ſemblable à celui qu'on a donné (art. 1. 6.) *au nœud A, & tout le ſyſtême de ces puiſſances dont il a rompu l'équilibre. Mais cette autre démonſtration indépendante des poids ſoûtenus avec des cordes ſeulement, ſeroit d'autant plus inutile, qu'elle reviendroit à celle du précedent art. 8. outre qu'elle exigeroit des Figures, qui ne feroient ainſi que multiplier inutilement le nombre de celles-ci: ceux qui voudront une telle démonſtration, la pourront faire à l'imitation des précedentes; & les Figures en ſeront aiſées à imaginer ſur les Fig. 253. 255.*

Il eſt à obſerver dans les Fig. 255. 256. que ſi la direction Aa du mouvement donné dans les art. 2. 6. au nœud A, & à tout le ſyſtême, excepté aux centre fixe des poulies de la Fig. 256. étoit perpendiculaire à quelqu'une des directions des puiſſances P, Q, R, S, T, & du poids K ſuppoſé en équilibre avec toutes ces puiſſances; la viteſſe virtuelle (Déf. 30.) *& conſequemment l'Energie de cette puiſſance* (*le poids K étant pris pour une*) *s'y trouveroit anéantie; & des Energies reſtantes aux autres puiſſances, pluſieurs y deviendroient affirmatives ou negatives, de negatives ou d'affirmatives qu'elles ſont ici. Par exemple, ſi Aa étoit perpendiculaire ſur la direction AN du poids K, il eſt manifeſte, non ſeulement que ce poids auroit alors ſa viteſſe virtuelle Ak=0, & conſequemment auſſi ſon Energie K×Ak=0, mais encore que l'angle alors droit aAK rendroit Ap, Ar, As, negatives; & conſequemment changeroit* (Déf. 32.) *de negatives en affirmatives les Energies des puiſſances R, S, & d'affirmative en negative celle de la puiſſance P, ſans rien faire de pareil aux Energies des puiſſances Q, T. Ce qu'on voit ici de Aa perpendiculaire ſur la direction AN du poids K, on le verra pareillement de la même Aa perpendiculaire ſur la direction de quelqu'une des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuppoſées en équilibre avec ce poids K.*

PARTIE II.

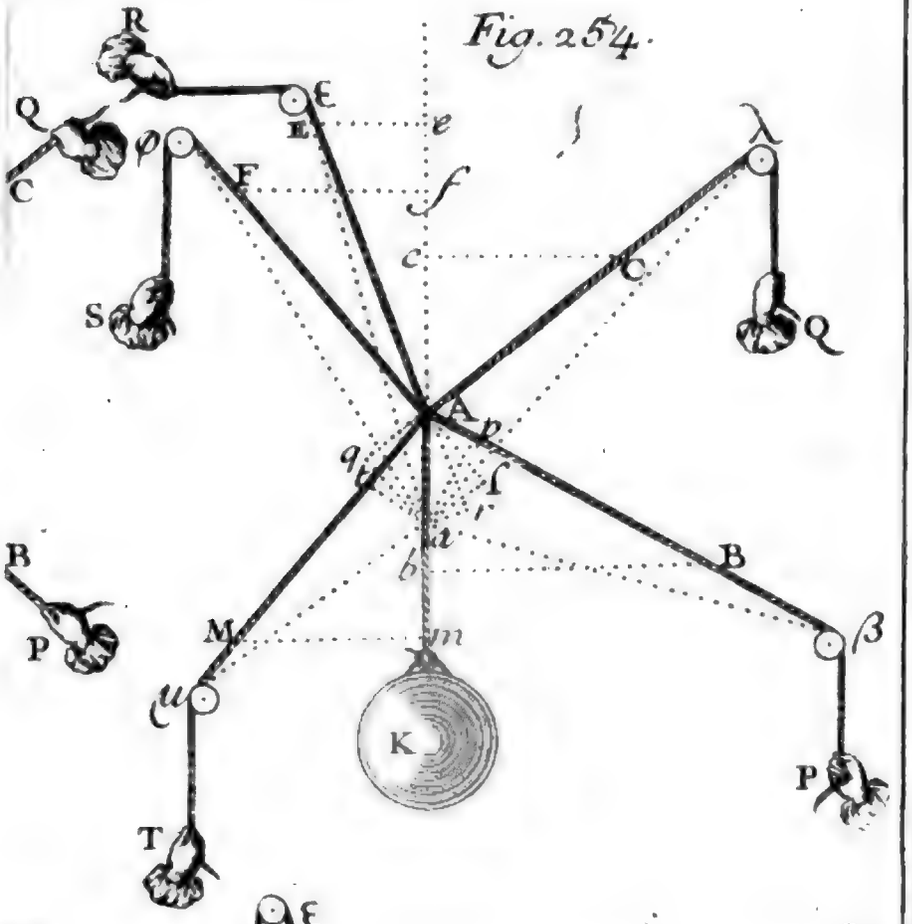
Pour l'équilibre d'un poids ſoûtenu avec des Poulies.

FIG. 158. I. Soit la puiſſance M en équilibre avec le poids P ſur la Poulie HK fixe en ſon centre C. Il eſt manifeſte que quelque mouvement qu'on donne à cette Poulie autour de ce centre fixe C, la puiſſance M & le poids P, appliquez aux extrêmitez d'une corde MHKP, que le frottement empêche de gliſſer ſur cette Poulie HK, parcourront des chemins égaux, en conſervant toûjours leurs mêmes directions HM, KP; & qu'ainſi (*Déf.* 32.) ils auront toûjours des vîteſſes virtuelles égales: de ſorte que leur équilibre ſuppoſé les rendant toûjours (*Th.* 14. *Cor.* 1.) égaux entr'eux, ils auront auſſi toûjours (*Déf.* 32.) des Energies égales, dont l'affirmative eſt du côté vers lequel on aura fait tourner la Poulie, & la negative de l'autre. *C'eſt cette égalité d'Energies qu'il falloit ici* 1°. *démontrer.*

II. Pour voir encore ici autrement une telle égalité d'Energies, ſoit tout le ſyſtême mû d'un mouvement qui faſſe parcourir à tous ſes points des lignes paralleles & égales à la droite quelconque A*a* perpendiculaire à AC, menée du centre C de la Poulie par le point A de concours des directions prolongées MH, PK, de la puiſſance M & du poids P ſuppoſez en équilibre entr'eux: ſoit, dis-je, ce mouvement tel que lorſque A ſera en *a*, ces directions AM, AP, ſoient ſur leurs paralleles *am*, *ap*. Cela poſé, ſoient *am*, *ap*, perpendiculaires en *m*, *p*, ſur ces directions prolongées; l'on aura, ſuivant la Déf. 32. A*m*, A*p*, pour les vîteſſes virtuelles de la puiſſance M & du poids P; & M×A*m*, P×A*p*, pour leurs Energies, dont la ſeconde ſera ici affirmative, & la premiere negative. Or la droite AC diviſant également en deux l'angle HAK, les droits (*Hyp.*), CA*a*, & en *m*, *p*, rendent A*p*=A*m*, de même que le Corol. 1. du Th. 14. rend P=M; ce qui donne P×A*p*=M×A*m*. Donc l'Energie affirmative du

Digitized by Google

Fig. 254.



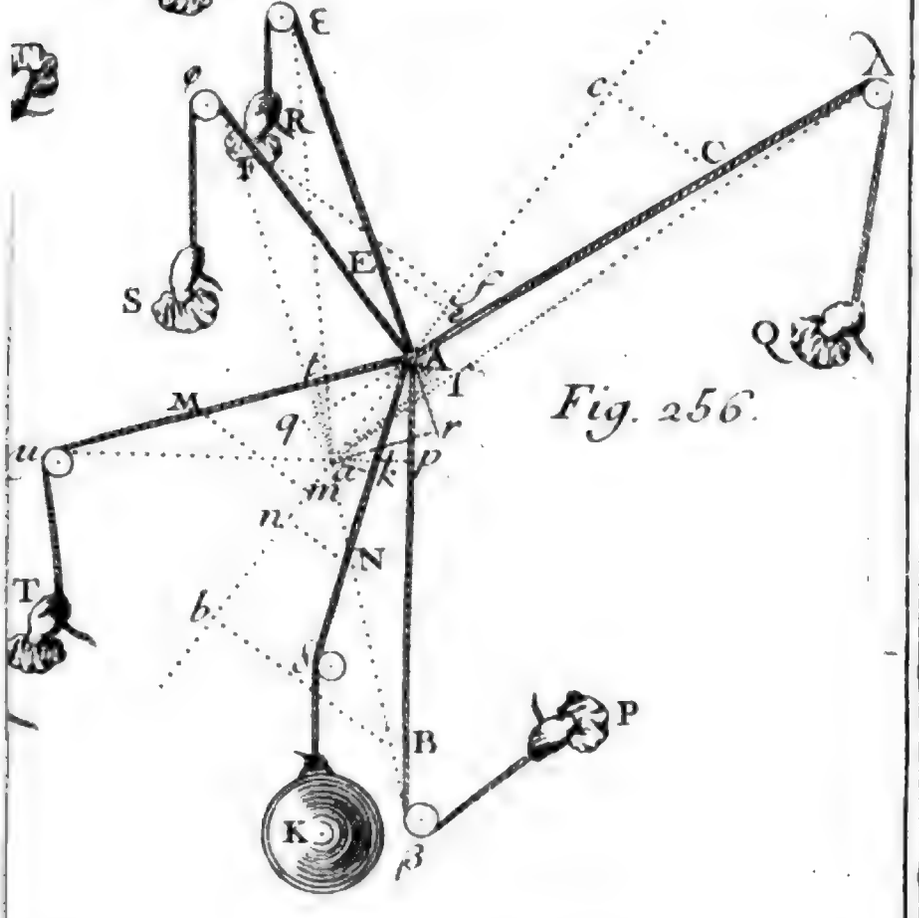


Fig. 256.

Digitized by Google

poids P eſt ici égale à l'Energie negative de la puiſſance R ſuppoſée en équilibre avec lui. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

Voilà pour les Poulies de centres fixes : voici preſentement pour celles dont les centres ſont mobiles.

III Si le poids P eſt ſuſpendu au centre C mobile d'une Poulie HK, que deux puiſſances M, N, ſoûtiennent avec une corde MHKN, ſur laquelle cette Poulie ſoit appuyée avec le poids qui la charge ; de laquelle corde les parties HM, HN, prolongées, rencontrent enſemble (*part. 1. du Th.* 14.) en quelque point A la direction CP auſſi prolongée du poids P ; ſur laquelle direction CP prolongée vers B, ſoit de longueur quelconque la diagonale AB du parallelogramme AEBF, dont les côtez AE, AF, ſoient ſur les directions HM, KN, des puiſſances M, N, & dont la ſeconde diagonale EF rencontre la premiere AB en D. Soit priſe auſſi A*a* de longueur quelconque ſur la direction BP du poids P ; & de ſon point *a* ſoient *aμ*, *aν*, paralleles aux directions HM, KN, des puiſſances M, N ; duquel point *a* ſoient auſſi *am*, *an*, perpendiculaires en *m*, *n*, à ces directions prolongées. Fig. 159. 160.

Cela fait ou imaginé, le Corol. 5. du Lem. 3. fera voir, comme dans la démonſtr. 1. de la part. 2. du Th. 14. que les lignes AB, AE, AF, ſont proportionnelles au poids P, & aux puiſſances M, N, (*Théor.* 14. *Corol.* 1.) égales entr'elles, leurs proportionnelles AE, AF, ſeront auſſi égales entr'elles ; & conſequemment la diagonale EF du parallelogramme AEBF ſera perpendiculaire en D à ſon autre diagonale AB, de même que *am*, *an*, le ſont (*Hyp.*) aux directions AE, AF, prolongées des puiſſances M, N. Donc les triangles rectangles A*ma*, ADE ; A*na*, ADF, ſont ici ſemblables entr'eux d'eux à deux, & même tous quatre ſemblables entr'eux, chacun à chacun. Par conſequent en appellant D chacun des efforts de A vers D, que font (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) les puiſſances M, N, directement contre le poids P ; leſquels efforts de A vers D, ou vers B, ſont égaux entr'eux ; à cauſe que (*Th.* 14.

Corol. 1.) ces deux puiſſances M, N, le ſont entr'elles, de même que leurs proportionnelles AE, AF. l'on aura ici (comme dans l'art. 1. de la part. 1.) Aa. Am:: AE. AD :: M. D$=\frac{M\times Am}{Aa}$. Et Aa. An:: AF. AD:: N. D$=\frac{N\times An.}{Aa}$

Ce qui (à cauſe de l'égalité qu'on vient de voir entre ces efforts D) donne $2\times D=\frac{M\times Am+N\times An}{Aa}$. Or on vient de voir que D. M:: AD. AE. Et M. P:: AE. AD. Ce qui (en raiſon ordonnée) donne D. P:: AD. AB. Et conſequemment $2\times$D. P:: $2\times$AD. AB. Donc, puiſque AB$=2\times$AD, l'on aura pareillement ici P$=2\times D=\frac{M\times Am+N\times An}{Aa}$; d'où reſulte P$\times$A$a$=M$\times$A$m$+N$\times$A$n$.

Soit preſentement une force étrangere qui rompe l'équilibre ſuppoſé entre les puiſſances M, N, & le poids P, en faiſant parcourir au point A de concours de leurs directions, la droite quelconque Aa, de maniere que ces directions ſoient toujours paralleles chacune à ſoi-même, & que lorſque ce point A ſera en a, celles AM, AN, des puiſſances M, N, ſoient ſur leurs paralleles $a\mu$, $a\nu$ chacune ſur la ſienne. Il eſt manifeſte, ſuivant la Déf. 32. qu'en ce cas de rupture d'équilibre par un tel mouvement de tout le ſyſtême, les lignes Aa, Am, An, exprimeroient les vîteſſes virtuelles du poids P, & des puiſſances M, N, dont l'équilibre ſuppoſé entr'eux ſeroit ainſi rompu; & que les produits P$\times$Aa, M$\times$Am, N$\times$An, en exprimeroient auſſi les Energies. Donc venant de trouver ici P$\times$Aa=M$\times$Am+N$\times$An, l'on y aura l'Energie affirmative du poids P, égale à la ſomme des Energies negatives (affirmativement priſes) des puiſſances M, N, ſuppoſées en équilibre avec ce poids. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

FIG. 161. 162. V. Si l'on veut que le point A de concours des directions

ctions AM, AN, AP, des puiſſances M, N, & du poids P en équilibre avec elles, comme dans le précedent art. 3. ſoit preſentement mû de A vers *a* ſuivant une droite arbitraire A*a* de direction quelconque, qui ne ſoit (ſi l'on veut) aucune de celles des puiſſances, ni du poids dont ce point A ſuivoit la direction CP dans cet art. 3. ſoit le parallelogramme AEBF le même encore ici que là, & de ſes angles E, B, F, ſoient autant de perpendiculaires E*e*, B*b*, F*f*, ſur la droite A*a* prolongée juſqu'à leurs rencontres en *e*, *b*, *f*. Du point *a* ſur les directions prolongées MA, NA, AP, des puiſſances M, N, & du poids P, ſoient auſſi autant de perpendiculaires *am*, *an*, *ap*, qui les rencontrent en *m*, *n*, *p*. Enfin de ce même point *a* ſoient *aμ*, *aν*, *aϖ*, paralleles à ces directions AM, AN, AP, chacune à chacune.

Cela fait, il eſt manifeſte que l'on aura encore ici les triangles rectangles A*ma*, A*e*E; A*na*, A*f*F; A*pa*, A*b*B, ſemblables entr'eux deux à deux diſtinguez, comme on les voit ici: ce qui joint à la part. 1. du Lem. 3. comme dans la démonſtr. 2. du Th. 6. (en appellant *e*, *f*, *b*, les efforts ſuivant A*e*, A*f*, *b*A, réſultans des abſolus des puiſſances M, N, & du poids P, ſuivant leurs directions AM, AN, AP) donnera

$$Aa.\ Am :: AE.\ Ae :: M.\ e = \frac{M \times Am}{Aa}.$$

$$Aa.\ An :: AF.\ Af :: N.\ f = \frac{N \times An}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ap :: AB.\ Ab :: P.\ b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

Donc $b.\ e + f :: \frac{P \times Ap}{Aa}.\ \frac{M \times Am + N \times An}{Aa} :: P \times Ap.\ M \times Am + N \times An.$

Or la part. 1. du Lem. 3. & la démonſtr. de la part. 2. du Th. 14.

Donnent enſemble $\begin{cases} e.\ M :: Ae.\ AE. \\ M.\ N :: AE.\ AF. \\ N.\ f :: AF.\ Af. \end{cases}$

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura ici $e.f :: Ae.\ Af$. Et (en compoſant) $e+f.f :: Ae+Af.\ Af$.

L'on aura donc ici $\begin{cases} e+f.\ f :: Ae+Af.\ Af. \\ f.\ N :: Af.\ \ AF. \\ N.\ P :: AF.\ \ AB. \\ P.\ b :: AB.\ \ Ab. \end{cases}$

Par conſequent (en multipliant encore par ordre) l'on y aura $e+f.\ b :: Ae+Af.\ Ab$. Or (*Lem.* 10.) $Ab=Ae+Af$. Donc auſſi $b=e+f$. Mais on vient de trouver $b.\ e+f :: P\times Ap.\ M\times Am+N\times An$. Donc enfin $P\times Ap=M\times Am+N\times An$.

Concevons preſentement (comme dans le précedent art. 2.) que l'équilibre ici ſuppoſé entre les puiſſances M, N, & le poids P, ſoit rompu par une force qui faſſe parcourir au point A de concours de leurs directions, la droite Aa de longueur & de direction quelconques, de maniere que ces trois autres directions là ſoient toujours paralleles chacune à ſoi-même, & que lorſque le point A de leur concours ſera en a, ces trois directions AM, AN, AP, des puiſſances M, N, & du poids P, ſoient ſur leurs parall. les $a\mu$, $a\nu$, $a\varpi$, chacune confondue avec la ſienne.

Un tel mouvement de tout le ſyſtême ainſi conçû rompre l'équilibre ici ſuppoſé entre les puiſſances M, N, & le poids P, fera voir, ſuivant la Déf. 32. qu'alors les lignes Am, An, Ap, exprimeroient leurs vîteſſes virtuelles; & que les produits $M\times Am$, $N\times An$, $P\times Ap$, en exprimeront les Energies. Donc venant de trouver $P\times Ap=M\times Am$

$+N\times An$, l'on aura encore ici (comme dans le précedent art. 3.) l'Energie affirmative du poids P, égale à la ſomme des Energies negatives (priſes affirmativement) des puiſſances M, N, ſuppoſées en équilibre avec ce poids. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

V. 1°. Si l'on veut preſentement que la direction Aa du mouvement donné (*art.* 4.) au point A de concours des directions des puiſſances M, N, & du poids P, ſoit celle AP de ce poids P, comme dans l'art. 3. Cette hypotheſe, qui fait tomber a en p, rendant $Ap=Aa$, changera l'équation $P\times Ap=M\times Am+N\times An$ du précedent art. 4. en $P\times Aa=M\times Am+N\times An$, qui eſt celle de l'art. 3. dans lequel le mouvement du point A ſe fait comme ici, ſuivant la direction AP du poids P, parallelement à laquelle on ſuppoſe ici comme là, que tous les autres points du ſyſtême ſe meuvent pendant le paſſage de A en a ſuivant Aa.

2°. Si l'on veut que cette direction Aa du point A, ſoit celle d'une des puiſſances M, N, par exemple, celle MA de la puiſſance M; cette hypotheſe rendant $Am=Aa$, changera pour ici l'équation du précedent art. 4. en $P\times Ap=M\times Aa+N\times An$. Et ſi Aa étoit ſuivant NA, l'on auroit de même $P\times Ap=M\times Am+N\times Aa$.

3°. Si l'on veut preſentement que cette direction Aa du point A, ſoit perpendiculaire à la direction d'une des puiſſances M, N, ou du poids P, par exemple, à la direction AM de la puiſſance M, comme dans la Fig. 263. Cette hypotheſe, qui dans les Fig. 261. 262. fait tomber am ſur Aa, rendant ainſi $Am=o$, réduiroit pour ici l'équation du précedent art. 4. à $P\times Ap=N\times An$. Ce ſeroit la même choſe, ſi le cordon MH de la puiſſance M, étoit attaché à quelque clou ou crochet fixe en M, lequel par ſa réſiſtance ſuppléât la puiſſance M, comme dans la Fig. 263. Mais alors la ligne Aa devenant un arc de cercle, qui auroit M pour centre, devroit être infiniment petite; & conſequemment auſſi An, Ap, pour conſerver la reſſemblance des triangles, qui dans le précedent art. 4.

ont donné l'équation dont celle-ci reſulte, par laquelle on voit que l'Energie $M \times Am$ de la puiſſance M, ſeroit ici nulle.

Fig. 163. VI. Ce nomb. 3. du precedent art. 5. peut encore ſe démontrer immediatement, en ſuppoſant un arc infiniment petit Aa, décrit du centre M, de l'extrêmité a duquel tombent deux perpendiculaires an, ap, ſur les directions prolongées NA, AP, de la puiſſance N, & du poids P en équilibre avec elle à l'aide du clou ou crochet fixe M, auquel la corde NKHM, qui ſoûtient la Poulie KH chargée du poids P en ſon centre mobile C, eſt attachée par ſon extrêmité M. Car ſi de quelque point du cordon MH, par exemple, de ſon point M on mene MB, MD, perpendiculaires en B, D, ſur les directions prolongées PA, AN, du poids P, & de la puiſſance N, les angles (*conſtr.*) droits $MA a$, Apa, Ana, qui rendent les autres $Aap = MAB$, $Aan = MAD$, rendant ainſi les triangles rectangles Apa, MBA; Ana, MDA, ſemblables entr'eux deux à deux, diſtinguez comme on les voit ici; l'on y aura $Aa.\ Ap :: AM.\ MB = \frac{AM \times Ap}{Aa}$. Et $Aa.\ An :: AM.\ MD = \frac{AM \times An}{Aa}$

Et par conſequent $MB.\ MD :: \frac{AM \times Ap}{Aa}.\ \frac{AM \times An}{Aa} :: Ap.\ An$

Or en prenant Am pour le ſinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol. 1.*) MB, MD, pour les ſinus des angles MAB, MAD, dont le ſecond eſt ici double du premier; & conſequemment dont les ſinus MB, MD, ſont entr'eux (*Th. 14. part. 2.*) comme la puiſſance N, & le poids P ſuppoſé en équilibre avec elle. Donc on aura ici $N.\ P :: Ap.\ An$. Et conſequemment $P \times Ap = N \times An$. Or ſi l'on imagine cet équilibre rompu par une force qui faſſe parcourir Aa au point A, en faiſant paſſer MA ſur Ma, infiniment proche d'elle, & AP, AN, ſur $a\varpi$, $a\rho$, ſoit qu'elles leur ſoient paralleles chacune à chacune, ou qu'elles faſſent des angles infiniment petits chacune avec ſa correſpondante; ſuivant la Déf. 32. que Ap, An, exprimeront les vîteſſes

virtuelles du poids P, & de la puiſſance N; & que P×A*p*, N×A*n* en exprimeront les Energies, deſquelles la premiere ſera ici affirmative, & la ſeconde negative. Donc l'Energie affirmative du poids P ſera ici égale à l'Energie negative de la puiſſance N ſuppoſée en équilibre avec lui, à l'aide du clou ou crochet fixe M, & la réſiſtance de ce clou ou crochet ſans aucune Energie: le tout comme dans le nomb. 3. du précedent art. 5. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Si ſans aucune Poulie HK, le poids P étoit ſoûtenu ſeulement avec des cordes AP, AM, AN, attachées enſemble par un nœud commun A, deſquelles cordes la ſeconde AM fût attachée par ſon extrêmité M au crochet fixe de ce nom, & la troiſiéme AN retenue par une puiſſance N, qui ſoutient ainſi ce poids P appliqué à la premiere AP: ce poids P étant encore ici (*Th.* 1. *Corol.* 3.) à cette puiſſance N, comme le ſinus MD de l'angle total MAN, au ſinus MB de l'angle partial MAB, quelque rapport qu'il y eût preſentement entre ces deux angles; un raiſonnement ſemblable au précedent, fera voir que l'Energie affirmative P×A*p* du poids P, eſt encore ici égale à l'Energie negative N×A*n* de la puiſſance N en équilibre avec lui, de la maniere qu'on le ſuppoſe ici.

Ceci peut entrer dans la précedente part. 1. *comme peut entrer dans celle-ci ce qu'on a fait voir dans les art.* 1. 2. *de celle-là touchant l'équilibre d'un poids ſoûtenu par pluſieurs puiſſances avec des cordes appuyées ſur des Poulies de centres fixes dans les Fig.* 254. 256.

PARTIE III.

Pour l'équilibre d'un Poids ſoûtenu par une puiſſance ſur le Tour.

I. Soit la puiſſance R en équilibre avec le poids P ſur le Tour DBN. Du centre A de cette Machine vue de profil, ſoient deux rayons AM, AN, qui interceptent des arcs quelconques ſemblables BN, *bn*, des circonferences de la FIG. 264.

roue DBN, & de ſon rouleau *Mbn*. Il eſt viſible que ſi autour du centre fixe A de cette Machine, on lui cauſe quelque mouvement qui faſſe paſſer B en N, & conſequemment *b* en *n*; le cordon NR que la puiſſance R tient ferme ſans le laiſſer couler, s'alongera de la valeur de BN ſans changer de direction, la puiſſance R reculant de cette valeur ſuivant cette même direction NR, pendant que le cordon MP du poids P s'accourcira de la valeur de *bn*, ſans changer non plus de direction, en faiſant monter ce poids P de cette valeur ſuivant cette même direction MP: de ſorte que (*Def.* 32.) BN, *bn*, exprimeront ici les vîteſſes virtuelles de cette puiſſance R, & de ce poids P, dont les Energies ſeront ainſi exprimées (*Def.* 32.) par les produits R×BN, P×*bn*; deſquelles Energies (*Def.* 32.) la premiere ſera affirmative, & l'autre negative. Or l'équilibre ici ſuppoſé entre ce poids P & cette puiſſance R, y donne (*Th.* 19. *Cor.* 1.) R. P:: A*b*. AB :: *bn*. BN. D'où réſulte R×BN=P×*bn*. Donc en ce cas d'équilibre l'Energie affirmative de la puiſſance R ſera égale à l'Energie negative (priſe affirmativement) du poids P. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Fig. 265. 266. 267. 268. II. Cette égalité d'Energies peut encore ſe démontrer en rompant l'équilibre ici ſuppoſé entre le poids P & la puiſſance R, par un mouvement de tout le ſyſtême, qui faſſe décrire à tous ſes points des lignes droites égales, & toutes perpendiculaires à la droite AE menées du centre A de la Machine par le point E de concours des directions prolongées MP, NR, du poids P & de la puiſſance R; de ſorte que pendant que ce centre A de la Machine parcourra A*a*, le point de concours E de ces directions parcourre E*e* parallele & égale à A*a*, & perpendiculaire (comme elle) ſur AE; & que lorſque les points A, E, ſeront en *a*, *e*, les directions ME, NE, AE, du poids P, & de la puiſſance R, & (*Th.* 30. *part.* 2.) de la charge du centre A de la Machine, ainſi mûes parallelement chacune à ſoi-même, ſoient ſur leurs paralleles *me*, *ne*, *ae*.

Cela conçû, ſi du point *e* on mene *ep*, *er*, perpendicu-

Digitized by Google

laires en p, r, ſur les directions prolongées ME, NE, du poids P, & de la puiſſance R, l'on aura (*Déf.* 32.) Ep, Er, pour les expreſſions des vîteſſes virtuelles de ce poids P & de cette puiſſance R; ce qui donnera (*Déf.* 32.) $P \times Ep$, $R \times Er$, pour leurs Energies, dont la premiere ſera ici (*Déf.* 32.) affirmative, & la ſeconde negative dans les Fig. 265. 268. la premiere au contraire ſera negative, & la ſeconde affirmative dans les Fig. 266. 267.

De plus, ſi l'on mene les rayons AM, AN, du rouleau & de la roue de la Machine par les points M, N, où ils ſont touchez par les directions ME, NE, du poids P & de la puiſſance R; les angles (*conſtr.*) droits AEe, epE, erE, rendant les autres angles $Eep = AEM$, $Eer = AEN$, les triangles (*conſtr.*) rectangles Epe, AME; Ere, ANE, ſeront ici ſemblables entr'eux deux à deux, comme on les y voit diſtinguez: ce qui donnera $Ee.\ Ep :: AE.\ AM = \frac{AE \times Ep}{Ee}$. Et $Ee.\ Er :: AE.\ AN = \frac{AE \times Er}{Ee}$. Donc on aura ici $AM.\ AN :: \frac{AE \times Ep}{Ee}.\ \frac{AE \times Er}{Ee} :: Ep.\ Er$. Or dans l'équilibre qu'on y ſuppoſe entre le poids P & la puiſſance R, le Corol. 1. du Th. 14. donne $R.\ P :: AM.\ AN$. Donc on y aura auſſi pour lors $R.\ P :: Ep.\ Er$. Et par conſequent $P \times Ep = R \times Er$; c'eſt-à-dire (ſuivant ce qu'on vient de voir des Energies) que l'Energie $P \times Ep$ du poids P, affirmative dans les Fig. 265. 266. & negative dans les Fig. 266. 267. ſera ici égale à l'Energie $R \times Er$ de la puiſſance R ſuppoſée en équilibre avec ce poids P, laquelle ſeconde Energie $R \times Er$ ſera au contraire negative dans les Fig. 265. 268. & affirmative dans les Fig. 266. 267. de ſorte que dans le cas preſent d'équilibre entre ces deux forces P, R, l'Energie affirmative de l'une ſera toûjours égale à l'Energie negative (affirmativement priſe) de l'autre. *Ce qu'il falloit encore* 1°. *démontrer.*

III. Si avec les Energies du poids P, de la puiſſance R, ſuppoſez en équilibre entr'eux ſur le Tour DN, on veut

Fig. 269. 270. 271. 272.

y comprendre auſſi l'Energie de la réſiſtance du centre fixe A de ce Tour directement (*Ax.* 4.) oppoſée & égale à la charge qui lui réſulte (*Th.* 14. *part.* 2. 3.) de A vers F ſuivant EF du concours de ce poids P & de cette puiſſance R, ſoit encore ici tout le ſyſtême mû parallelement à la droite A*a* de longueur arbitraire, mais preſentement de direction quelconque, & de maniere encore que pendant que le centre A de la Machine parcourra cette droite A*a*, le point E de concours des directions PE, RE, AE, du poids P, de la puiſſance R, & de la réſiſtance (que j'appelle B) du centre A de la Machine, parcourre E*e* égale & parallele à A*a*; & que lorſque A ſera en *a*, & E en *e*, ces directions PE, RE, AE, du poids P, de la puiſſance R, & de la réſiſtance B de la Machine, ainſi mûes parallelement à elles-mêmes, ſoient ſur leurs paralleles *me*, *ne*, *ae*. Alors ſi du point *e* l'on mene *ep*, *er*, *eb*, perpendiculaires en *p*, *r*, *b*, ſur ces directions prolongées du poids P, de la puiſſance R, & de la réſiſtance B de la Machine, l'on aura (*Déf.* 32.) E*p*, E*r*, E*b*, pour les vîteſſes virtuelles de ce poids P, de cette puiſſance R, & de cette réſiſtance B; & P×E*p*, R×E*r*, B×E*b*, pour leurs Energies, deſquelles la derniere B×E*b* ſera affirmative, & les deux autres negatives dans les Fig. 269. 270. Pour dans les Fig. 271. 272. les Energies R×E*r*, B×E*b*, y ſont toutes deux affirmatives, & P×E*p* eſt la ſeule qui y ſoit negative.

Ces Energies étant ainſi reconnues, ſoit le parallelogramme EGFH d'une diagonale quelconque EF, priſe depuis E vers F ſur la direction EA ou AE prolongée de la réſiſtance B de la Machine, & des côtez EG, EH, pris ſur les directions prolongées ME, NE, du poids P & de la puiſſance R. Si des angles G, H, F, de ce parallelogramme, on mene G*g*, H*h*, F*f*, perpendiculaires en *g*, *h*, *f*, ſur *e*E prolongée, comme le ſont (*Hyp.*) *ep*, *er*, *eb*, en *p*, *r*, *b*, ſur ces directions ME, NE, AE, prolongées du poids P, de la puiſſance R, & de la réſiſtance B de la Machine; il eſt viſible que les triangles ainſi rectangles E*pe*, E*g*G,

EgG ; Ere, EbH ; Ebe, EfF, ſeront ſemblables entr'eux deux à deux diſtinguez comme on les voit ici, ayant ainſi deux à deux leurs angles oppoſez au ſommet E, égaux entr'eux.

$$\text{Donc} \begin{cases} Ee.Ep::EG.Eg=\frac{EG\times Ep}{Ee}. \\ Ee.Er::EH.Eb=\frac{EH\times Er}{Ee}. \\ Ee.Eb::EF.Ef=\frac{EF\times Eb}{Ee}. \end{cases}$$

Or (*Lem.* 10.) $Ef=Eg\pm Eh$, en y prenant le ſuperieur du double ſigne $\pm$ pour le cas des Fig. 269. 270. & l'inferieur pour le cas des Fig. 271. 272. Donc auſſi $EF\times Eb=EG\times Ep\pm EH\times Er$, en y prenant de même le double ſigne $\pm$. Or (*Th.* 19. *part.* 3.) $B.P::EF.EG=\frac{EF\times P}{B}$. Et $B.R::EF.EH=\frac{EF\times R}{B}$. Donc la ſubſtitution de ces valeurs de EG, EH, dans l'équation qui les précede, la changeant en $EF\times Eb=\frac{EF\times P\times Ep\pm EF\times R\times Er}{B}$, l'on aura ici $B\times Eb=P\times Ep\pm R\times Er$: ſçavoir, $B\times Eb=P\times Ep+R\times Er$ dans le cas des Fig. 269. 270. Et $B\times Eb=P\times Ep-R\times Er$, ou $B\times Eb+R\times Er=P\times Ep$ dans le cas des Fig. 271. 272. D'où l'on voit (ſuivant les Energies trouvées ci-deſſus) que dans le cas des Fig. 269. 270. l'Energie affirmative de la réſiſtance B du centre A de la Machine en queſtion, eſt égale à la ſomme des Energies negatives (affirmativement priſes) du poids P & de la puiſſance R ſuppoſée en équilibre avec lui ſur cette Machine ; & que dans le cas des Fig. 271. 272. la ſomme des Energies affirmatives de la réſiſtance B du centre A de la Machine, & de la puiſſance R, eſt égale à l'Energie negative (affirmativement priſe) du poids P. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

On voit assez par tout ce qu'on a dit jusqu'ici des Energies, qu'elles ne sont affirmatives ou negatives, qu'autant que le mouvement du système favorise ou contrarie les puissances (j'y comprends aussi les poids) & les résistances dont elles sont les Energies; & qu'ainsi ce mouvement étant arbitraire, il le sera aussi de rendre affirmative ou negative celle qu'on voudra de ces Energies; il sera de même de celles dont nous allons encore parler. Voici dans les articles suivans quelques exemples de ces changemens arbitraires d'Energies affirmatives en negatives, & de negatives en affirmatives.

IV. 1°. Si dans les Fig. 269. 272. on imagine A*a* en ligne droite avec AE, ou sa parallele E*e* couchée sur EA, ayant *e* vers A; & que dans les Fig. 270. 271. l'on imagine au contraire A*a* couchée sur AE ou sa parallele E*e* en ligne droite avec EA, ayant *e* de l'autre côté de E par rapport à A: ce changement de situation A*a* ou E*e*, du mouvement supposé (*art.* 3.) de A vers *a*, ou de E vers *e*, à tout le système, ne faisant qu'augmenter les Energies du poids P, de la puissance R, & de la résistance B du centre fixe A de la Machine, sans rien changer à l'affirmatif ou au negatif de ces Energies, & sans en anéantir aucune; les égalitez qu'on en vient de trouver dans le précedent art. 3. pour toutes ces Fig. 269. 270. 271. 272. resteront encore ici les mêmes, & avec les mêmes significations d'affirmatifs ou de negatifs d'Energies, qu'on leur a trouvées là pour chacune de ces quatre Figures.

2°. Mais si dans les Fig. 269. 270. l'on imagine A*a* couchée sur AE, ou sa parallele E*e* en ligne droite avec EA, ayant *e* de l'autre côté de E par rapport à A; & que dans les Fig. 270. 271. l'on imagine au contraire A*a* en ligne droite avec AE, ou sa parallele E*e* couchée sur EA, ayant *e* vers A: ce changement de situation de la direction A*a*, ou E*e*, du movement supposé (*art.* 3.) de A vers *a*, ou de E vers *e*, à tout le système, changeant seulement les Energies du poids P, de la puissance R, & de la résistance B du centre fixe A de la Machine, d'affirmatives en negatives, & de negatives en affirmatives, en les

Digitized by Google

augmentant encore toutes comme dans le nomb. 1. les égalitez qu'on vient de trouver dans le précedent art. 3. pour toutes ces Fig. 269. 270. 271. 272. reſteront encore ici les mêmes que là, & que dans le précedent nomb. 1. mais preſentement avec des ſignifications d'affirmatif & de negatif de ces Energies, contraires à celles qu'elles ont dans cet art. 3. & dans ce précedent nomb. 1.

V. Si preſentement on ſuppoſe que la droite A*a* ou ſa parallele E*e* ſoit perpendiculaire ſur EA dans les preſentes Fig. 269 270. 271. 272. comme dans l'art. 2. Fig. 265. 266. 267. 268. Ce cas rendant E*b*=*o*, & conſequemment auſſi B×E*b*=*o*, réduiroit par cela ſeul à *o*=P×E*p* —+R×E*r* l'équation que le précedent art. 3. a donné pour les Fig. 269. 270. & à R×E*r*=P×E*p* celle que ce même art. 3. a auſſi donnée pour les Fig. 271. 272. Donc conformément à l'art. 2. de qui c'eſt ici le cas,

1°. Ce cas de E*e* perpendiculaire ſur EA, rendant de plus E*r* negative, en la renverſant de l'autre côté de E ſur RE prolongée vers H dans la Fig. 269. comme elle l'eſt dans la Fig. 266. & rendant auſſi E*p* negative, en la renverſant de même de l'autre côté de E ſur EP dans la Fig. 270. comme elle l'eſt dans la Fig. 265. changera l'équation *o*=P×E*p*—+R×E*r* qu'il vient de donner pour ces Fig. 269. 270. en P×E*p*=R×E*r*, qui dans la Fig. 267. ainſi conformée à la Fig. 266. fera voir qu'alors l'Energie affirmative de la puiſſance R ſera égale à l'Energie negative du poids P, comme dans l'art. 2. Fig. 266. dont c'eſt ici le cas; & qui dans la Fig. 270. pareillement conformée à la Fig. 265. fera voir au contraire qu'alors l'Energie negative de la puiſſance R, ſera égale à l'Energie affirmative du poids P, comme dans le même art. 2. Fig. 266. dont c'eſt pareillement ici le cas. FIG. 269. 270.

2°. Le cas ſuppoſé de E*e* perpendiculaire ſur EA, rendant à la fois E*p*, E*r*, negatives dans la Fig. 272. en y renverſant E*p* de l'autre côté de E ſur EP, & E*r* de l'autre côté de E ſur RE prolongées, comme elles le ſont dans la Fig. 268. ſans rien changer à la Fig. 271. que n'y ren- FIG. 271. 272.

dre Ee perpendiculaire ſur AE, comme dans les trois autres precedentes Fig. 269. 270. 271. de ce preſent art. 5. laiſſera l'équation R×Er=P×Ep, telle qu'on l'y vient de trouver pour les Fig. 271. 272. ſans en changer que la ſignification d'affirmatif ou de negatif d'Energies pour la Fig. 272. ainſi conformée à la Fig. 269. dans laquelle Fig. 272. ainſi conformée, cette équation ſignifiera que l'Energie negative de la puiſſance R ſera pour lors égale à l'Energie affirmative du poids P, comme dans l'art. 2. Fig. 268. dont c'eſt ici le cas; ſignifiant au contraire dans la Fig. 271. que l'Energie affirmative de la puiſſance R, ſera pour lors égale à l'Energie negative du poids P, comme dans cet art. 2. Fig. 266. dont c'eſt pareillement ici le cas, qui anéantit ſeulement l'Energie de la réſiſtance B du centre fixe A de la Machine dans cette Fig. 271. comme dans les trois autres Fig. 269. 270. 272. du preſent art. 5. ſans rien changer à l'affirmatif ni au negatif des Energies de la puiſſance R, & du poids P dans cette Fig. 271.

Un raiſonnement pareil à celui du précedent art. 5. feravoir que Ee perpendiculaire ſur la direction EP du poids P, ou ſur celle ER de la puiſſance R, y anéantiroit l'Energie de ce poids ou de cette puiſſance, & qu'elle y feroit ou ne feroit pas des changemens d'affirmatif ou de negatif, ou tous les deux enſemble dans les deux autres Energies reſtantes, comme l'on voit dans cet art. 5. qu'il doit arriver aux Energies reſtantes de ce poids P & de cette puiſſance R, lorſque Ee perpendiculaire ſur la direction EA de la réſiſtance B du centre fixe A de la Machine, y anéantit l'Energie de cette réſiſtance B. Tout cela eſt preſentement trop manifeſte pour s'y arréter davantage.

Fig. 269. 270. 271. 272.

VI. Il eſt à remarquer que ſi les directions ER, EP, de la puiſſance R, & du poids P, ſuppoſez en équilibre entr'eux ſur le Tour en queſtion, devenoient paralleles entr'elles, & conſequemment auſſi (*Lem. 6. Corol. 1. 2.*) à la direction AE de la réſiſtance B du centre fixe A de cette Machine; & que la direction A*a* ou E*e* du mouvement

Digitized by Google

ſuppoſe (*art.* 3. 4. 5.) dans tout le ſyſtême, fût perpendiculaire à quelqu'une de celles-là ; les Energies de cette puiſſance R, de ce poids P, & de cette réſiſtance B, y ceſſeroient toutes à la fois dans l'art. 4. comme dans les art. 3. & 5. dans leſquels E*e* perpendiculaire (*Hyp.*) à AE, le ſeroit auſſi à ER, EP, ici paralleles à AE. Car cette direction E*e* du mouvement de tout le ſyſtême, ſe trouvant ainſi perpendiculaire aux trois directions ER, EP, AE, de la puiſſance R, du poids P, & de la réſiſtance B de l'axe ou du centre A de la Machine, les lignes *er*, *ep*, *eb*, auſſi perpendiculaires (*Hyp.*) à ces trois directions ER, EP, AE, ſe confondroient toutes trois avec *e*E ; ce qui anéantiſſant à la fois toutes les vîteſſes virtuelles (*Déf.* 32.) E*r*, E*p*, E*b*, de la puiſſance R, du poids P, & de la réſiſtance B de l'axe ou du centre A de la Machine, anéantiroit auſſi à la fois toutes leurs Energies (*Déf.* 32.) R×E*r*, P×E*p*, B×E*b*, ainſi qu'il le falloit faire voir.

C'eſt par cette raiſon que dans les art. 3. 5. dans leſquels E*e* eſt ſuppoſée perpendiculaire à la direction AE de la réſiſtance B de l'axe ou du centre A de la Machine, cette réſiſtance B n'y a aucune Energie ; & que ſi les directions ER, EP, de la puiſſance R, & du poids P, y devenoient paralleles entr'elles, & conſequemment auſſi (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) à celle AE de la réſiſtance B, les Energies de cette puiſſance R, & de ce poids P, ceſſeroient de même de s'y trouver. FIG. 265. 266. 267. 268.

Rien de tout cela ne doit paroître étrange ; puiſqu'en ce cas de parallelîſme entr'elles des trois directions ER, EP, AE, auſquelles E*e* ou ſa parallele A*a* ſeroit (*Hyp.*) perpendiculaire, quelque mouvement qu'on donnât à tout le ſyſtême, ſuivant cette ligne E*e* ou A*a*, à laquelle tous les points de ce ſyſtême décriviſſent des paralleles comme dans les art. 3. 4. 5. deſquels il s'agit ici, la puiſſance R, ni le poids P, ni la réſiſtance B priſe pour une puiſſance contraire en A ſuivant AE, n'auroient aucun mouvement ſuivant leurs directions ; ni conſequemment FIG. 265. & ſuivantes juſqu'à 272.

(*Déf.* 32.) aucune vîteſſe virtuelle, ni conſequemment encore (*Def.* 32.) aucune Energie.

PARTIE IV.

Pour l'équibre ſur des Leviers quelconques entre des puiſſances de directions auſſi quelconques.

FIG. 273. 274. 275. I. Soient les puiſſances E, F, de forces & de directions quelconques, appliquées à volonté à un Levier de figure auſſi quelconque, & en équilibre entr'elles ſur tel appui B qu'on voudra de ce Levier; duquel point B ſoient menées BD, BP, perpendiculaires en D, P, ſur les directions prolongées ED, EP, de ces deux puiſſances E, F. Par ce point fixe B ſoit une ligne droite XO, poſée à volonté, laquelle rencontre ces directions en X, O, & qui peut ainſi paſſer pour Levier droit, ſur lequel appuyé en B, ces deux puiſſances E, F, qui lui ſeroient appliquées en X, O, ſuivant leurs directions ſuppoſées, ſeroient (*Th.* 21. *part.* 2. 5.) en équilibre entr'elles, comme on les ſuppoſe y être ſur le Levier propoſé quelconque ſuppléé par celui-ci pour épargner les Figures, que la varieté de celles de ce Levier propoſé, multiplieroit inutilement.

Cela poſé, & le Levier droit XO qui ſupplée celui-là, étant imaginé comme d'une piece avec lui, & d'angles invariables avec les directions propoſées des puiſſances E, F, afin que le tout enſemble puiſſe être conçû mû comme d'une piece autour de l'appui fixe B, par quelque force étrangere que je ſuppoſe rompre preſentement l'équilibre ſuppoſé entre les puiſſances E, F, & donner à tout le ſyſtême un mouvement infiniment petit ou inſtantané autour de cet appui fixe B, lequel mouvement faſſe paſſer XO en *xo*, en faiſant décrire des infiniment petits X*x*, O*o*, aux points X, O, de ce Levier, & en faiſant auſſi paſſer les directions XE, OF, en *xe*, *of*, infiniment voiſines d'elles, avec leſquelles elles faiſent quelque part des

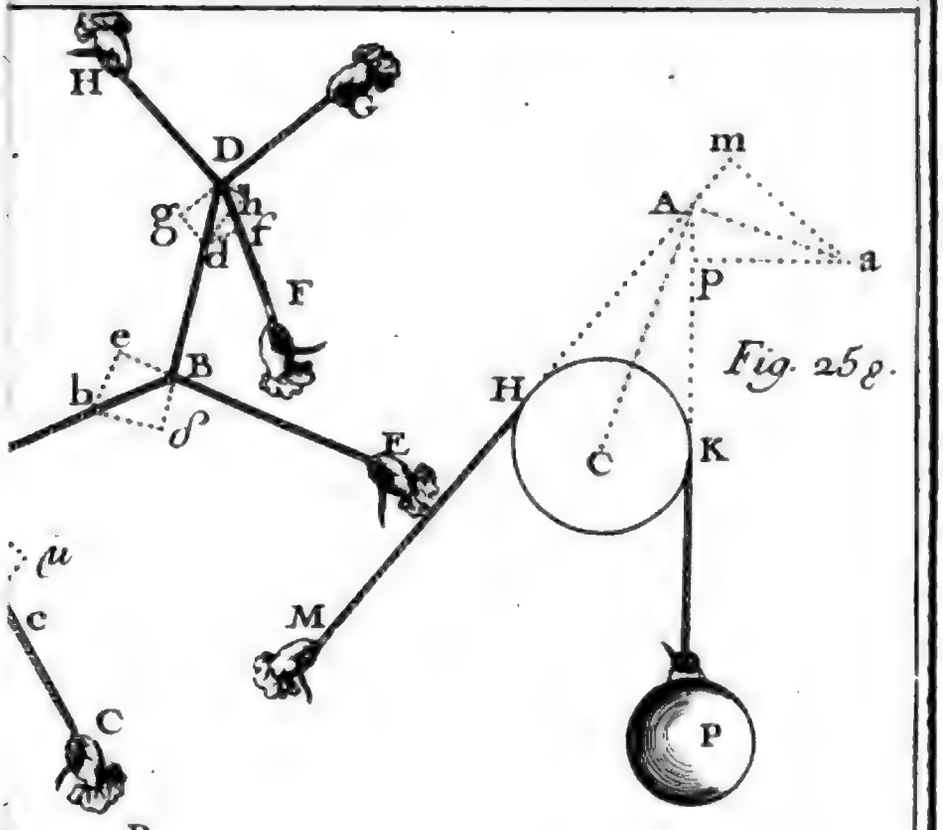
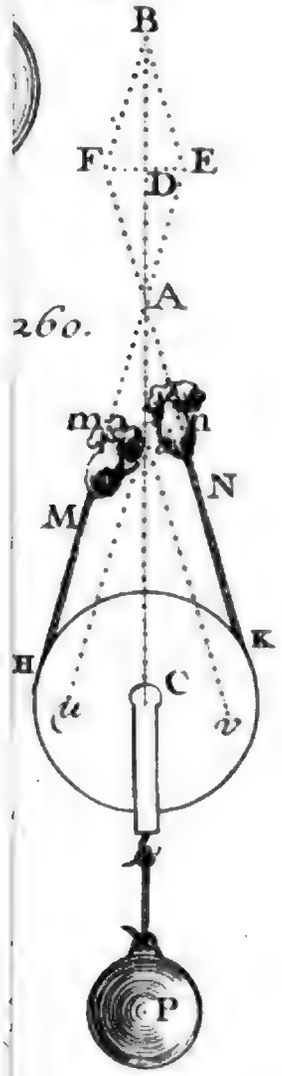


Fig. 258.



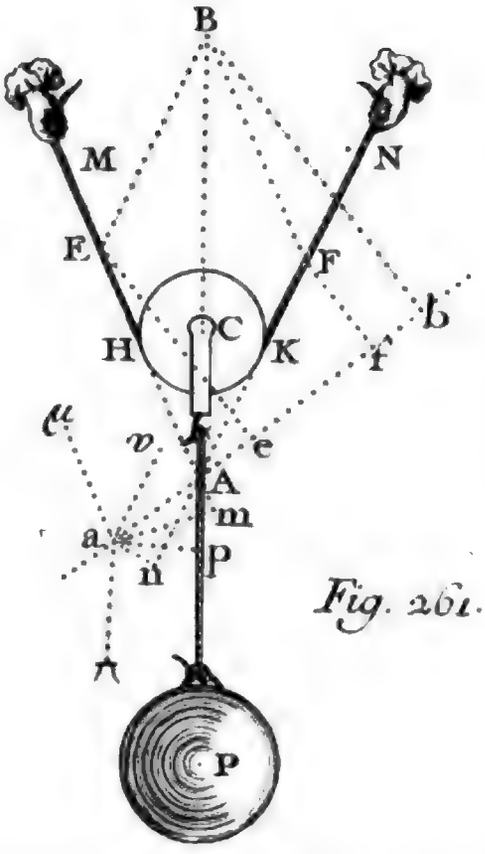


Fig. 261.

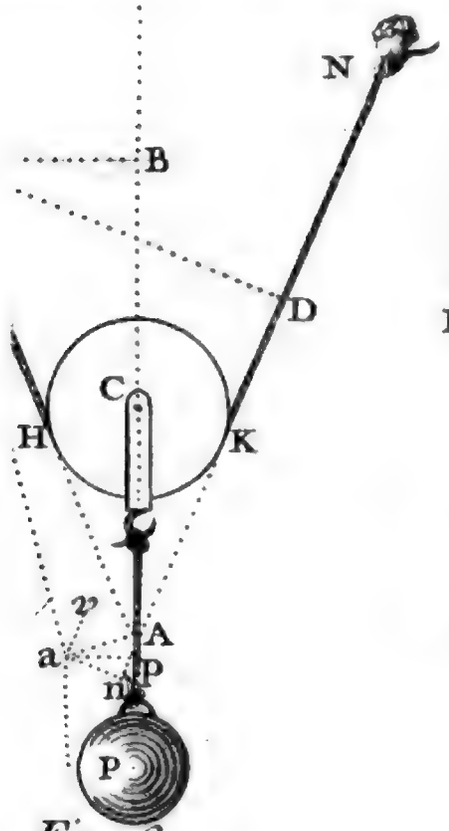


Fig. 263.

Fig. 264.

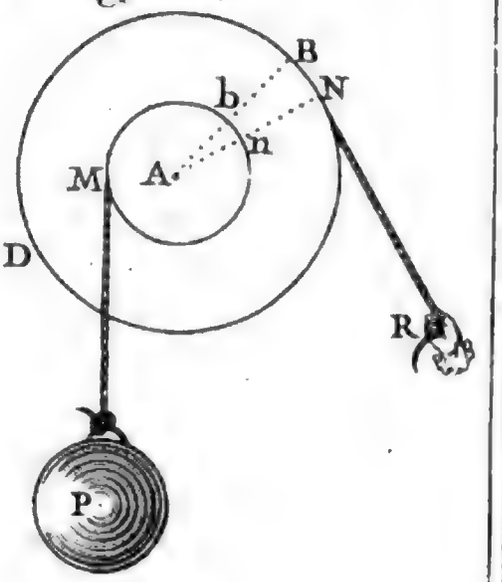
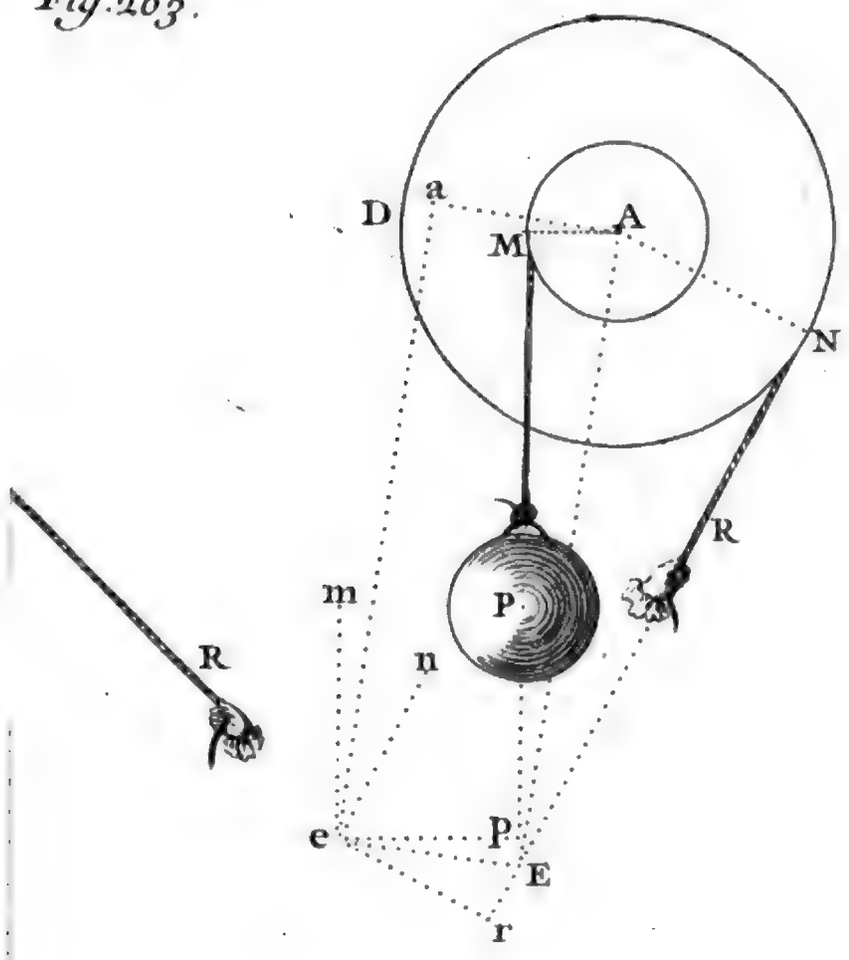


Fig. 266.



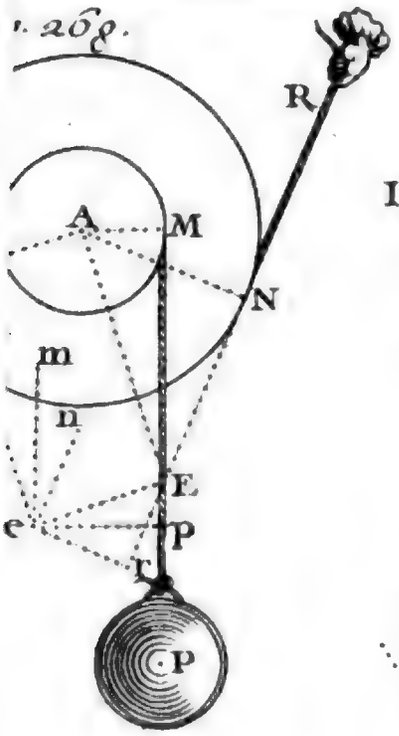
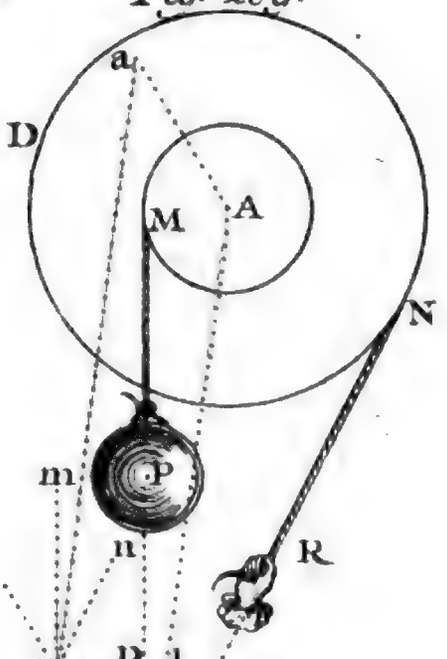


Fig. 269.



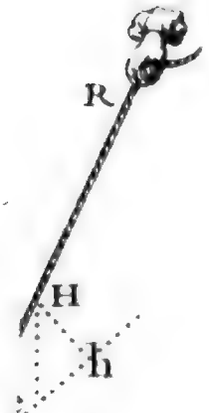
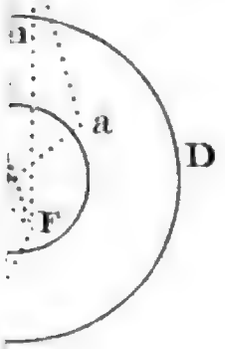


Fig. 271.



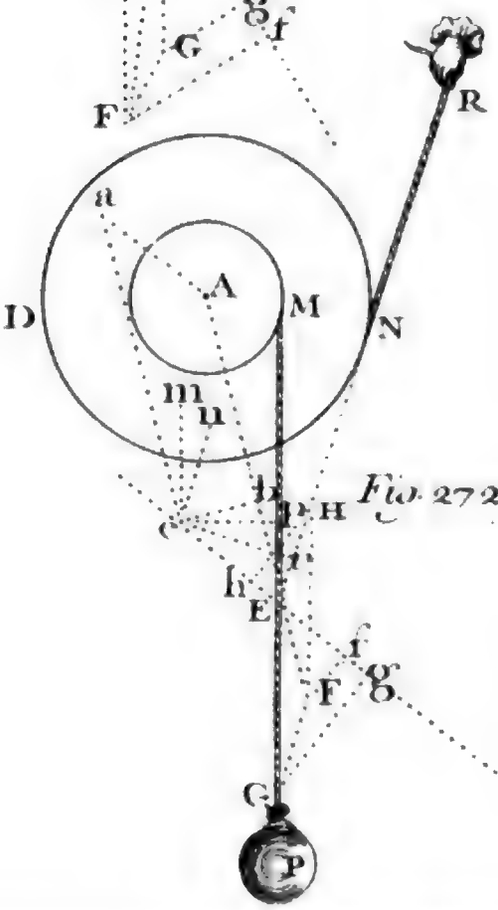


Fig. 272.

angles infiniment petits M, N, chacune avec ſa correſpondante, qui peut ainſi paſſer pour elle.

Un tel mouvement de tout le ſyſtème autour du point fixe B, étant ſuppoſé, ſi des points x, ω, on imagine $x\epsilon$, $\omega\phi$, perpendiculaires en ϵ, ϕ, ſur les directions propoſées XE, OF, des puiſſances E, F; on verra qu'il doit faire avancer la puiſſance E de la valeur de $X\epsilon$ ſuivant ſa direction, & faire reculer l'autre puiſſance F de la valeur de $O\phi$ ſuivant la ſienne, pendant l'inſtant que le Levier XO paſſeroit de XO en $x\omega$; & qu'ainſi (*Def.* 32.) les vîteſſes virtuelles de ces deux puiſſances E, F, ſeroient ici exprimées par $X\epsilon$, $O\phi$; & leurs Energies par $E\times X\epsilon$, $F\times O\phi$, dont la premiere ſeroit affirmative, & la ſeconde negative.

Or les angles (*conſtr.*) droits BXx, BDX, donnent $x X\epsilon = XBD$; & les angles (*conſtr.*) droits $BO\omega$, BPO, donnent de même $\omega O\phi = OBP$. Donc les angles en ϵ, ϕ, étant auſſi (*conſtr.*) droits comme en D, P, les triangles rectangles $X\epsilon x$, BDX; $O\phi\omega$, BPO, ſont ici ſemblables entr'eux deux à deux, comme on les voit ici diſtinguez.

Par conſequent on aura ici Xx. $X\epsilon$:: BX. $BD = \frac{BX\times X\epsilon}{Xx}$.

Et $O\omega$. $O\phi$:: BO. $BP = \frac{BO\times O\phi}{O\omega}$. Donc BD. BP:: $\frac{BX\times X\epsilon}{Xx}$. $\frac{BO\times O\phi}{O\omega}$ (à cauſe de $\frac{BX}{Xx} = \frac{BO}{O\omega}$) :: $X\epsilon$. $O\phi$. Or l'équilibre ici ſuppoſé donne (*Th.* 21. *Corol.* 2.) BD. BP:: F. E. Donc on y aura auſſi F. E:: $X\epsilon$. $O\phi$. Et par conſequent $E\times X\epsilon = F\times O\phi$. Donc enfin venant de trouver $E\times X\epsilon$ pour l'Energie affirmative de la puiſſance E, & $F\times O\phi$ pour l'Energie negative de la puiſſance F, la premiere de ces deux Energies ſera ici égale à la ſeconde. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

II. Si l'on veut preſentement que les directions XE, OF, des puiſſances E, F, ſoient non ſeulement paralleles entr'elles, mais auſſi perpendiculaires au Levier XO: alors

les parties infiniment petites Xε, Oφ, de ces directions, ſe confondant avec les arcs infiniment petits Xx, Oω, perpendiculaires comme elles à ce Levier droit XO; l'on aura ici E×Xx=E×Xε, F×Oω=F×Oφ. Donc venant de trouver (*art.* 1.) que ces Energies generales E×Xε, F×Oφ, des puiſſances E, F, ſuppoſées en équilibre entr'elles ſuivant des directions quelconques, ſont égales entr'elles; & que la premiere de ces deux Energies eſt affirmative, & la ſeconde negative: l'on aura pareillement ici E×Xx, F×Oω, égales entr'elles, pour les Energies particulieres des puiſſances E, F, dans le cas preſent de leur équilibre entr'elles ſuivant des directions perpendiculaires au Levier droit XO; & la premiere de ces deux Energies particulieres encore affirmative, & la ſeconde negative.

Les moindres Géometres ſçavent que ce cas particulier du précedent art. 2. *pourroit encore ſe démontrer indépendamment du general de l'art.* 1. *mais il ſuit ſi naturellement de ce general, que je n'ai pas crû le devoir démontrer autrement.*

III. Il eſt à remarquer que de quelque maniere que les directions XE, OF, des puiſſances E, F, ſoient paralleles entr'elles, c'eſt-à-dire, vers quelque côté que ce ſoit; leurs perpendiculaires (*Hyp.*) BD, BP, ſe trouvant alors en ligne droite, & rendant ainſi les triangles rectangles BDX, BPO, toûjours ſemblables entr'eux: l'on aura auſſi toûjours alors BD. BP:: BX. BO:: Xx. Oω. Donc venant de trouver en general (*art.* 1.) Xε. Oφ:: BD. BP. Le cas preſent des directions XE, OF, paralleles quelconques donnera toûjours auſſi Xε. Oφ:: BD. BP:: BX. BO:: Xx. Oω. Ainſi,

1°. Les vîteſſes virtuelles des puiſſances E, F, qui dans l'art. 1. ſont exprimées en general par Xε, Oφ, pour toutes les directions poſſibles de ces deux puiſſances, pourroient auſſi dans le preſent paralleliſme quelconque de ces directions, être exprimées par les arcs Xx, Oω, comme dans l'art. 2. ou par les bras de ce Levier, BX, BO; ou enfin par ſes perpendiculaires BD, BP, aux directions de

de ces puiſſances ; & les Energies de ces mêmes puiſſances E, F, qui dans le même art. 1. ſont exprimées en general par E×Xϵ, F×Oϕ, pourroient auſſi l'être ici par E×Xx, F×Oω, comme dans l'art. 2. ou par E×BX, F×BO ; ou enfin par E×BD, F×BP, qui ſont (*Déf.* 22.) les *Momens* de ces deux puiſſances E, F, ſuppoſées en équilibre entr'elles ſur l'appui B du Levier auquel on les ſuppoſe appliquées.

2°. De même les vîteſſes virtuelles de ces puiſſances E, F, qui dans le cas de l'art. 5. y ſont exprimées par les arcs infiniment petits Xx, Oω, qui ſe confondent là avec les lignes infiniment petites Xϵ, Oϕ, pourroient l'être par les finies BX, BO, ou BD, BP ; & les Energies de ces mêmes puiſſances E, F, qui dans cet art. 5. ſont exprimées par E×Xx, F×Oω, pourroient auſſi l'être par E×BX, F×BO, ou par E×BD, F×BP.

Il ſuit de ces nomb. 1. 2. que ces expreſſions (*nomb.* 2.) tant des vîteſſes virtuelles, que des Energies des puiſſances E, F, ſuppoſées en équilibre entr'elles ſur l'appui B d'un Levier quelconque ſuivant des directions paralleles entr'elles, conviendroient également dans ce cas general de directions XE, OF, paralleles quelconques, & dans le particulier de l'art. 2. où ces paralleles ſont ſuppoſées perpendiculaires au Levier droit XO. Mais la Déf. 32. exigeant que les vîteſſes virtuelles des puiſſances E, F, ſoient exprimées par les chemins contemporains que ces puiſſances parcourroient ſuivant leurs directions dans le mouvement ſuppoſé du ſyſtême, & que les Energies de ces mêmes puiſſances ſoient exprimées par les produits faits de ces puiſſances multipliées par ces chemins contemporains, chacune par le ſien : les lignes & les produits pris dans les art. 1. 2. pour les vîteſſes virtuelles & pour les Energies des puiſſances E, F, en ſont les expreſſions naturelles telles que cette Déf. 32. les exige.

IV. Si avec les Energies des puiſſances E, F, ſuppoſées en équilibre entr'elles ſur l'appui B d'un Levier quelconque ſupplée (comme dans l'art. 1.) par le droit XO FIG. 276. 277 278. 279.

ou XB de même appui B que lui ; auquel Levier droit ces deux puiſſances E, F, ſoient appliquées ſuivant leurs directions ſuppoſées quelconques concourantes en quelque point A que ce ſoit ; on veut auſſi comprendre l'Energie de la réſiſtance (que j'appelle B) de cet appui : ſoient deux droites Bβ, Aα, paralleles & égales quelconques menées des points B, A, vers le même côté auſſi quelconque, obliquement aux directions AE, AF, & à la droite AB, laquelle étant (*Th.* 21. *part.* 1. 2.) la direction de A vers B dans les Fig. 276. 279. & de B vers A dans les Fig. 277. 278. de la charge de l'appui B, réſultante du concours d'action des puiſſances E, F, ſur lui, eſt auſſi en ſens directement contraire (*Ax.* 4.) la direction de B vers A dans les Fig. 276. 279. & de A vers B dans les Fig. 277. 278. de la réſiſtance B, avec laquelle cet appui fixe ſoûtient cette charge. Du point *a* ſoient *ae*, *af*, *ab*, perpendiculaires en *e*, *f*, *b*, ſur ces trois lignes prolongées AE, AF, AB. Enſuite après avoir fait le parallelogramme ARGS d'une diagonale quelconque AG priſe depuis A ſur AB ou BA prolongées, & de côtez AR, AS, pris ſur AE, AF, pareillement prolongées ; des angles G, R, S, de ce parallelogramme ſoient les droites G*g*, R*r*, S*s*, perpendiculaires en *g*, *r*, *s*, ſur A*a* prolongée de part & d'autre.

Cela fait ou imaginé, les triangles A*ea*, A*r*R ; A*fa*, A*s*S ; A*ba*, A*g*G, rectangles (*conſtr.*) en *e*, *r*, *f*, *s*, *b*, *g*, ayant leurs angles égaux en A deux à deux diſtinguez, comme on les voit ici, ſont ſemblables entreux ainſi pris deux à deux. Donc

$$Aa.\ Ae :: AR.\ Ar = \frac{AR \times Ae}{Aa}.$$

$$Aa.\ Af :: AS.\ As = \frac{AS \times Af}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ab :: AG.\ Ag = \frac{AG \times Ab}{Aa}.$$

Or (*Lem.* 10.) $Ag = As \mp Ar$, dans laquelle égalité le ſuperieur du double ſigne $\mp$ eſt pour le cas des Fig. 276. 277. & l'inferieur pour le cas des Fig. 278. 279. Donc auſſi $AG \times Ab = AS \times Af \mp AR \times Ae$, de qui le double ſigne $\mp$ eſt de même ſignification que le précedent. Or la réſiſtance B de l'appui de ce nom, étant (*Ax.* 4. *Th.* 21. *part.* 1. 2.) égale & directement oppoſée de G vers A ſuivant GA, à la charge de cet appui B, laquelle eſt au contraire (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1. *& Th.* 21. *part.* 1. 2.) dirigée de A vers G ſuivant AG; l'équilibre ſuppoſé entre les puiſſances E, F, donne par tout ici (*Th.* 2. *part.* 3. 4.) $B.E :: AG.AR = \frac{AG \times E}{B}$. Et $B.F :: AG.AS = \frac{AG \times F}{B}$

Donc en ſubſtituant ces valeurs de AR, AS, dans la derniere égalité precedente $AG \times Ab = AS \times Af \mp AR \times Ae$, on aura pareillement ici $AG \times Ab = \frac{AG \times F \times Af}{B} \mp \frac{AG \times E \times Ae}{B}$

d'où reſulte $B \times Ab = F \times Af \mp E \times Ae$: c'eſt-à-dire, $B \times Ab = F \times Af - E \times Ae$, ou $B \times Ab + E \times Ae = F \times Af$ pour le cas des Fig. 276. 277. & $B \times Ab = E \times Ae + F \times Af$ pour le cas des Fig. 278. 279.

Imaginons preſentement que l'équilibre ici ſuppoſé entre les puiſſances E, F, ſur l'appui B, ſoit rompu par un mouvement de tout le ſyſtême, qui le faſſe aller de AB vers $A\beta$, en faiſant décrire en ce ſens à tous les points des lignes paralleles & égales à $A\alpha$ ou à $B\beta$, de maniere que lorſque la droite AB ſera ſur ſa parallele $a\beta$, les directions AE, AF, ainſi mûes parallelement chacune à ſoi-même, ſoient auſſi ſur leurs paralleles $a\iota$, $a\phi$, chacune ſur la ſienne avec la puiſſance dont elle eſt la direction. Il eſt manifeſte (*Déf.* 32.) qu'un tel mouvement de tout le ſyſtême donnera Ae, Af, Ab, pour les vîteſſes virtuelles des puiſſances E, F, & de la réſiſtance B de l'appui de ce nom; & $E \times Ae$, $F \times Af$, $B \times Ab$, pour leurs Energies: deſquelles Energies (*Déf.* 32.) la premiere & la troiſié-

me ſont ici affirmatives, & la ſeconde negative dans la Fig. 276. la premiere & la troiſiéme ſont au contraire negatives, & la ſeconde affirmative dans la Fig. 277. les deux premieres ſont affirmatives, & la troiſiéme negative dans la Fig. 278. Enfin les deux premieres ſont au contraire negatives, & la troiſiéme affirmative dans la Fig. 279. Donc venant de trouver $B\times Ab+E\times Ae=F\times Af$ pour les Fig. 276. 277. & $B\times Ab=E\times Ae+F\times Af$ pour les Fig. 278. 279. l'on aura ici dans les Fig. 276. 278. la ſomme de deux Energies affirmatives, égale à une Energie negative affirmativement priſe; & au contraire dans les Fig. 277. 279. la ſomme de deux Energies negatives (affirmativement priſe) égale à une Energie affirmative. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

V. Si l'on ſuppoſe preſentement que Aa ſoit perpendiculaire ſur AB, comme l'eſt (*Hyp.*) ab, & faiſe conſequemment des angles aigus avec AX, AO, dans les Fig. 278. 279. Cette hypotheſe, qui fait paſſer Af de l'autre côté de A vers O dans ces deux Fig. 278. 279. & qui y fait tomber b en A, de même que dans les deux autres Fig. 276. 277. ſans faire que ce ſeul changement dans ces deux-ci, rendant ainſi $Ab=o$ dans toutes les quatre Fig. 276. 277. 278. 279. & Af negative dans les deux dernieres, changera également pour toutes les deux égalitez qu'on leur vient de trouver ſur la fin du precedent art. 4. en $E\times Ae=F\times Af$ ſans Energie de la réſiſtance B de l'appui du Levier, que $Ab=o$ vient de rendre nulle. Ce qui fait voir que l'Energie affirmative de la puiſſance E ſera ici égale à l'Energie negative de la puiſſance F dans les Fig. 277. 279. & qu'au contraire l'Energie affirmative de F ſera égale à l'Energie negative de la puiſſance E dans les Fig. 278. 276.

On fera ſur ceci des reflexions pareilles à celles qu'on a faites dans les art. 4. 5. 6. *de la part.* 3. *touchant les Energies, tant de la puiſſance & du poids en équilibre entr'eux ſur le* Tour, *que de la réſiſtance du centre ou de l'axe de la Machine à l'effort réſultant ſur lui du concours de ces deux forces; deſquelles Ener-*

Fig. 274.

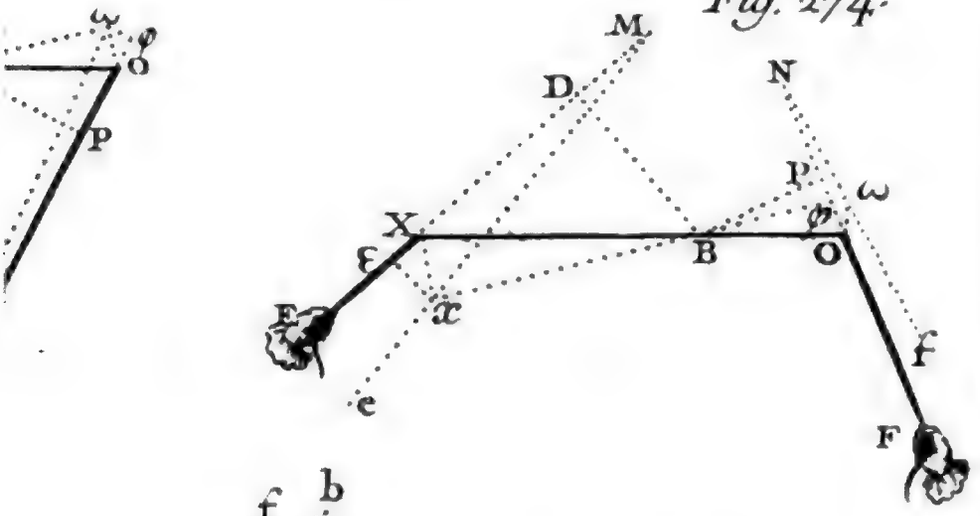
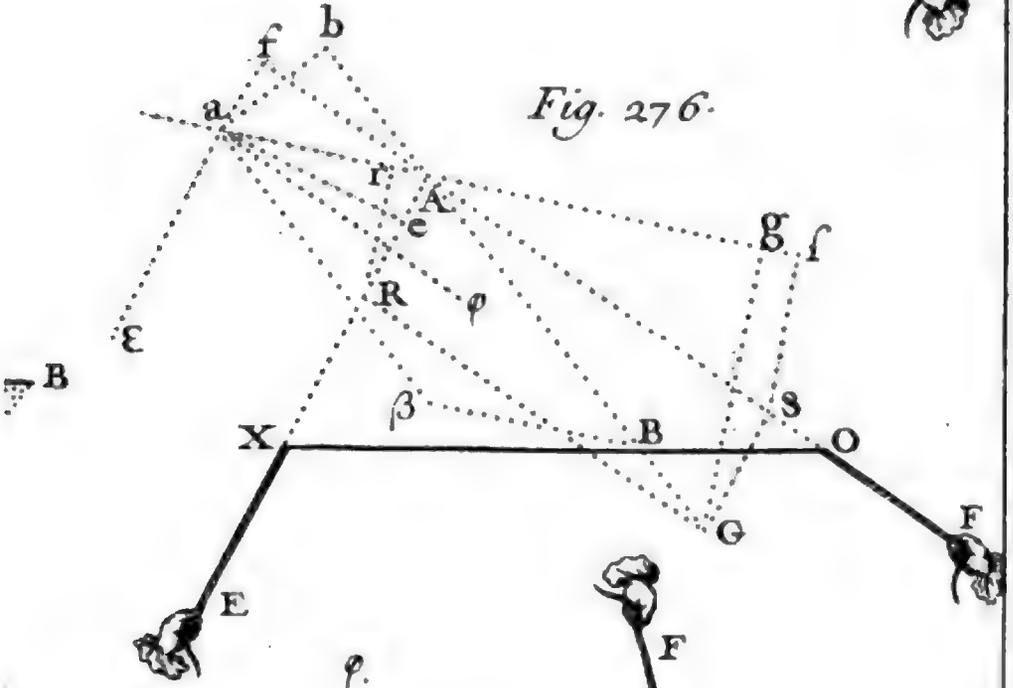


Fig. 276.



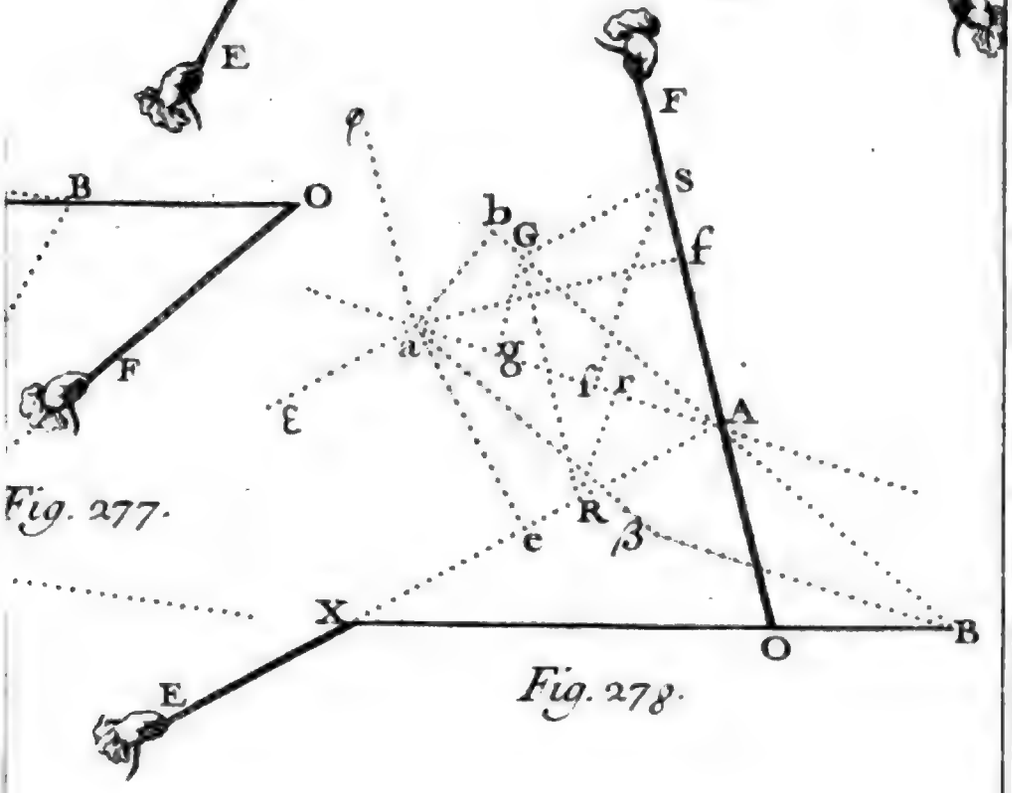


Fig. 277.

Fig. 278.

Digitized by Google

Digitized by Google

gies les égalitées démontrés là, ſe pourroient encore déduire de celles qu'on vient de démontrer dans l'équilibre des Leviers, auſquels l'équilibre ſur le Tour *ſe peut aiſément rapporter.*

PARTIE V.

Pour l'équilibre d'un poids ſoûtenu ſur un plan incliné par une puiſſance de direction quelconque.

I. Soit un poids OEZ de figure, de peſanteur P, & de direction AP quelcon ues, ſoûtenu ſur un plan incliné HG par une puiſſance R de direction auſſi quelconque AR; ce poids n'eſt ici de figure ſpherique que pour moins d'embarras de lignes, ce qu'on va dire de lui convenant également à des poids de figures quelconques. On a vû (*Th.* 26. *part.* 1.) que ſi du point A de concours des directions AP, AR, de ce poids OEZ & de la puiſſance R, qui (*Hyp.*) le ſoûtient, l'on mene AD perpendiculaire au plan HG, elle paſſera par quelque point O de la baſe de ce poids, lequel ſera le point où le ſpherique touche ce plan; & que ſi autour de la diagonale AD priſe à volonté de A vers D ſur cette perpendiculaire, on fait un parallelogramme ABDC de côtez AB, AC, qui ſoient ſur les directions AR, AP, de la puiſſance R, & de la peſanteur P du poids OEZ, cette peſanteur P de ce poids ſera à la puiſſance R, comme AC à AB. FIG. 180.

Soit de plus la droite A*a* de longueur quelconque parallele à celle EG du plan incliné, ſur laquelle A*a* prolongée de part & d'autre, tombent des angles B, C, du parallelogramme ABDC, deux perpendiculaires B*b*, C*c*, en *b*, *c*. Soient de plus du point *a* les droites *ap*, *ar*, perpendiculaires auſſi en *p*, *r*, ſur les directions prolongées AP, AR, du poids OEZ & de la puiſſance R.

Cela fait, les triangles A*pa*, A*c*C; A*ra*, A*b*B, rectangles (*Hyp.*) en *p*, *c*, *r*, *b*, ayant deux à deux, comme on les voit ici diſtinguez, leurs angles égaux en A, ſeront ſemblables entr'eux ainſi pris deux à deux, & donneront

ainſi $Aa.\ Ap :: AC.\ Ac = \frac{AC \times Ap}{Aa}$. Et $Aa.\ Ar :: AB.\ Ab = \frac{AB \times Ar}{Aa}$. Donc le Lem. 10. donnant $Ac = Ab$, l'on aura ici $AC \times Ap = AB \times Ar$. Or l'équilibre qu'on y ſuppoſe entre la puiſſance R & la peſanteur P du poids OEZ, donne (*Th. 26. part. 1.*) $R.\ P :: AB.\ AC = \frac{AB \times P}{R}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de AC dans la derniere égalité $AC \times Ap = AB \times Ar$, l'on aura ici $\frac{AB \times P \times Ap}{R} = AB \times Ar$; d'où réſulte $P \times Ap = R \times Ar$.

Soit preſentement le ſyſtême mû de A vers *a*, de maniere que tous ſes points décrivent des droites égales & paralleles à *Aa*; & conſequemment que lorſque le point A de concours des directions de la puiſſance R & de la peſanteur P du poids OEZ, ſera en *a*, ces directions AR, AP, ſoient ſur leurs paralleles *a*ρ, *a*π, & la droite AD auſſi ſur ſa parallele *ad*, ayant ſon point O en *o* ſur le plan HG. En ce cas la Déf. 32. donnera *Ap*, *Ar*, pour les vîteſſes virtuelles du poids P & de la puiſſance R, & $P \times Ap$, $R \times Ar$, pour leurs Energies, deſquelles Energies la premiere ſera ici affirmative, & la ſeconde negative. Donc venant de trouver $P \times Ap = R \times Ar$, l'on aura ici l'Energie affirmative de la peſanteur P du poids OEZ, égale à l'Energie negative (affirmativement priſe) de la puiſſance R, ſans que la réſiſtance du plan HG y en ait aucune. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

II. 1°. Si la direction AR de la puiſſance R étoit parallele, comme (*Hyp.*) *bc*, à la longueur GH du plan incliné; & la direction AP de la peſanteur P du poids OEZ, parallele auſſi à la hauteur HK de ce plan: cette hypotheſe faiſant tomber en *a* le point *r* de cette direction AR prolongée, & rendant ainſi non ſeulement les triangles (*Hyp.*) rectangles *Apa*, HKG, ſemblables entr'eux, mais

encore $Ar = Aa$; la vîteſſe virtuelle de la puiſſance R ſeroit alors (*Déf.* 32.) à la vîteſſe virtuelle du poids OEZ :: Aa. Ap :: HG. HK. Donc l'équilibre ſuppoſé donnant auſſi pour lors (*Th.* 26. *Corol.* 20. *art.* 1. *nomb.* 1.) P. R :: HG. HK. Cette hypotheſe rendroit P. R :: Aa. Ap. Et conſequemment $P \times Ap = R \times Aa$. D'ou l'on voit que les Energies (*Déf.* 32.) $P \times Ap$, $R \times Aa$, du poids OEZ & de la puiſſance R, ſeroient encore ici égales entr'elles : la premiere affirmative, & la ſeconde negative, comme le ſont celles que ce poids & cette puiſſance ont dans le précedent art. 1.

2°. La direction AP de la peſanteur P du poids OEZ demeurant parallele à la hauteur HK du plan incliné HG, ſi la direction AR de la puiſſance R étoit parallele à la baſe GK de ce plan : le triangle arA ſe trouvant alors ſemblable au triangle Apa, qui le ſeroit auſſi au triangle HKG ; la vîteſſe virtuelle (Ar) de la puiſſance R ſeroit alors à la vîteſſe virtuelle (Ap) du poids OEZ :: ap. Ap :: GK. HK. c'eſt-à-dire, qu'alors on auroit Ar. Ap :: GK. HK. Or l'équilibre ici ſuppoſé y donne (*Th.* 26. *Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 1.) R. P :: HK. GK. Donc (en multipliant ces deux analogies par ordre) l'on auroit ici $R \times Ar$, $P \times Ap$ :: $HK \times GK$. $GK \times HK$ :: 1. 1. c'eſt-à-dire, que ces deux Energies (*Déf.* 32.) $R \times Ar$, $P \times Ap$, de la puiſſance R & de la peſanteur P du poids OEZ, ſeroient encore ici égales entr'elles : la premiere negative, & la ſeconde affirmative, comme le ſont celles de cette puiſſance & de ce poids dans l'art. 1. & dans le précedent nomb. 1.

III. Si avec les Energies de la puiſſance R & du poids OEZ en équilibre entr'eux ſur le plan incliné HG, ſuivant des directions quelconques AR, AP, on veut comprendre auſſi l'Energie de la réſiſtance (que j'appelle D) de ce plan HG, égale & directement oppoſée (*Ax.* 4.) à l'effort réſultant de A vers D (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1. *& Th.* 21. *part.* 1. 2.) du concours d'action de cette puiſſance & de ce poids contre ce plan ſuivant AD perpendiculaire (comme dans l'art. 1. à ce même plan HG en

quelque poînt O où il ſoit touché par la baſe de ce poids OEZ de figure quelconque ; ſoit le parallelogramme ABDC fait comme dans l'art. 1. des angles B, C, D, duquel tombent les droites B*b*, C*c*, D*δ*, perpendiculaires en *b*, *c*, *δ*, à une droite *bc* menée à volonté par le point A de concours des directions AR, AP, DA, de la puiſſance R, de la peſanteur P du poids OEZ, & de la réſiſtance D du plan incliné HG, ſur lequel cette puiſſance & ce poids ſont ſuppoſez en équilibre entr'eux. Après cela d'un autre point *a* quelconque de la droite *b*A prolongée, ſoient menées A*r*, A*p*, A*d*, perpendiculaires en *r*, *p*, *d*, ſur les directions prolongées AR ; AP, DA, de la puiſſance R, de la peſanteur P du poids OEZ, & de la réſiſtance D du plan HG.

Cela fait, les triangles A*ra*, A*b*B ; A*pa*, A*c*C ; A*da*, A*δ*D, rectangles (*conſtr.*) en *r*, *b*, *p*, *c*, *d*, *δ*, ayant deux à deux, comme on les voit ici diſtinguez, leurs angles égaux en A ſeront ſemblables entr'eux, ainſi pris deux à deux ; & en conſequence donneront

$$Aa.\ Ar :: AB.\ Ab = \frac{AB \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ap :: AC.\ Ac = \frac{AC \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ad :: AD.\ A\delta = \frac{AD \times Ad}{Aa}.$$

Par conſequent le Lemme 10. donnant $A\delta = Ac + Ab$, dont le ſuperieur du double ſigne $\mp$ eſt pour la Fig. 281. & l'inferieur pour la Fig. 282. l'on aura ici $AD \times Ad = AC \times Ap \mp AB \times Ar$, dont le double ſigne $\mp$ ſera de même ſignification que le précedent. Or l'équilibre ici ſuppoſé donne (*Th.* 26. *Cor.* 7.) $D.P :: AD.AC = \frac{AD \times P}{D}$. Et $D.R :: AD.AB = \frac{AD \times R}{D}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de

AC,

Digitized by Google

AC, AB, dans l'égalité qui les précede, l'on aura ici AD $\times Ad = \frac{AD \times P \times Ap \mp AD \times R \times Ar}{D}$; d'où réſulte $D \times Ad = P \times Ap \mp R \times Ar$: ſçavoir, $D \times Ad = P \times Ap - R \times Ar$, ou $D \times Ad + R \times Ar = P \times Ap$ dans le cas de la Fig. 281. & $D \times Ad = P \times Ap + R \times Ar$ dans la Fig. 282.

Soit preſentement le ſyſtême mû de A vers *a*, comme dans l'art. 1. c'eſt-à-dire, de maniere que tous ſes points décrivent des droites égales & paralleles à A*a* de longueur & de poſition quelconques; & que lorſque le point A de concours des directions AR, AP, DA, de la puiſſance R, de la peſanteur P du poids OEZ, & de la réſiſtance D du plan HG, ſera en *a*, ces directions mûes ainſi parallelement à elles-mêmes, ſoient ſur leurs paralleles *ap*, *aϖ*, *af*; & ce plan HG (mû auſſi parallelement à lui-même) ſur ſa parallele *hg*, ayant ſon point O en celui de rencontre de cette parallele *hg* avec ſa perpendiculaire *af*; auquel point ϖ celui O de ce plan arrive après avoir parcouru la droite Oϖ parallele & égale à A*a*, dans le tems que le point A a employé cette autre droite A*a*, & que toutes les lignes AR, AP, DA, HG, ont auſſi mis à arriver ſur leurs paralleles *ap*, *aϖ*, *af*, *hg*.

Ce mouvement ſuppoſé de tout le ſyſtême, la Déf. 32. donnera A*r*, A*p*, A*d*, pour les vîteſſes virtuelles de la puiſſance R du poids OEZ de peſanteur P, & de la réſiſtance D du plan HG, & R×A*r*, P×A*p*, D×A*d*, pour leurs Energies, dont la ſeconde ſera affirmative, & les deux autres negatives dans la Fig. 281. & dont la troiſiéme ſera affirmative, & les deux premieres negatives dans la Figure 282. Par conſequent venant de trouver $D \times Ad + R \times Ar = P \times Ap$ pour le cas de la Figure 281. & $D \times Ad = P \times Ap + R \times Ar$ pour le cas de la Fig. 282. l'on aura ici pour l'un & pour l'autre cas une Energie affirmative égale à la ſomme de deux Energies negatives affirmativement priſes. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

I V. Si l'on ſuppoſe preſentement que *a*A ſoit perpen-

diculaire ſur AD, comme l'eſt (*Hyp.*) *ad* & faſſe conſequemment des angles aigus avec A*p*, A*r*, dans la Fig. 282. comme dans la Fig. 281. Cette hypotheſe, qui fait paſſer A*p* de l'autre côté de A vers P dans la Fig. 282. & qui y fait tomber *d* en A, de même que dans la Fig. 281. rendant ainſi A*d*=*o* dans toutes deux, & A*p* negative dans la Fig. 282. changera également en P×A*p*= R×A*r* pour ces deux Fig. 281. 282. les égalitez qu'on vient de trouver pour chacune d'elles ſur la fin du précedent art. 3. y faiſant ceſſer l'Energie D×A*d* de la réſiſtance D du plan GH par A*d*=*o*, qui réſulte de cette hypotheſe dans l'une & dans l'autre de ces deux Figures. D'ou l'on voit que dans toutes deux cette hypotheſe de A*a* perpendiculaire ſur AD, rendra l'Energie affirmative du poids OEZ égale à l'Energie negative (affirmativement priſe) de la puiſſance R: le tout comme dans l'art. 1. Fig. 280.

On pourra faire encore ici ſur l'art. 3. *d'autres reflexions pareilles à celles qu'on a faites dans l'art.* 4. *de la part.* 3. *& dans la reflexion italique qui enſuit l'art.* 5. *touchant les Energies, tant de la puiſſance & du poids en équilibre entr'eux ſur le* Tour, *que de la réſiſtance du centre ou de l'axe de cette Machine à l'effort réſultant ſur lui du concours d'action de ces deux forces.*

PARTIE VI.

Pour l'équilibre de la charge de la Vis ou de ſon Ecroue avec la puiſſance qui lui eſt appliquée.

Fig. 243. Section 7.

I. Toutes choſes demeurant ici les mêmes que dans le Th. 35. Fig. 243. ſoit l'équilibre ſuppoſé entre la puiſſance P & la charge de l'Ecroue PQ, la Vis VXYZ étant fixe, ou entre la puiſſance T, & la charge de cette Vis, ſi c'eſt l'Ecroue qui ſoit fixe: ſoit, dis-je, cet équilibre rompu par quelque augmentation ou diminution de force de cette puiſſance P ou T, ou bien par quelque dimi-

Digitized by Google

nution ou augmentation de la charge de l'Ecroue ou de la Vis. Il eſt manifeſte que pendant que cette augmentation ou diminution de force ou de charge fera faire un tour entier à la puiſſance T ou P, & lui fera ainſi décrire un cercle entier du rayon ST ou EP, autour de l'axe MS de cette Vis ; la charge de cette même Vis VXYZ, ou de ſon Ecroue PQ, avancera de la valeur d'un pas HK de cette Vis ſuivant cette direction parallele à ſon axe MS ; & qu'ainſi, ſuivant la Déf. 32. (en appellant O la circonference entiere de ce cercle quelconque ; & A la charge auſſi quelconque de la Vis ou de ſon Ecroue) cette circonference O, & ce pas HK de la Vis, exprimeront les vîteſſes virtuelles de la puiſſance T ou P, & de la charge A de cette Vis ou de ſon Ecroue ; & les produits T×O ou P×O, & A×HK, en exprimeront les Energies. Or dans l'équilibre ici ſupoſé le Th. 33. donnant P. A :: HK. O. lorſque la Vis eſt fixe, & T. A :: HK. O. lorſque c'eſt l'Ecroue qui eſt fixe, donne conſequemment pour le premier cas P×O=A×HK, & T×O=A×HK pour le ſecond. Donc en cet équilibre ſuppoſé, l'Energie de la puiſſance P ou T, eſt toûjours égale à l'Energie de la charge A que cette puiſſance ſoûtient par le moyen de la Vis VXYZ, ou de ſon Ecroue PQ. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

II Ce qu'on voit ici de la circonference O du cercle décrit du rayon ST ou EP, & du pas HK de la Vis, ſe dira de même de leurs parties proportionnelles quelconques $\frac{O}{n}$, $\frac{HK}{n}$; leſquelles parcourues par des mouvemens contemporains, comme le ſont les totaux en vertu deſquels cette circonference O, & ce pas HK de la Vis, ſeroient parcourus dans l'art. 1. expriment comme eux (*Déf.* 32.) les vîteſſes virtuelles de la puiſſance T ou P, & de la charge A de la Vis VXYZ, ou de ſon Ecroue PQ : & conſequemment (*Déf.* 32.) les produits $\frac{T\times O}{n}$ ou $\frac{P\times O}{n}$, & $\frac{A\times HK}{n}$, exprimeroient auſſi les Energies de cette puiſ-

ſance T ou P, & de cette charge A ; leſquelles Energies (pour ainſi dire) partiales ſeroient encore égales entre-elles, comme le tout (*art.* 1.) les totales T×O ou P×O, & A×HK.

FIG. 145. III. Quant à la Vis ſans fin de la Fig. 145. toutes choſes demeurant ici les mêmes que dans le Th. 35. imaginons que l'équilibre ſuppoſé entre la puiſſance R & le poids Q, y ſoit rompu par quelque augmentation de la force de la puiſſance R, ou par quelque diminution de la peſanteur du poids Q. Il eſt viſible qu'alors à chaque tour entier de la manivelle DFR autour de ſon axe GK, ou de la puiſſance R autour du centre K, la dent P de la roue dentée P*p*S, qui eſt entre les ſpires ou helices AP, BP, de la Vis, en ſortira, & la dent ſuivante *p* y entrera, de maniere que chacune de ces dents P, *p*, parcourra pour lors la valeur de chacun des pas AB de cette Vis. Donc ſi l'on imagine du centre C un cercle qui paſſe par les extrêmitez de toutes ces dents, ce tour entier de la manivelle DFR autour de ſon axe GK, ou de la puiſſance R autour du centre K, fera mouvoir ce cercle imaginaire de la valeur d'un arc *p*P=AB ; & conſequemment auſſi le poids Q de la valeur d'un arc ſemblable *e*E : de ſorte qu'en appellant O la circonference entiere du cercle décrit autour du centre K par la puiſſance R dans un tour entier de la manivelle DFR, l'on aura ici (*Déf.* 32.) cette circonference O, & l'arc E*e*, pour les expreſſions des vîteſſes virtuelles de la puiſſance R, & du poids Q ; & R×O, Q×E*e*, pour les expreſſions de leurs Energies.

Cela poſé, puiſque l'on vient de trouver P*p*=AB, l'on aura AB. E*e* :: P*p*. E*e* :: CP. CE. Ce qui donne AB×CE= CP×E*e*. Donc le Th. 35. donnant R. Q :: AB×CE. CP×O. dans le cas d'équilibre qu'on ſuppoſe ici comme là entre la puiſſance R & le poids Q ſur la Vis compoſée dont il s'agit ici, l'on y aura auſſi R. Q :: CP×E*e*. CP×O :: E*e*. O. D'où réſulte R×O=Q×E*e*. Donc venant de trouver R×O, Q×E*e*, pour les expreſſions des Energies de la puiſſance R, & du poids Q, leurs Energies ſeront ici égales entr'elles. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Digitized by Google

Un raiſonnement ſemblable à celui du précedent art. 2. fera encore voir que ces Energies de la puiſſance R & du poids Q, peuvent auſſi être exprimées par $\frac{R \times O}{n}$, $\frac{Q \times Ee}{n}$, quelque ſoit le nombre n, qui les laiſſeroit encore égales entr'elles.

La Déf. 32. fait aſſez voir que des Energies trouvées égales deux a deux dans les précedens art. 1. 2. 3. il y en a toûjours une affirmative, & l'autre negative; que l'affirmative eſt toûjours celle de la force en faveur de laquelle s'eſt fait le mouvement donné à la Machine, & la negative, toûjours celle de l'autre force à qui ce mouvement s'eſt trouvé contraire: j'appelle ici Forces, *la charge de la Vis ou de ſon Ecroue dans la Fig. 243. le poids Q dans la Fig. 245. & la puiſſance en equilibre avec cette charge dans la Fig. 243. ou avec ce poids dans la Fig. 245. c'eſt pour m'exprimer plus clairement, & en moins de mots que je les appelle de ce nom commun.*

PARTIE VII.

Pour l'équilibre de l'effort du Coin avec la réſiſtance des côtez de la fente qu'il tend à faire ou à augmenter dans le corps à fendre.

I. Soit comme dans le Th. 37. le Coin AEB pouſſé d'une force F ſuivant une direction FG, qui doit toûjours (*Th.* 37.) paſſer par l'angle R de la fente HRK du corps à fendre ΔΕΛΜ, dans laquelle cette force F tend à enfoncer ce Coin, & le tient en équilibre avec les réſiſtances des côtez HR, KR, de cette fente, touchez par ceux de ce même Coin AEB en des points H, K, par leſquels on peut toûjours (*Th.* 37.) mener de quelque point D de la direction FG du Coin, des perpendiculaires DM, DN, à ces côtez HR, KR, de la fente HRK; ſur leſquelles perpendiculaires ſoient les côtez du parallelogramme DMRN, dont la diagonale de longueur arbitraire DG ſoit ſur la direction FG du Coin AEB. Des

Fig. 283. 284. 285.

angles M, N, de ce parallelogramme ſoient Mm, Nn, perpendiculaires en m, n, ſur cette diagonale DG ; & d'un point r infiniment proche de R, de cette même diagonale prolongée, ſoient rh, rk, paralleles aux côtez RH, RK, de la fente HRK, avec Rh, Rk, perpendiculaires en h, k, ſur ces paralleles rh, rk.

Suivant cette conſtruction, l'on aura les triangles rectangles Rhr, DHR, DmM ; Rkr, DKR, DnN, ſemblables entr'eux trois à trois diſtinguez comme on les voit ici ; ce qui avec le nomb. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. (en appellant F la force du Coin AEB ſuivant ſa direction DG ou Fr ; M, N, les réſiſtances des côtez HR, KR, de la fente HRK, ſuivant leurs directions HD, KD, ou MD, ND ; & m, n, les efforts qui en réſultent ſuivant mD, nD, directement à contre-ſens de la force F du Coin) donnera Rr. Rh :: DM. Dm :: M. $m = \frac{M \times R h}{R r}$. Et R$r$. R$k$ :: DN. Dn :: N. $n = \frac{N \times R k}{R r}$. Donc $m + n = \frac{M \times R h + N \times R k}{R r}$. Or (*Lem.* 3. *part.* 2.) m. n :: Dm. Dn. Ce qui (en compoſant) donne m. $m + n$ :: Dm. Dm + Dn. De plus (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) F. M :: DG. DM. Et M. m :: DM. Dm. Ce qui (en raiſon ordonnée) donne F. m :: DG. Dm. Donc ayant déja m. $m + n$ :: Dm. Dm + Dn. l'on aura ici (en raiſon ordonnée) F. $m + n$ :: DG. Dm + Dn. Par conſequent venant de trouver $m + n = \frac{M \times R h + N \times R k}{R r}$, on aura pareillement ici F. $\frac{M \times R h + N \times R k}{R r}$ :: DG. Dm + Dn. Or Gn = Dm rend DG = Dm + Dn. Donc auſſi $F = \frac{M \times R h + N \times R k}{R r}$; & conſequemment F×Rr = M×Rh + N×Rk.

II. Imaginons preſentement une nouvelle force ſuivant FR, laquelle rompe l'équilibre ſuppoſé entre la force F

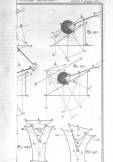
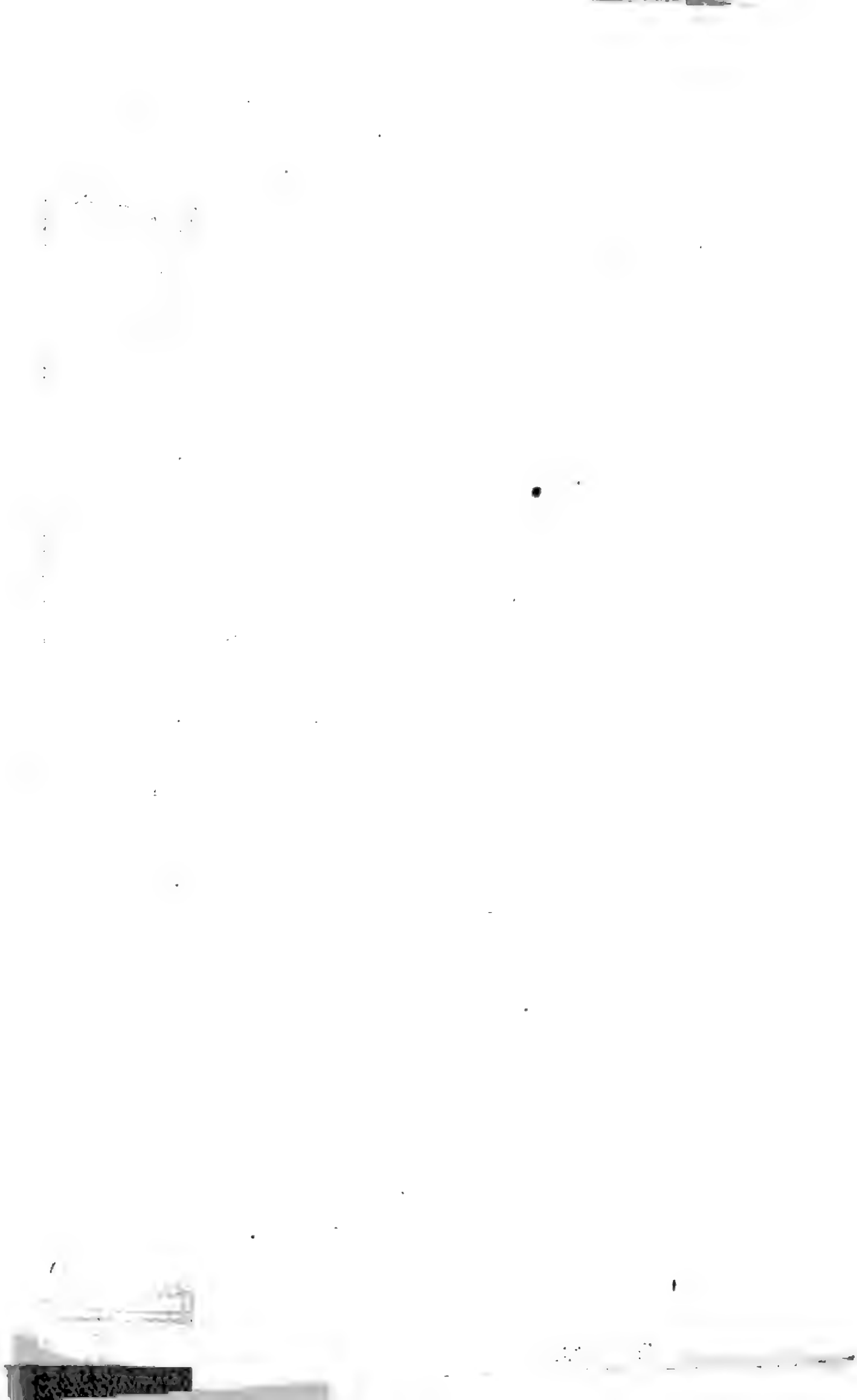


Fig. 1472.
Fig. 1473.
Fig. 1474.
Fig. 1475.
Fig. 1476.
Fig. 1477.



du Coin AEB ſuivant FR, & les réſiſtances M, N, des côtez HR, KR, de la fente HRK ſuivant leurs perpendiculaires HD, KD, ou MD, ND; laquelle nouvelle force faiſant enfoncer ce Coin en augmentant de la valeur infiniment petite R*r* la profondeur de cette fente HRK du corps à fendre διλμ, faſſe ainſi avancer ce même Coin AEB de cette valeur R*r*, pendant que les côtez HR, KR, de cette même fente HRK; ſeront ainſi forcez d'aller ſe coucher ſur leurs paralleles *hr*, *kr*, en s'écartant de leurs premieres ſituations, c'eſt-à-dire, l'un de l'autre, des valeurs infiniment petites de leurs perpendiculaires R*h*, R*k*, paralleles à leurs directions DM, DN. Alors ſuivant la Déf. 32. ces lignes infiniment petites R*h*, R*k*, ainſi parcourues par les côtez HR, HK, de la fente HRK, pendant que le Coin AEB avanceroit de la valeur de R*r*, ſuivant ſa direction F*r*: alors, dis-je, ces petites lignes R*h*, R*k*, exprimeroient les vîteſſes virtuelles de ces côtez HR, KR, de la fente HRK, de même que R*r* exprimeroit celle du Coin AEB; de ſorte que ſuivant la même Déf. 32. les produits M×R*h*, N×R*k*, F×R*r*, exprimeroient les Energies des réſiſtances M, N, de ces côtez de la fente, & de la force F du Coin, dont l'Energie F×R*r* ſera ici affirmative, & les deux autres negatives. Or on vient de trouver (*art.* 1.) F×R*r*=M×R*h*+N×R*k*. Donc on aura ici l'Energie affirmative de la force F du Coin AEB, égale à la ſomme des Energies negatives (affirmativement priſes) des réſiſtances M, N, des côtez HR, KR, de la fente HRK du corps à fendre διλμ, ſuppoſées en équilibre avec cette force F du Coin AEB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SECTION X.

De l'Equilibre des Liqueurs.

QUelques perſonnes habiles prévenues en faveur du principe de Statique de M. Deſcartes, qui eſt qu'*il faut autant de force pour faire monter un poids, par exemple, d'une livre à* 100 *pied de hauteur, que pour en faire monter un de* 100 *livres à un pied*: ces perſonnes, dis-je, prévenues en faveur de ce principe, ſur tout par rapport à l'explication de l'équilibre des Liqueurs, parmi leſquelles eſt un Auteur, dont on verra les objections Latines reſolues dans la ſuite, m'ayant marqué toutes ſimplement qu'elles ne voyoient pas comment on pourroit, hors lui, qui a dit nettement qu'on ne peut pas rendre raiſon de cet équilibre par le principe dont je me ſervis en 1687. & dont je me ſers encore ici pour démontrer l'équilibre des forces ou des poids appliquez à des Machines; m'engagent à ajoûter ici cette Section pour les ſatisfaire ſur ce ſujet, & en même tems ce qu'il y en pourroit avoir d'autres, auſquels cette prévention commune à pluſieurs, ou quelqu'autre cauſe ne laiſſeroit pas aſſez d'attention pour voir d'eux-mêmes que le principe qu'on ſuit *ici*, peut ſervir auſſi aiſément à rendre raiſon de l'équilibre des Liqueurs, qu'on l'a vû ſervir juſqu'ici à rendre celle de l'équilibre des forces ou des poids appliquez à des Machines, & ici comme là par la generation de l'équilibre toûjours & par tout réſultant de l'oppoſition directe entre deux forces égales, ou entre une force & une réſiſtance invincible, ſoit que chacune de ces forces ſoit ſimple, ou dérivée, ou compoſée de tant d'autres qu'on voudra. Cela s'eſt vû juſqu'ici par rapport à l'équilibre ſur des Machines; le voici auſſi par rapport à l'équilibre des Liqueurs, dont les peſanteurs quelconques ſeront par tout priſes

priſes ici à l'ordinaire, comme tendantes de haut en bas ſuivant des directions paralleles verticales.

Si je n'avois affaire qu'à des Carteſiens, tels que l'Auteur dont je viens de parler, & qui ſeul m'oblige de m'expliquer ſur le principe de Statique de M. Deſcartes, par l'objection qu'il m'en fait; peut-être que pour en obtenir un peu plus d'attention à ce que je vas dire, il ne ſeroit pas hors de propos de leur demander la ſolution de quelques difficultez que voici par rapport à leur maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs: je leur propoſerois le Ciphon MDEN de branches cylindriques verticales, MD, NE, inégales en groſſeur, dans lequel il y auroit de l'eau en équilibre juſqu'au niveau AH; & je leur demandrois la raiſon de cet équilibre.

I. Ils me répondroient à leur ordinaire, que s'il n'y avoit pas ici d'équilibre, l'eau deſcendroit dans une des branches du Ciphon, & monteroit dans l'autre; de maniere que ſi ſa ſurface, par exemple, AL deſcendoit de quelque hauteur AB que ce ſoit dans ſa groſſe branche MD, elle forceroit la ſurface HO de l'eau de la petite branche NE d'y monter d'une hauteur HK, telle qu'on auroit alors AL×AB=HO×HK. FIG. 126.

Cela eſt vrai, puiſque les quantitez d'eau BALP, HKQO, ſont égales entr'elles. Mais que s'enſuit-il de là? ſinon qu'en ce cas de non équilibre les hauteurs AB, HK, qui exprimeroient également ici les vîteſſes contemporaines & les chemins contemporains des ſurfaces AL, KO, y ſeroient entr'elles en raiſon reciproque de ces mêmes ſurfaces?

II. En voilà aſſez pour ce que nous prétendons, diront-ils ſans doute; puiſque, ſuivant le principe précedent de M. Deſcartes, il faut des forces égales pour faire parcourir à des poids des chemins differens qui ſoient en raiſon reciproque de ces mêmes poids; & que ſuivant le nomb. 1. en cas de non équilibre les ſurfaces ou lames d'eau AL, HO, où leurs poids ſeroient ici en raiſon reciproque des chemins AB, HK, qu'elles y parcourroient.

Donc elles y auroient des forces égales ; & par conſequent elles y demeureroient en équilibre entr'elles au niveau AH, auquel on les a ſuppoſées d'abord, au lieu de ſe mouvoir, comme ces Meſſieurs viennent auſſi de le ſuppoſer, pour en déduire ainſi cet équilibre.

Cette derniere conſequence, ſi elle étoit valable, ne ſeroit tout au plus que *ab abſurdo*, puiſque ce ne ſeroit y conclure l'équilibre que du non-équilibre. Mais il s'en faut bien qu'elle ſoit juſte ; puiſque pour l'équilibre entre deux forces ce n'eſt pas aſſez qu'elles ſoient égales entre-elles, il faut de plus qu'elles ſoient contraires l'une à l'autre juſqu'à ſe détruire ou s'empêcher mutuellement. Or c'eſt ce qui ne ſe trouve point ici ; puiſque ce n'eſt que du non-équilibre entre les ſurfaces ou lames d'eau AL, HO, qu'on leur y trouve des forces égales, qui bien loin d'être contraires entr'elles, y ſont parfaitement d'accord, & tellement que l'une y faiſant deſcendre AL, & l'autre faiſant monter HO, la ſeconde y obéït à la premiere malgré la réſiſtance qu'y fait le poids de l'eau qu'elle y fait monter dans la petite branche EN ; laquelle réſiſtance ainſi ſurmontée dans ce cas de non-équilibre par la force du poids de l'eau de la grande branche MD, ſeroit conſequemment ici moindre que cette force, dont l'excès ſur la force du poids de l'eau de la petite branche, s'y diſtriburoit en deux parties qui ſeroient les forces égales de deſcente & d'aſcenſion qu'on vient de trouver aux ſurfaces ou lames d'eau AL, HO, dans ce cas de non-équilibre, où les poids des colonnes d'eau compriſes dans les branches MD, NE, du Ciphon MDEN, auroient ainſi des forces inégales pour les y faire deſcendre de part & d'autre. Donc de ce qu'en ce cas de non-équilibre les forces de deſcente d'une des ſurfaces ou lames d'eau AL, HO, & d'aſcenſion de l'autre, ſont égales entr'elles ; il ne s'enſuit pas, ainſi qu'on l'en vient de conclure à la maniere (ce me ſemble) des Carteſiens, que les efforts contraires que les poids des deux colonnes d'eau ſuppoſées d'abord à niveau en AH dans les deux branches du Ci-

Digitized by Google

phon MDEN, ſont pour les y faire deſcendre, ſoient égaux entr'eux ; ni conſequemment que ces colonnes ou cylindres d'eau doivent demeurer en équilibre à ce niveau.

III. Le défaut de juſteſſe de cette conſequence n'eſt pas le ſeul qui me paroiſſe dans le raiſonnement de l'art. 2. fait (ce me ſemble) à la maniere des Carteſiens : il m'y paroît encore un autre défaut, qui conſiſte en ce qu'on n'y compte que les mouvemens des ſurfaces AL, HO, quoiqu'il y en ait beaucoup davantage. Car pour que la ſurface ou lame d'eau AL deſcende de la hauteur quelconque AB dans la groſſe branche MD du Ciphon MDEN, il faut (en ſuppoſant horiſontal le plan touchant CF du canal de communication des deux branches MD, EN, de ce Ciphon) que tout le cylindre d'eau ACGL deſcende auſſi de cette hauteur AB ; puiſque la ſurface ou lame AL de ce cylindre d'eau contenue dans la branche MD, n'y ſçauroit deſcendre de cette hauteur AB en BP, à moins que cette ſeconde lame-ci ne deſcende d'autant en la place d'une troiſiéme de cette diſtance au-deſſous d'elle ; pour cela il faut de même que cette troiſiéme lame d'eau deſcende auſſi d'une pareille hauteur en la place d'une quatriéme de même diſtance au-deſſous d'elle, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere lame CG qui entrera pour lors dans le canal CFED de communication des deux branches du Ciphon MDEN : d'où l'on voit que pour que la ſurface ou lame d'eau AL deſcende de la hauteur AB, il faut que toutes les ſuivantes juſqu'en CG, & conſequemment auſſi que tout le cylindre d'eau ACGL, compoſé de toutes ces lames ou petits cylindres égaux, deſcende alors de cette hauteur AB. On démontrera de même que pour que la ſurface HO de l'autre cylindre d'eau HFPO, forcée par cette deſcente de ACGL (ſuppoſé d'abord lui être à niveau) de monter en KQ d'une hauteur HK, qui rende KQ×HK=AL×AB, monte en effet de cette hauteur, il faut que tout le cylindre KFPQ monte auſſi de cette hauteur HK, dans le tems que l'autre ACGL deſcend de la hauteur AB. Par conſequent

en ce cas-ci de non-équilibre les vîteſſes de ce cylindre d'eau ACGL, & d'aſcenſion de l'autre KFPQ, ſeront ici entr'elles en raiſon de ces hauteurs AB, HK, qu'ils y parcourent en même tems en ces deux ſens contraires. Ainſi les quantitez de mouvemens de ces deux cylindres d'eau ACGL=AC×AL, & KFPQ=KF×KQ, ſeront ici entr'elles : : AC×AL×AB. KF×KQ×HK (à cauſe de AL×AB=KQ×HK) :: AC. KF.

Ce ſont-là les quantitez de mouvement réſultantes ici du non-équilibre qu'on y ſuppoſe, & non pas les ſeules des deux ſurfaces ou lames d'eau AL, HO, priſes dans le raiſonnement de l'art. 2. pour tout ce qui en réſulte de ce non-équilibre. Donc outre le défaut de ce raiſonnement, marqué dans cet art. 2. quand même il n'y auroit point ici d'autre mouvement que celui des ſurfaces AL, HO: y voici encore un autre défaut, qui vient de n'y avoir ſuppoſé que cette ſeule quantité de mouvement.

IV. Peut-être que ceux auſquels j'expoſe bonnement ici mes difficultez ſur leur maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs, diront que les quantitez de mouvement qu'ils prennent ici pour les réſultantes du non-équilibre qu'ils y ſuppoſent entre les cylindres d'eau ACGL, HFPO, pour en conclure l'équilibre entr'eux, ne ſont pas les ſeules des ſurfaces AL, HO, ainſi qu'on l'a crû dans l'art. 2. mais qu'elles ſont celles des cylindres entiers ACGL, HFPO, telles qu'on les leur vient de trouver dans le précedent art. 3. en raiſon des hauteurs AC, FK, de ces deux cylindres d'eau; leſquelles quantitez de mouvement ſont égales entr'elles, non pas à la verité toûjours, mais du moins au premier inſtant de leurs naiſſances contemporaines; puiſque les hauteurs AB, HK, de deſcente de la colonne d'eau ACGL, & d'aſcenſion de HFPO ſuppoſée d'abord à niveau de celle-là, parcourues par ces deux cylindres d'eau pendant ce même inſtant, ſe trouvant alors infiniment petites, & conſequemment négligeables par rapport aux finies AC, FK; n'empêchent point que celles-ci, ni conſequemment (*art.* 3.) que les quantitez

Digitized by Google

de mouvement des cylindres d'eau ACGL, KFPQ, ne puiſſent être priſes pour égales entr'elles en ce cas de non-équilibre. Cela étant, & l'infinie petiteſſe de la hauteur HK permettant auſſi de prendre pour égaux entr'eux les cylindres KFPQ, HFPO, qui en montant la parcourent enſemble de vîteſſes égales ; & conſequemment comme ayant alors des quantitez égales de mouvement : les cylindres d'eau ACGL, HFPO, ſuppoſés d'abord à niveau entr'eux, auroient pareillement ici des quantitez égales entr'elles de mouvement au premier inſtant de leur non-équilibre, lequel par conſequent y rendroit ces deux cylindres d'eau ACGL, HFPO, ou leurs poids en raiſon reciproque de leurs vîteſſes exprimées par les hauteurs AB de deſcente du premier, & HK d'aſcenſion du ſecond, qu'ils y parcoureroient ce premier inſtant. Donc alors, diront ces Sectateurs de M. Deſcartes, ſuivant ſon principe rapporté ci-deſſus, ces deux cylindres d'eau auroient ici des forces égales ; & par conſequent y demeureroient en équilibre entr'eux, & leurs ſurfaces AL, HO, au niveau AH auquel on les a ſuppoſées d'abord, au lieu de ſe mouvoir ainſi que ces Meſſieurs le ſuppoſent auſſi d'abord pour prouver cet équilibre.

Cette derniere conſequence eſt la même que la derniere du raiſonnement de l'art. 2. avec cette ſeule difference, que là elle eſt déduite de l'égalité des ſeuls mouvemens que les ſurfaces AL, HO, des cylindres d'eau ACGL, HFPO, auroient dans le cas de leur non-équilibre ; & qu'ici elle eſt déduite de l'égalité de ce que ces deux cylindres en auroient alors, l'un au gré de ſa peſanteur, & l'autre malgré la ſienne : de ſorte que des deux défauts que les art. 2. 3. font voir dans la premiere de ces deux conſequences des raiſonnemens Carteſiens de l'art. 2. & de celui-ci, la ſeconde eſt exempte du premier venu (*art.* 3.) de n'avoir pas employé dans l'art. 2. comme dans celui-ci, tout le mouvement de l'eau des branches du Ciphon, réſultant du non-équilibre ſuppoſé. Mais cette ſeconde conſequence, qui eſt la derniere du

raiſonnement Carteſien de cet article-ci, a le ſecond des défauts de celle-là, étant auſſi peu juſte qu'elle, comme on le verra par la même raiſon qui a fait voir le défaut de juſteſſe de cette derniere conſequence de l'art. 2. dans la réflexion faite ſur elle dans ce même art. 2.

V. J'avouerai encore ici que ce même défaut de juſteſſe me paroît de même, & pour la même raiſon dans la conſequence que les Carteſiens tirent du même principe de leur Maître par rapport à l'équilibre entre deux forces ou deux poids appliquez à des Machines : par exemple, après avoir dit à l'ordinaire que ſi deux poids A, F, appliquez aux extremitez du Levier AF appuyé en ſon point D placé entr'eux, ſont en raiſon reciproque des bras DA, DF, de ce Levier, c'eſt-à-dire, que ſi A. F :: DF. DA. ces deux poids A, F, demeureront en equilibre entr'eux ſur l'appui D de ce Levier : après, dis-je, cet énoncé, ces Meſſieurs, pour le prouver, diſent que ſi ces deux poids A, F, ainſi conditionnez, ne demeuroient pas ici en équilibre entr'eux ſur cet appui D, un d'eux, par exemple, A l'emporteroit ſur l'autre ; & que pendant que ce poids A feroit ainſi paſſer le Levier AF en une autre ſituation quelconque CK, il parcourroit autour du centre D l'arc circulaire AC, en forçant l'autre poids F à parcourir en ſens contraire l'arc ſemblable FK autour du même centre D : de ſorte que l'on auroit alors FK. AC :: DF. DA (*Hyp.*) :: A. F. ou A. F :: FK. AC. c'eſt-à-dire, les poids A, F, entr'eux en raiſon reciproque des chemins AC, FK, qu'ils parcourreroient alors. D'où ces Sectateurs de M. Deſcartes concluent ſuivant ſon principe rapporté au commencement de cette Section-ci, que ces poids auroient alors des forces égales ; & conſequemment qu'ils demeureroient ici en équilibre entr'eux ſur l'appui D, au lieu de s'y mouvoir comme ces Autours le ſuppoſent d'abord, pour en déduire ainſi cet équilibre.

Fig. 287.

Cette derniere conſequence eſt encore ſemblable à la derniere de l'art. 2. déduite de même à leur maniere ; & conſequemment elle a auſſi le même défaut de juſteſſe

Digitized by Google

que celle-là, remarqué dans la réflexion faite ſur cette autre-là dans cet art. 2. ou tout au plus celle ci ne prouveroit comme elle l'équilibre que *ab abſurdo*, ou que par l'impoſſibilité du mouvement qui s'y oppoſeroit. La raiſon de cet inconvenient rapportée dans ce même art. 2. pour cette conſequence-là par rapport à l'équilibre des Liqueurs, fera voir ce même inconvenient dans la précedente, par rapport à l'équilibre ſur le Levier ici ſuppoſé : l'application y en eſt aiſée à faire ; ainſi je ne m'y arreterai pas davantage.

VI. Cette même raiſon pourroit auſſi ſervir à faire voir de-même cet inconvenient dans la maniere préciſément la même dont les mêmes Auteurs expliquent l'équilibre ſur les autres Machines, ſans compter qu'il y a bien des Problêmes de Statique, qui ne ſeroient pas aiſez à réſoudre de cette maniere, ſur tout ceux où il s'agiroit de mettre tant de puiſſances qu'on voudroit en équilibre ſur celle qu'on voudroit de ces Machines (parmi leſquelles la funiculaire ſoit auſſi compriſe) n'en ayant de donné que l'appui, ou que les rapports de ces puiſſances, ou ſeulement leurs directions ; ce que les ſeules ſolutions qu'on voit ici de pareils Problêmes, font cependant voir être faciles à réſoudre par le principe des forces compoſées ou dérivées, qu'on ſuit par tout ici.

Au reſte, n'ayant en vûe que de faire faire attention à la fecondité de ce principe dans la Statique, & non d'attaquer l'uſage qu'on y fait de celui de M. Deſcartes ; je n'expoſe ici mes difficultez ſur cet uſage, que forcé par l'Auteur qui m'en a fait une objection, & pour rendre en même tems le Lecteur prévenu en faveur de ce principe Carteſien, plus diſpoſé à écouter l'explication que je vais donner de l'équilibre des Liqueurs ſuivant l'autre principe, toute auſſi naturelle que celle qu'il m'a fournie juſqu'ici de l'équilibre des Solides : c'eſt dans les propoſitions ſuivantes que va ſe trouver cette explication démontrée de l'équilibre des Liqueurs, que je n'ajoûte ici

que parce qu'on m'a marqué la ſouhaiter, ne m'étant propoſé juſques-là que de traiter (comme j'ai fait juſqu'ici) de l'équilibre des Solides, c'eſt-à-dire, des poids ou des puiſſances appliquées à des Machines; ce qui étoit tout le deſſein du Projet qui parut de cet Ouvrage-ci en 1687. Ce qui s'y trouve démontré dans la prop. 3. comme ici dans la Section 6. des Poids ſoûtenus ſur des Plans inclinez, réduiſant toûjours l'équilibre de quantitez inégales d'une même Liqueur quelconque, ou de poids inégaux de Liqueurs differentes, contenues, par exemple, dans les branches du Ciphon, qui les auroit de groſſeurs inégales, à l'équilibre de groſſeurs égales & de poids égaux de ces Liquides, leſquelles s'y contrepeſent, le ſurplus de ce qu'en contient la plus groſſe des deux branches du Ciphon, étant toûjours ſoutenu (comme ſur un plan incliné) ſur ou contre le panchant du rétréciſſement de cette groſſe branche: c'eſt ce qu'on va démontrer, & en conſequence que cette maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs, eſt toute auſſi naturelle que celle qu'on a vûe démontrée dans la prop. 3. du Projet de ceci publié en 1687. & qu'on voit encore ici démoutrée de même dans la Section 6. de l'équilibre des Poids ſoûtenus ſur des plans inclinez. Ce qu'auroient apperçû ſans doute d'eux-mêmes, tant ceux qui m'ont marqué douter, que celui qui a mié que cet équilibre des Liqueurs pût auſſi être démontré par le même principe de ce Projet & de tout ceci, ſi leur prévention pour la maniere Carteſienne d'expliquer cet équilibre des Liqueurs, leur eût permis aſſez d'attention pour cela: ils en jugeront mieux par ce qui ſuit, ſi les difficultez précedentes ſur cette maniere Carteſienne, peuvent obtenir d'eux cette attention, pour laquelle obtenir j'ai fait ces difficultez, que j'aurois ſûrement omiſes, ſi je n'y euſſe point été forcé par l'Auteur dont je viens de parler, ne voulant de conteſtation avec perſonne.

DEFINITION

DEFINITION XXXIII.

On dit qu'une Liqueur eſt *à niveau*, lorſqu'elle a toute ſa ſurface horiſontale ; & l'on appelle *ſurface* d'une Liqueur ce qu'elle en a de non-touchée par le vaſe qui la contient, laquelle s'appellera auſſi *ſurface libre*, & *non-empêchée* par les côtez du vaſe.

AXIOME IX.

Un corps peſant deſcend tant qu'il le peut, ou que rien ne l'en empêche abſolument.

COROLLAIRE I.

Donc une Liqueur (parfaitement coulante, telles que ſeront celles dont on parlera dans la ſuite) abandonnée à elle-même dans un vaſe quelconque ABEF, doit toûjours s'y mettre à niveau : car ſi cette ſurface libre étoit MDN plus haute du côté de M que du côté de N, les parties de cette ſurface plus hautes du côté de M en pourroient deſcendre vers les plus baſſes du côté de N, le long de cette ſurface obliſque MDN, comme le long d'un plan incliné, ſi on la ſuppoſe droite ou plane, ou comme le long de pluſieurs plans inclinez contigus, ſi on la ſuppoſe faite de pluſieurs planes, dont le nombre ſeroit infini, ſi on la ſuppoſoit courbe ; & toûjours de même juſqu'à ce qu'elle eût toutes ſes parties d'égale hauteur dans un plan horiſontal GH, qui la rencontrât en un endroit D, qui rendît égaux les eſpaces MDH, NDG. Donc, ſuivant l'Axiome précedent, ſi la ſurface de la Liqueur contenue dans le vaſe ABEF, étoit hors de niveau en MDN par quelque cauſe que ce fût, abandonnée à elle-même, elle s'y mettroit en GH par la chute de la portion MDH de cette Liqueur dans l'eſpace égal NDG plus bas que MDH ; & par la même raiſon cette Liqueur reſteroit à ce niveau GH, après toute agitation ceſſée, ſa ſurface n'ayant plus alors de profondeur où aucune de ſes parties puiſſe deſcendre. Donc une Liqueur abandonnée à elle- Fig. 288. 289.

même dans un vaſe quelconque, doit toûjours enfin s'y mettre à niveau, & y reſter en équilibre tant que rien ne l'y troublera.

COROLLAIRE II.

Fig. 190. En ce cas d'équilibre d'une Liqueur, ce n'eſt pas aſſez pour y reſter à niveau, autrement l'eau d'une ſurface horiſontale y pourroit reſter à niveau ſur de l'huile : il faut de plus que les colonnes voiſines verticales PCDQ, QDKR, RKLS, &c. de cette Liqueur, ſe contre-balancent de maniere qu'aucune par ſon poids ne l'emporte ſur l'autre ; autrement l'élevation de cette ſeconde colonne en rendroit les parties ſuperieures plus élevées que les ſuperieures de la premiere qui l'auroit fait monter, leſquelles ſe ſeroient ainſi abaiſſées : de ſorte qu'alors, ſuivant l'Axiome, ces plus hautes parties tomberoient en la place ainſi abandonnée par les plus baſſes ; ce qui remettant (*Corol.* 1.) la Liqueur à niveau, & ſes colonnes au même état qu'auparavant, celle qui auroit élevé ſa voiſine, l'éleveroit encore, & en feroit encore tomber (*Ax.* 9.) les parties ſuperieures en la place abandonnée par les ſiennes en deſcendant, & toûjours de même : d'où réſulteroit un mouvement perpetuel de cette Liqueur ſans aucun niveau permanent, où elle demeurât en équilibre. Donc pour qu'elle y demeure à niveau, conformément au Corol. 1. ce n'eſt pas aſſez que la ſurface en ſoit horiſontale, il faut de plus que ſes colonnes verticales ſe contre-balancent, & ſe ſoûtiennent mutuellement, non ſeulement en s'appuyant contre les côtez du vaſe, mais encore en faiſant effort ſur ſon fond pour s'élever mutuellement comme feroient deux poids égaux aux extrêmitez d'une balance appuyée ſur ce fond du vaſe. C'eſt ainſi que l'eau verſée ſur de l'huile dans un vaſe l'y force de monter, l'eau plus peſante que l'huile l'emportant ſur elle dans le contre-balancement de leurs colonnes, quoiqu'égales : l'emportant, dis-je, par ſon plus grand poids, & non par la force de ſa chute en la verſant ; autrement de l'huile

Digitized by Google

verſée ainſi ſur de l'eau, devroit de même la faire monter; ce qui eſt contraire à l'experience, au lieu que le cas de l'huile élevée par l'eau verſée ſur elle, y eſt conforme.

COROLLAIRE III.

Donc dans un vaſe rétréci par en haut, ou de côtez obliques à l'horiſon, qui de la Liqueur dont il eſt rempli, en retiennent une partie au niveau du reſte; ce reſte de Liqueur plus élevée, eſt dans un effort continuel contre ces côtez obliques du vaſe, ou de ſon rétréciſſement, pour élever à ſon niveau ce que ces côtez obliques en empêchent d'y monter: auſſi l'experience fait-elle voir que ſi l'on fait un trou vertical à quelqu'un de ces côtez obliques, au-deſſus duquel ſoit le niveau de la Liqueur, elle s'échappera auſſi-tôt par ce trou en montant preſque au niveau de la Liqueur qui y ſeroit entretenue, auquel on démontre que ce jet vertical atteindroit, ſi la réſiſtance de l'air, & celle du frottement que la Liqueur ſouffre en paſſant par ce trou, ne s'y oppoſoient pas.

SCHOLIE.

I. L'experience fait auſſi voir que telle eſt la nature generale des Liqueurs, que celle-ci, comme toute autre, s'échapperoit de même force par ce trou, quelqu'autre direction qu'il eût. D'où l'on voit en general que les Liqueurs preſſées à volonté, font des efforts égaux en tous ſens pour s'échapper des vaſes où elles ſe trouvent ainſi comprimées: c'eſt pour cela que l'eau d'un vaſe s'en échappe avec des vîteſſes égales de tous côtez par des trous faits au-deſſus du niveau de cette Liqueur à diſtances égales de ce niveau.

Je ne ſçais perſonne qui ait donné la raiſon mécanique de cette experience, faute de connoître aſſez la nature des Liqueurs: faute de cela on ne voit que le fait, ſans en voir la cauſe, ni comment des forces comprimantes, par exemple, verticales comme la peſanteur, produiſent

des preſſions horiſontales égales aux verticales qu'elles cauſent au niveau de ces horiſontales. Cependant l'experience atteſte ce fait dans les Liqueurs comprimées dans des vaſes par leurs peſanteurs. Il faut donc conclure que ce fait ne vient pas de la preſſion ſeule de chacune de ces Liqueurs, mais de ſon concours avec quelqu'autre cauſe qui ne peut être (ce me ſemble) que la fluidité de cette Liqueur : autrement ces preſſions ainſi égales en tous ſens, ſe trouveroient dans des globules ſans fluidité, ainſi comprimées dans un vaſe qui en ſeroit rempli ; ce que l'experience & la Mecanique font voir n'être pas. Or comment la fluidité des Liqueurs contribue-t'elle avec leur peſanteur, ſecourue, ou non, de quelqu'autre cauſe comprimante, à produire des preſſions ainſi égales en tous ſens ? C'eſt ce qu'on n'a point encore démontré, & ce que j'avoue ne pas voir non plus. On s'eſt contenté de dire que cette fluidité des Liqueurs conſiſte dans une égale facilité des parties de chacune à ſe mouvoir en tous ſens, abſtraction faite de leurs peſanteurs, ou de quelqu'autre force comprimante, ſans dire la cauſe de cette égale facilité qu'une telle abſtraction laiſſeroit voir de même dans des globules ſans fluidité, les laiſſant voir indifferens à être en repos ou en mouvement, ſuivant des déterminations quelconques.

II. Il eſt vrai que les Carteſiens aſſignent la matiere ſubtile pour cauſe de la fluidité des Liqueurs, & conſequemment pour cauſe de cette égale facilité des parties de chaque Liqueur à ſe mouvoir en tous ſens, en ce que (diſent-ils) la matiere ſubtile traverſant chaque Liqueur en tous ſens avec des forces égales, en agite auſſi les parties en tous ſens avec d'égales forces.

Je ne m'arrête point à demander la cauſe de ces mouvemens en tous ſens de la matiere ſubtile, dont la fluidité qu'on lui ſuppoſe, ſeroit inutilement alleguée pour cauſe de tous ces mouvemens differens ; puiſqu'il s'agit ici de la cauſe elle-même de la fluidité qu'on fait conſiſter en une égale facilité des parties de chaque Liqueur à ſe mouvoir

Digitized by Google

en tous ſens ; ce qui permet à ſa peſanteur de la mettre toujours à niveau en pouſſant de tous côtez (lorſqu'elle n'y eſt pas) vers les plus baſſes ce que cette Liqueur a de parties plus élevées, qui par leur égale facilité à ſe mouvoir, ou plutôt à être mûes en tous ſens ; obéïſſent ſans peine.

Je ne m'arrête point non plus à demander comment ces parties de chaque Liqueur, pouſſées (comme veulent ces Meſſieurs) chacune de tous côtez à la fois avec des forces égales par la matiere ſubtile, qui ne leur donneroit ainſi aucun mouvement, auroient plus de facilité chacune à ſe mouvoir en tous ſens, que ſi cette matiere ſubtile étoit en repos entr'elles, ou qu'il n'y en eût point du tout entr'elles ; ni pourquoi ces particules de Liqueur auroient plus de cette facilité que des globules ſans liquidité, qui leur ſeroient égaux en maſſes.

III. Je veux bien ſuppoſer avec ces Meſſieurs, que la matiere ſubtile donne effectivement aux particules de chaque Liqueur cette facilité à ſe mouvoir ou à être mûes avec des forces égales en tous ſens, abſtraction faite de leur peſanteur, & de toute autre force comprimante. Mais je demande comment ſans cette abſtraction, c'eſt-à-dire, lorſqu'on conſidere ces Liqueurs comme comprimées par leur peſanteur ſecourue, ou non, de quelqu'autre force étrangere, ſimple ou compoſée, à volonté : je demande, dis-je, comment il n'en réſultera pas alors aux parties de chaque Liqueur, des preſſions plus fortes ſuivant la direction commune de tout ce qu'il y a de forces qui les preſſent, qu'en tout autre ſens ; & par quelle raiſon mécanique on peut concevoir que toutes ces preſſions ſeront égales en tous ſens dans chaque couche de Liqueur perpendiculaire à cette direction commune. C'eſt cependant ici un fait que l'experience atteſte de chaque couche horiſontale d'eau comprimée par ſa peſanteur dans un vaſe ou reſervoir, d'où cette eau s'échappe avec des vîteſſes égales par des trous faits au-deſſous de ſon niveau à diſtances égales quelconques de ce niveau, ou par des

trous faits au fond de ce vaſe, s'il l'a horiſontal, & a ſes côtez à niveau de ce fond, fait de preſſions égales en tous ſens, qui doit arriver de même dans toute une couche quelconque de Liqueur quelconque perpendiculaire à la direction commune à ſa peſanteur, & à tant d'autres forces comprimantes qu'on lui voudra ſuppoſer, leſquelles en compriment également toute la ſurface, & en conſequence toutes les parties, comme fait la peſanteur.

IV. Quelqu'ignorée que ſoit la cauſe totale de ce fait, l'experience qu'on en a par rapport à l'eau comprimée par ſa ſeule peſanteur dans un vaſe ou reſervoir, où elle eſt tranquille & comme en repos, l'a fait prendre juſqu'ici pour un principe d'experience : c'eſt ainſi que nous le prendrons auſſi dans la ſuite, ou en conſequence nous ſuppoſerons à l'ordinaire que les preſſions de l'eau comprimée par ſa ſeule peſanteur, ſont égales en tous ſens à diſtances égales de ſon niveau ; & pour faire voir que ces preſſions égales en tous ſens ne ſont pas l'effet de la ſeule peſanteur, voici celles qu'elle produiroit ſeule.

LEMME XIX.

Fig. 191. *Soit un cylindre ou priſme quelconque EAFDCVBT de baſe BVCT de figure quelconque, lequel ſoit coupé ſuivant ſa longueur par un plan qui y faſſe une ſection parallelogrammique ABCD. Soit ce même corps coupé en travers par deux autres plans HLGK, NSOZ, perpendiculaires à celui-là, avec lequel ils ayent des ſections communes HG, NO, inclinées à volonté aux côtez paralleles AB, DC, de ce parallelogramme ABDC, en faiſant les ſections HLGK, NSOZ, avec le cylindre ou priſme quelconque EAFDCVBT.*

Cela poſé, je dis que les aires HLGK, NSOZ, de ces deux ſections priſmatiques tranſverſales ſont par tout entr'elles comme leurs ſections communes HG, NO, avec le parallelogramme ABCD, c'eſt-à-dire, HLGK. NSOZ :: HG. NO.

Digitized by Google

DEMONSTRATION.

I. Soit auſſi le cylindre ou priſme quelconque EAFDCVBT coupé par deux plans NRPQ, HLΠβ, paralleles à ceux des ſections priſmatiques propoſées HLGK, NSOZ, chacun à chacun; & qui, en faiſant avec ce corps les ſections curvilignes NRPQ=HLGK, HLΠβ=NSOZ, paralleles & ſemblables chacune à ſon égale; & avec le parallelogramme ABCD. Les ſections rectilignes NP=GH, HΠ=NO, paralleles auſſi chacune à ſon égale, rendent égaux entr'eux les cylindres ou priſmes partiaux KGLHNRPQN, LΠβHNSOZN.

II. Soit de plus NM perpendiculaire au côté AB du parallelogramme ABCD; & du point H de ſon côté oppoſé DC, les droites HX, HY, perpendiculaires en X, Y, ſur les plans NSOZ, NRPQ, prolongez de ce côté là; & conſequemment auſſi perpendiculaires aux droites prolongées ON, PN. Ce qui rendant les triangles rectangles NMO, HXN, ſemblables entr'eux, & auſſi NMP, HYN, donne HX. HN :: NM. NO. Et HN. HY :: NP. NM. Donc (en raiſon troublée) HX. HY :: NP. NO.

III. Or l'art. 1. vient de donner les cylindres ou priſmes partiaux KGLHNRPQN=LΠβHNSOZN; & conſequemment leurs valeurs NRPQ×HY=NSOZ×HX, d'ou reſultent les aires NRPQ. NSOZ :: HX. HY. Donc (*art.* 2.) NRPQ. NSOZ :: NP. NO. Mais l'art. 1. vient de donner auſſi NRPQ=HLGK, & NP=HG. Donc enfin les aires HLGK. NSOZ :: HG. NO. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Puiſque l'article 1. donne les aires NRPQ=HLGK, HLΠβ=NSOZ, & les lignes droites NP=GH, HΠ=NO, on voit que l'on aura auſſi les aires HLGK. HLΠβ :: HG. HP. Et NRPQ. NSOZ :: NP. NO. Et auſſi NRPQ. HLΠβ :: NP. HΠ. de ſorte qu'en general, de quelque maniere qu'un priſme quelconque ſoit coupé tranſverſa-

lement par tant de plans qu'on voudra, tous perpendiculaires à un qui le coupe ſuivant ſa longueur en un parallelogramme quelconque ; les aires des ſections tranſverſales priſmatiques cauſez au priſme, coupé par ces plans tranſverſaux, ſeront toutes entr'elles comme les ſections communes de ces plans avec celui de ce parallelogramme.

THEOREME XLI.

Fig. 191. *Soient deux tuyaux ou vaſes priſmatiques AB, AD, l'un vertical AB, & l'autre AD arbitrairement incliné à l'horiſon, deſquels les ouvertures en A, & les fonds ou baſes BSCR, KODM, ſoient horiſontales & de figures quelconques, & les hauteurs AC, AE, terminées à ces fonds prolongez. Soient ces deux vaſes cylindriques ou priſmatiques remplis juſqu'en A de Liqueurs de peſanteurs ſpecifiques quelconques,* f, φ, *dirigées parallelement à la verticale AE, & en quantitez dont les maſſes priſmatiques AB, AD, ſoient* m, μ ; *des poids deſquelles réſultent ſur les fonds BSCR, KODM, des vaſes AB, AD, des preſſions* p, λ, *longitudinales, c'eſt-à-dire, ſuivant les longueurs AC, AK, de vaſes ou tuyaux ; & de perpendiculaires* p, ϖ, *à ces mêmes fonds BSCR, KODM.*

Cela poſé, l'on aura toûjours & par tout ici,

I. $p\mu\varphi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A) *pour les preſſions longitudinales de ces fonds.*

II. $p\mu\varphi \times \overline{AE} = \varpi mf \times \overline{AK}$ (B) *pour les preſſions perpendiculaires de ces mêmes fonds.*

DEMONSTRATION.

Fig. 193. Avant toutes choſes, pour ne point ſe broüiller aux noms qui ſe trouvent dans ces deux formules A, B, ni à ce qui s'en trouvera d'autres dans ce que ces formules en produiront d'autres ; voici la liſte de tous ces noms.

ϖ,

ϖ, μ, maſſes des Liqueurs contenues dans les tuyaux AB, AD. FIG. 98

f, Φ, les peſanteurs ſpecifiques de ces Liqueurs.

e, ε, leurs denſitez.

b, β, les fonds horiſontaux BSCR, KODM, de ces vaſes priſmatiques.

b, r, leurs ſections BSCR, KOQN, perpendiculaires à leurs longueurs AC, AK.

p, λ, preſſions longitudinales des Liqueurs ſur les fonds BSCR, KODM.

p, ϖ, leurs preſſions perpendiculaires.

PART. I. Cela poſé, puiſque (*Hyp.*) m, μ, ſont les maſſes des Liqueurs dont les tuyaux AB, AD, ſont ſuppoſez remplis juſqu'en A; & que f, Φ, ſont les peſanteurs ſpecifiques de ces Liqueurs: l'on aura $mf, \mu\Phi$, pour les poids abſolus de ces priſmes de Liqueurs. Soit preſentement ϕ la peſanteur relative reſultante ſuivant AK de la peſanteur ſpecifique abſolue Φ de la Liqueur contenue dans toute cette longueur AK du tuyau AD: l'on aura de même $\mu\phi$ pour le poids relatif ſuivant AK de cette colonne priſmatique AD de Liqueur. Or il eſt viſible que les preſſions longitudinales p, λ, que les poids $mf, \mu\phi$, dirigez par leurs peſanteurs f, ϕ, ſuivant AC, AK, ſont ſuivant ces directions ſur les fonds horiſontaux BSCR, KODM, ſont en raiſon de ces poids. Donc $p.\lambda :: mf.\mu\phi$. D'où reſulte $p\mu\phi = \lambda mf$. Mais la peſanteur ϕ ſuivant AK, étant ici dérivée de l'abſolue Φ ſuivant la verticale AE rencontrée en E par l'horiſontale KE; on aura ici AK. AE $:: \Phi . \phi = \Phi \times \frac{AE}{AK}$. Donc $p\mu\Phi \times \frac{AE}{AK} = \lambda mf$, d'où reſulte la formule $p\mu\Phi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A) *qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Autrement. Soit du tuyau AD continué une partie AH de baſe encore horiſontale GH, & remplie dans toute ſa longueur AG d'une portion de la même Liqueur de ce tuyau AD ſuppoſée de peſanteur ſpecifique Φ; de laquel-

la portion ou colonne AH de Liqueur, la maſſe ſoit x, & conſequemment dont le poids abſolu ſoit $x\phi$, lequel ſoit capable de faire équilibre ſur le plan incliné AG avec le poids abſolu mf de la colonne AB de l'autre Liqueur dirigée ſuivant la verticale AC parallele aux directions de ces deux poids abſolus $x\phi$, mf.

Cela poſé, il eſt démontré dans la Section 6. que pour cet équilibre (ſoient les horiſontales GF, KE, qui rencontrent en F, E, la verticale AC prolongée) il faudroit ici $x\phi . mf :: AG . AF :: AK . AE$. Et conſequemment $x\phi \times AE = mf \times AK$. Or ce cas d'équilibre entre les poids abſolus $x\phi$, mf, des priſmes AH, AB, de Liqueurs ſur les plans AG, AC, étant un cas où ces poids auroient des forces égales ſuivant ces plans, & où conſequemment ils preſſeroient également les baſes horiſontales GH, BSCR, ſuivant ces longueurs AG, AC ; la preſſion longitudinale de la premiere GH de ces deux baſes ſeroit ici égale à la longitudinale p de la ſeconde BSCR. Donc pour rendre ici égale à p la preſſion longitudinale de la baſe GH ſuivant AG ou AK, il y faudroit $x\phi \times AE = mf \times AK$. Or il eſt viſible que les preſſions longitudinales p, λ, des baſes horiſontales GH, KODM, cauſées ſuivant la même direction AR par les colonnes priſmatiques AH, AD, de même Liqueur, ſont entr'elles en raiſon des longueurs AG, AK, de ces priſmes : c'eſt-à-dire, $p . \lambda :: AG . AK = \frac{\lambda}{p} \times AG$. Donc $x\phi \times AE = \frac{\lambda mf}{p} \times AG$. Mais les maſſes x, μ, des mêmes colonnes AH, AD, de même Liqueur, ſont entr'elles comme leurs longueurs AG, AK ; c'eſt-à-dire, $x . \mu :: AG . AK$. D'où reſulte $x = \mu \times \frac{AG}{AK}$. Donc $\mu\phi \times \frac{AE \times AG}{AK} = \frac{\lambda mf}{p} \times AG$; d'où reſulte $p\mu\phi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A).

Ce qu'il falloit encore démontrer.

Digitized by Google

PART. II. Si de l'extrêmité L de KL priſe à volonté ſur AK prolongée de ce côté-là, on mene LP perpendiculaire en P ſur la verticale KP; ſi de plus on prend ϖ pour la preſſion ou force dont la colonne de Liqueur AD preſſe le fond horiſontal KODM ſuivant cette verticale KP, c'eſt-à-dire, perpendiculairement à ce fonds, en conſequence de la preſſion ou force λ dont ce fond KODM eſt preſſé par la même AD ſuivant ſa longueur AK : cette preſſion verticale ϖ ſuivant KP reſultant ainſi de celle λ ſuivant AK ou KL, on aura ici $\lambda . \varpi :: KL . KP :: AK . AE$.

Et conſequemment $\lambda = \varpi \times \frac{AK}{AE}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de λ en ſa place dans l'équation $p\mu\phi \times AE = \lambda mf \times \overline{AK}^{1}$ (A) de la part. 1. l'on aura ici $p\mu\phi \times AE = \varpi mf \times \frac{AK}{AE}$, ou $p\mu\phi \times \overline{AE}^{2} = \varpi mf \times \overline{AK}^{1}$ (B). *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Pour faire entrer preſentement dans cette formule B, & dans celle A de la part. 1. Les fonds horiſontaux BSCR, KODM, des vaſes priſmatiques AB, AD, leſquels fonds ſont les baſes horiſontales des colonnes de Liqueurs que ces vaſes contiennent juſqu'en A : ſoient ces baſes BSCR, KODM, appellées b, β; les hauteurs de ces colonnes priſmatiques étant AC, AE, l'on aura $b \times AC$, $\beta \times AE$, pour leurs volumes; & ſi l'on prend e, ϵ, pour les denſitez de ces Liqueurs, les priſmes AB, AD, qu'on en ſuppoſe dans les vaſes ou tuyaux de ces noms, auront leurs maſſes $m = be \times AC$, $\mu = \beta\epsilon \times AE$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de m, μ, en leurs places dans les précedentes équations A, B, des part. 1. 2. elles les changeront en d'auſſi generales.

1°. $p\beta\epsilon\phi \times \overline{AE}^{2} = \lambda bef \times AC \times \overline{AK}^{1}$ (C) pour les preſſions lon-

gitudinales p, λ, des fonds horiſontaux BSCR, KODM, des vaſes priſmatiques AB, AD.

2°. $p\beta\epsilon\phi\times\overline{AE}^{3}=\varpi bef\times AC\times\overline{AK}^{2}$ (D) pour les preſſions perpendiculaires p, ϖ, des mêmes fonds.

COROLLAIRE II.

Si de plus on ſuppoſe le tuyau ou vaſe priſmatique AD coupé en KOQN perpendiculairement à ſa longueur AK, l'on aura KODM×AE=KOQN×AK, c'eſt-à-dire (ſuivant les noms β, γ, des baſes KODM, KOQN) $\beta\times AE=\gamma\times AK$, d'où reſulte $AK=\frac{\beta\times AE}{\gamma}$. Cela ſe trouve auſſi par le moyen du Corol. dur Lemme . lequel donne les aires KODM (β). KOQN (γ) :: KD. KQ (à cauſe des triangles rectangles ſemblables KQD, AEK) :: AK. AE. D'où réſulte auſſi $\beta\times AE=\gamma\times AK$, & en conſequence encore $AK=\frac{\beta}{\gamma}\times AE$. Donc en ſubſtituant cette valeur de AK en ſa place dans les équations C, D, du précedent Cor. 1. elles ſe changeront encore en d'auſſi generales.

1°. $p\epsilon\phi\times AE=\lambda bef\times AC$ (E) pour les preſſions longitudinales p, λ, des fonds horiſontaux BSCR. KODM.

2°. $p\epsilon\phi\times\overline{AE}^{2}=\varpi bef\times AC\times AK$ (F) pour les preſſions perpendiculaires ou verticales p, ϖ, des mêmes fonds.

COROLLAIRE III.

Fig. 294. Suppoſons preſentement que les tuyaux ou vaſes priſmatiques AB, AD ſoient de hauteurs égales AC, AE, comme dans la Fig. 294. que les groſſeurs ou baſes perpendiculaires BSCR, KOQN, de figures quelconques en ſoient auſſi égales entr'elles, & qu'ils ſoient remplis d'une même Liqueur quelconque depuis l'horiſontale CK juſqu'en A : la premiere de ces trois hypotheſes rendant $b=1$ ſuivant la liſte précedente des noms employez ici ; la ſe-

conde rendant AC=AE, & la troiſiéme rendant $e=\epsilon$, $f=\phi$, ſuivant la même liſte:

1°. L'équation E du nomb. 1. du précedent Corol. 2. ſe changera pour ce cas-ci en $p=\lambda$. Ce qui fait voir que les preſſions longitudinales p, λ, des fonds horiſontaux BSCR, KODM, cauſées à ces fonds par les poids des priſmes AB, AD, de hauteurs égales, de groſſeurs égales, & de même Liqueur quelconque, ſuivant les longueurs AC, AK, de ces priſmes, ſeront toûjours ici égales entre-elles, quoique ces poids ſoient inégaux entr'eux, y étant en raiſon de ces longueurs AC, AK.

2°. L'équation F du nomb. 2. du même Corol. 2. ſe changera pareillement pour ce cas-ci en $p\times AE=\varpi\times AK$. Ce qui donnant $p.\varpi::AK.AE$. fait voir que les preſſions verticales ou perpendiculaires p, ϖ, des fonds horiſontaux BSCR, KODM, des tuyaux ou vaſes priſmatiques AB, AD, ſeroient ici comme la longueur AK de l'incliné AD y ſeroit à ſa hauteur AE: de ſorte qu'ayant ici (*Hyp.*) AC=AE, ces preſſions verticales p, ϖ, des fonds horiſontaux BSCR, KODM, des vaſes priſmatiques AB, AD, ſeroient ici en raiſon reciproque des longueurs AK, AC, de ces deux vaſes.

COROLLAIRE IV.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent Corol. 3. excepté que les baſes ou fonds horiſontaux BSCR (b), KODM (β), des vaſes priſmatiques AB, AD, ſoient ici égaux, quelles que ſoient les groſſeurs de ces priſmes. Outre AC=AE, $e=\epsilon$, $f=\phi$, comme dans le précedent Corollaire 3. l'on aura ici $b=\beta$; & en conſequence,

1°. L'équation C du nomb. 1. du Corol. 1. ſe changera ici en $p\times AC=\lambda\times AK$, d'où reſulte $p.\lambda::AK.AC$. Ce qui fait voir qu'en ce cas-ci les preſſions longitudinales p, λ, des fonds horiſontaux égaux BSCR, KODM, des vaſes priſmatiques AB, AD, de hauteurs égales AC, AE, ſe-

roient entr'elles en raiſon reciproque des longueurs AC, AK, de ces priſmes.

2°. L'équation D du nomb. 2. du même Corol. 1. ſe changera de même ici en $p \times \overline{AC}^2 = \varpi \times \overline{AK}^2$, d'où reſulte $p. \varpi :: \overline{AK}^2. \overline{AC}^2$. Ce qui fait auſſi voir qu'en ce cas-ci les preſſions verticales ou perpendiculaires p, ϖ, des fonds horiſontaux égaux BSCR, KODM, des vaſes priſmatiques AB, AD, de hauteurs égales AC, AE, & toujours remplis d'une même Liqueur quelconque, ſeroient pareillement ici en raiſon reciproque des quarrez des longueurs AC, AK, de ces deux priſmes.

COROLLAIRE V.

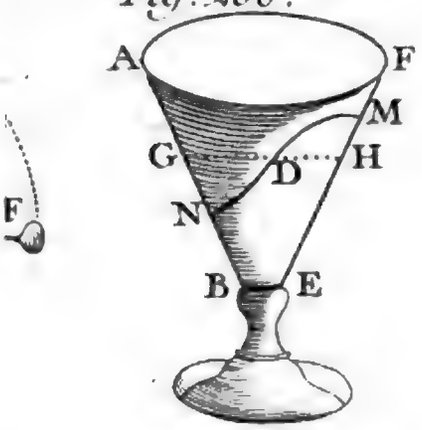
Suivant les précedens nomb. 1. 2. du Corol. 4. dans lequel AK eſt toujours plus grande que AC, ſi un vaſe priſmatique vertical AB, & un priſmatique AD arbitrairement incliné à l'horiſon ont des fonds horiſontaux égaux, & qu'ils ſoient remplis juſqu'à des hauteurs égales d'une même Liqueur quelconque; la preſſion tant longitudinale que verticale du fond du vaſe vertical, ſera toujours plus grande que la preſſion tant longitudinale que verticale du fond égal du vaſe incliné.

SCHOLIE.

Juſqu'ici les fonds des vaſes priſmatiques ont été ſuppoſez tous horiſontaux: voici preſentement pour de pareils vaſes de fonds arbitrairement inclinez a l'horiſon.

FIG. 195. I. Pour cela ſoit en general un vaſe cylindrique ou priſmatique ACDF de poſition quelconque ſur ſon fond AMFN de figure & de poſition auſſi quelconque; lequel vaſe, d'ouverture horiſontale CBDE, ſoit rempli de telle Liqueur qu'on voudra, juſqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra auſſi. Soit O le centre de gravité de la quantité AGHF de ce que le vaſe contient de cette Liqueur; du point O ſoit OS perpendiculaire en S au fond AMFN rencontré en R par OR parallele à la longueur

Fig.288.



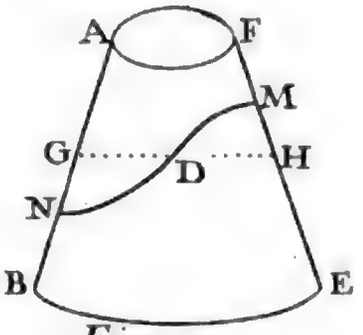
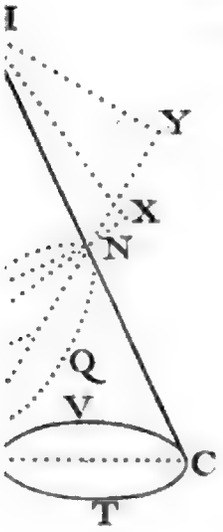


Fig.289.



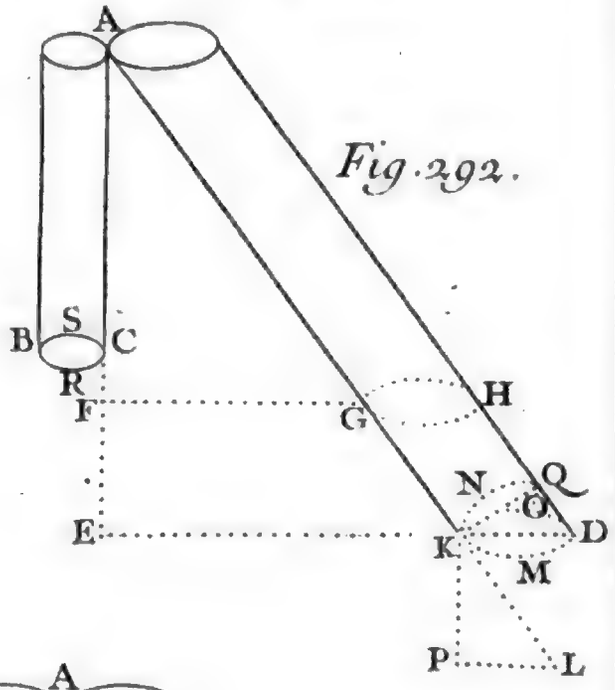


Fig.292.

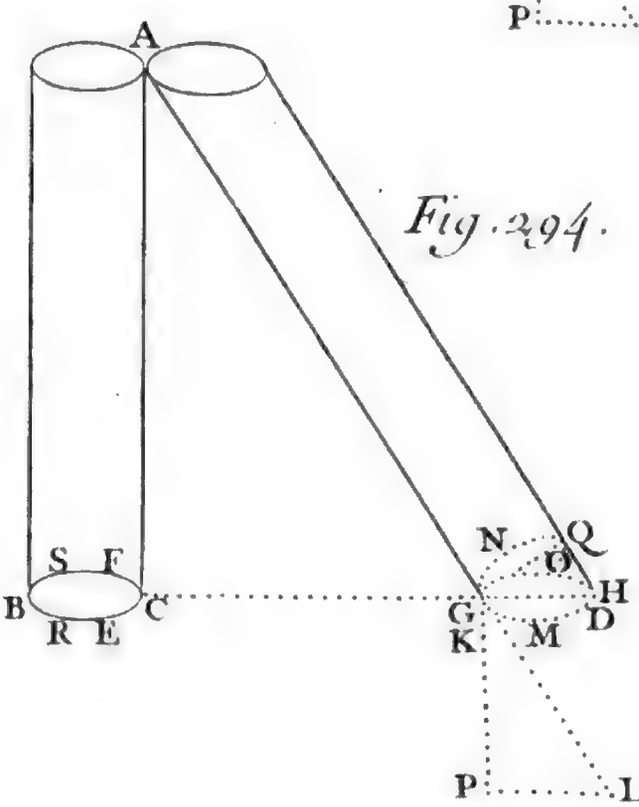


Fig.294.

Digitized by Google

ou à un des côtez du vaſe priſmatique ACDF que le plan ROS perpendiculaire au plan du fond AMFN, coupé en un quadrilatere de même nom ACDF, de deux côtez oppoſez CA, DF, paralleles entr'eux, d'un troiſiéme côté CD qui eſt horiſontal, & d'un quatriéme AF de poſition quelconque. De l'angle D de ce quadrilatere ACDF ſoit DF perpendiculaire en K ſur le fond AMFN prolongé, & conſequemment ſur la droite AF auſſi prolongée de ce côté-là; ce qui donnera le triangle rectangle DKF ſemblable au triangle OGR. Soient enfin les verticales OL, DZ, rencontrées en L, Z, par des plans perpendiculaires en R, F, aux paralleles OR, DF; ce qui rendra auſſi les triangles rectangles ORL, DFZ, ſemblables entr'eux. FIG. 295 & ſuivantes juſqu'à 302.

II. Cela poſé, puiſque (*art.* 1.) les angles ORL, OSR, ſont droits, & que la droite OL eſt verticale, le poids abſolu de la quantité AGHF de Liqueur (dont O eſt ſuppoſé être le centre de gravité, & AL la direction) eſt à la force dont il preſſe ſuivant OR le fond AMFN:: OL. OR. Et cette force ſuivant OR eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion à ce fond AMFN ſuivant ſa perpendiculaire OS :: OR. OS. Donc (en raiſon ordonnée) le poids abſolu de tout ce que le vaſe priſmatique ACDF contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire au fond AMFN:: OL. OS.

III. Or (*art.* 1.) les triangles ORL, DFZ, ſont ſemblables entr'eux, & auſſi entr eux les triangles OSR, DKF; ce qui donne OL. OR:: DZ. DF. Et OR. OS:: DF. DK. d'ou reſulte (en raiſon ordonnée) OL. OS:: DZ. DK. Donc (*art.* 2.) le poids abſolu de tout ce que le vaſe priſmatique ACDF contient de Liqueur juſqu'au niveau quelconque GH, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire au fond AMFN:: DZ. DK.

IV. Or en prenant T pour le ſinus total, & *ſ* pour la caracteriſtique des autres ſinus, ayant (*art.* 1.) les angles DFZ, DKF, droits; la Trigonometrie donnera par tout ici DZ. DF:: T. *ſ* DZF. Et DF. DK:: T. *ſ* DFK. Donc

(en multipliant par ordre) DZ. DK : T×T. ſDZF×ſDFK. Donc (*art.* 3.) le poids total & abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans le vaſe priſmatique ACDF, eſt à la preſſion ou force dont ce poids total preſſe perpendiculairement le fond AMFN de ce vaſe : : T×T. ſDZF×ſDFK : : T×T. ſDZF×ſDFA.

V. Si le quadrilatere ACDF eſt vertical, & qu'ainſi la verticale DZ ſoit dans le plan de ce quadrilatere dont le côté CD (*art.* 1.) horiſontal ſoit prolongé vers X, l'on aura l'angle ZDX droit en même plan que le droit DFZ; ce qui donnera pour lors les angles ZDF+FDX=ZDX =DFZ=ZDF+DZF, & conſequemment FDX=FDZ, ou ſFDX=ſFDZ. Donc (*art.* 4.) le poids total & abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans le vaſe priſmatique ACDF, eſt ici à la preſſion ou force dont ce poids total preſſe perpendiculairement le fond AMFN de ce vaſe (l'un & l'autre étant d'inclinaiſon quelconque à l'horiſon) : : T×T. ſFDX ×ſDFA. c'eſt-à-dire, comme le quarré du ſinus total T eſt au produit du ſinus de l'angle FDX d'inclinaiſon de ce vaſe priſmatique ACDF avec l'horiſon DX, multiplié par le ſinus de l'angle DFA d'inclinaiſon de ce vaſe ſur ſon fond AMFN.

VI. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent art. 5. ſi le vaſe priſmatique ACDF eſt également incliné entre ſon fond AMFN & ſon ouverture horiſontale CEDB, c'eſt-à-dire, ſi les angles FDX, DFK, qu'il fait avec eux ſont égaux entr'eux, ſoit que le fond AMFN ſoit auſſi horiſontal, comme dans la Fig. 297. ou non comme dans la Fig. 299. Ce cas rendant les angles FDX, DFK, égaux entr'eux, l'on aura ici ſFDX× ſDFA=ſDFK×ſDFK=ſFDA×ſDFA. Donc (*art.* 5.) le poids abſolu de tout le priſme oblique AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe ACDF, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire au fond horiſontal AMFN de ce vaſe priſmatique incliné : : T×T. ſDFK×ſDFK : : T×T. ſDFA×ſDFA. c'eſt-à-dire, comme le quarré du ſinus total

total T eſt ici au quarré du ſinus de l'angle DFR d'inclinaiſon de ce vaſe à l'horiſon.

VII. Si ce vaſe priſmatique ACDF eſt droit ou perpendiculaire à ſon fond horiſontal AMFN, comme dans la Fig. 298. Ce cas rendant droit ſon angle DFA d'inclinaiſon ſur ce fond horiſontal AMFN, on aura ici ſDFA=T. Donc (*art.* 6.) le poids abſolu de tout le priſme droit AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe ACDF, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire au fond horiſontal AMFN de ce vaſe priſmatique droit :: T×T. T×T. c'eſt-à-dire, que ce poids abſolu eſt ici égal à ce qu'il cauſe de preſſion perpendiculaire au fond horiſontal AMFN de ce vaſe priſmatique droit ou perpendiculaire à l'horiſon.

VIII. Si le vaſe priſmatique ACDF eſt incliné de quelque maniere que ce ſoit à l'horiſon, & qu'il ait ſon fond AMFN perpendiculaire à ſa longueur CA ou DF, comme dans la Fig. 299. ce cas rendant encore ici droit l'angle DFA, l'on y aura encore ſDFA=T. Donc (*art.* 5.) le poids abſolu de toute la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe priſmatique incliné ACDF, perpendiculaire à ſon fond AMFN, eſt ce que tout ce poids cauſe de preſſion perpendiculaire à ce fond :: T×T. T×ſFDX :: T. ſFDX (ſoit CV perpendiculaire en V ſur FD) :: ſDVC. ſVDC :: DC. CV :: DC. AF (*Corol. du Lem.* 19.) :: CEDB. AMFN :: GH. AMFN. c'eſt-à-dire, comme la ſurface ſuperieure GH de la Liqueur eſt à l'inferieure ou au fond AMFN.

IX. Si le vaſe priſmatique ACDF eſt vertical, & qu'il ait ſon fond AMFN arbitrairement incliné à l'horiſon, comme dans la Fig. 300. ce cas rendant droit l'angle FDX, l'on aura ici ſFDX=T. Donc (*art.* 5.) le poids total & abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe juſqu'au niveau GH, eſt à la preſſion ou force dont ce poids total preſſe perpendiculairement le fond incliné AMFN de ce vaſe vertical ACDF :: T×T. T×ſDFA :: T. ſDFA (à cauſe des paralleles CA, DA)

:: T. ſCAF (ſoit FP perpendiculaire en P ſur CA) :: ſAPF. ſPAF :: AF. PF :: AF. CD (*Corol. du Lem.* 19.) :: AMFN. CEDB :: AMFN. GH. c'eſt-à-dire, comme le fond ou la ſurface inferieure AMFN de la Liqueur eſt à ſa ſurface ſuperieure GH.

X. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent art. 9. ſi le fond AMFN du vaſe priſmatique vertical ACDF eſt incliné de 60 degrez à l'horiſon, ou (ce qui revient au même) ſi l'angle DFK ou CAF d'inclinaiſon de ce vaſe ſur ce fond, eſt de 30 degrez, l'on aura ici AF=2×PF=2×CD ; & conſequemment (*Corol. du Lem.* 19.) ce fond ou ſon aire AMFN=2×CEDB=2×GH. Ainſi venant de trouver (*art.* 9.) que le poids total & abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe priſmatique vertical ACDF, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire ſur ſon fond AMFN d'inclinaiſon quelconque avec lui :: AMFN. GH. l'on aura ici ce poids abſolu à cette preſſion perpendiculaire :: 2×GH. GH :: 2. 1. c'eſt-à-dire, que ce poids abſolu ſera ici double de cette preſſion perpendiculaire du fond AMFN.

Fig. 199. XI. Toutes choſes étant auſſi les mêmes que dans l'art. 8. ſi le vaſe priſmatique ACDF du fond AMFN perpendiculaire à ſa longueur CA, DF, eſt incliné de 30 degrez à l'horiſon ; & qu'ainſi l'angle VDC ſoit de 30 degrez, l'on aura ici CD=2×CV=2×AF ; & conſequemment (*Corol. du Lem.* 19.) l'aire CEDB ou ſa parallele GH=2×AMFN. Or ſuivant l'art. 8. de quelqu'angle que le vaſe priſmatique ACDF de fond AMFN perpendiculaire à ſa longueur CA, DF, ſoit incliné à l'horiſon ; le poids abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire à ſon fond AMFN :: GH. AMFN. Donc en ce cas-ci de ce vaſe priſmatique ACDF incliné de 30 degrez ſur l'horiſon, le poids abſolu de tout ce qu'il contient de Liqueur juſqu'au niveau quelconque GH, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire

au fond AMFN de ce vaſe : : 2×AMFN. AMFN : : 2. 1. c'eſt-à-dire, comme dans le précedent art. 10. que ce poids abſolu ſera encore ici comme là double de cette preſſion perpendiculaire du fonds AMFN.

REMARQUE.

Ce qu'on voit dans le précedent Th. 41. dans ſes Corollaires, & dans ſon Scholie, ſeroit ce qui arriveroit ſi l'on ne conſideroit, comme l'on a fait juſqu'ici, que l'action ſeule de la peſanteur, & les colonnes de Liqueurs compriſes dans les tuyaux ou vaſes priſmatiques, que comme des corps ſolides ſoûtenus ſur des plans inclinez par les fonds de ces vaſes ou tuyaux, ſuivant les longueurs deſquelles ces corps ne preſſent ou chargent ces fonds ou baſes que de ce que leurs peſanteurs leur donnent de forces ſuivant ces longueurs de ces mêmes tuyaux. Mais ſi l'on conſidere (*Schol. de l'Ax. 9.*) que la fluidité de ces colonnes de Liqueurs donne aux particules de chacune une égale facilité à être également preſſée en tous ſens, de la force entiere de la peſanteur ou du poids de ce qu'il y en a d'autres qui les chargent ; on verra dans la ſuite que ces colonnes cylindriques ou priſmatiques de Liqueurs ſoûtenues ſur les fonds de leurs tuyaux inclinez, ou non, y doivent toûjours preſſer ou charger chacune chacun de ces fonds, comme feroit le poids entier de cette colonne totalement ſoûtenu ſur ce fond : en voici la preuve dans le ſuivant Th. 42. & dans les autres, où l'on conſiderera ainſi les Liqueurs comme peſantes & comme fluides tout à la fois, & dans des vaſes de figures quelconques.

THEOREME XLII.

Soit un tuyau cylindrique ou priſmatique quelconque AKDX arbitrairement incliné ſuivant le plan vertical AKI ſur ſon fond horiſontal KBDC de figure quelconque, & rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra, dont on conſidere preſentement la fluidité. Je Fig. 30.

dis que cette fluidité jointe à la peſanteur de ce que le tuyau incliné AKDX contient de cette Liqueur, lui fera preſſer de tout ſon poids abſolu le fond horiſontal KBDC de ce tuyau, c'eſt-à-dire, d'une force verticale préciſément égale à celle dont ce fond ſeroit preſſé par un priſme droit ou vertical KYZD de la même Liqueur qui auroit ce fond pour baſe horiſontale, & dont la hauteur ſeroit égale à celle KY du niveau GH de ce que le tuyau incliné AKDX en contient au-deſſus de ce fond horiſontal KBDC.

DEMONSTRATION.

Soit AKI l'angle quelconque d'inclinaiſon du tuyau propoſé AKDX ſur ce fond horiſontal KBDC ; & le parallelogramme de même nom AKDX, la ſection de ce tuyau coupé par le plan vertical AKI prolongé, lequel en rencontre la baſe ou le fond en la droite KD. Imaginons preſentement la Liqueur contenue dans ce tuyau incliné AKDX, comme diviſée en un nombre preſqu'infini de filets verticaux OM, RT, ſeparément mobiles, ainſi que la fluidité le permet ; deſquels les premiers OM ſoient empêchez en autant de points M par le côté inferieur AK de ce tuyau, de deſcendre ſuivant leurs directions ; & dont les autres RT ſoient auſſi empêchez en autant de points T par le côté ſuperieur oppoſé XD de ce tuyau, de monter juſqu'en S au niveau GH de la Liqueur qu'il contient. De deux points oppoſez M, T, pris ſur une même horiſontale MT, ſoient imaginées MN, TV, perpendiculaires à ces côtez oppoſez paralleles AK, XD, du tuyau incliné AKDX ; leſquelles de longueurs arbitraires, ſoient les diagonales de deux parallelogrammes rectangles EF, PQ, de côtez verticaux ME, TQ, pris ſur les filets MO, TR, & d'horiſontaux MF, TP, pris ſur l'horiſontale MT.

Cela poſé, il eſt manifeſte que les réſiſtances que les côtez oppoſez AK, XD, du tuyau incliné AKDX font en M, T, à la deſcente verticale de OM filet de Liqueur, & à l'aſcenſion verticale de l'autre filet RT que les plus longs que lui tendent à faire monter en S juſqu'à leur niveau

GH prolongé vers Z : que ces réſiſtances que ces côtez oppoſez AK, XD, font aux filets OM, RT, ſont ſuivant MN, TV, égales à des forces qui les ſuppléeroient en repouſſant ſeulement comme eux ſuivant ces directions les points M, T, de ces filets OM, RT, de Liqueur ; & qu'ainſi chacune de ces réſiſtances ſe décompoſe comme en deux forces purement paſſives, ſuivant MF, ME, & TP, TQ, dont chacune des horiſontales ſuivant MF, TP, ſoûtient par ſon invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire à cette réſiſtance horiſontale. Quant aux autres forces ſuivant les verticales ME, TQ, reſultantes de ces réſiſtances ſuivant MN, TV, des côtez oppoſez AK, DX, de ce tuyau incliné AKDX;

1°. Il eſt pareillement viſible que la premiere ſuivant ME directement oppoſée au poids du filet OM, le ſoûtient en M dans le repos que lui exige le ſuppoſé de ce qu'il y a de Liqueur dans le tuyau incliné AKDX, ſans lui laiſſer aucune action ſur le fond KBDC de ce tuyau, lequel conſequemment n'en eſt aucunement chargé. La même choſe ſe démontrera de même de chacun de tous les autres filets verticaux OM de ce qu'il y a de Liqueur dans l'eſpace GKY ſur le côté inferieur AK du tuyau incliné AKDX, dont il exprime tout ce qu'il a de ſurface concave de ce côté là autour du cylindre droit KYZD. Donc cette quantité GKY de Liqueur compriſe entre ce cylindre droit & cette portion de ſurface inferieure du tuyau incliné AKDX, ſe trouvant ainſi ſoûtenue toute entiere ſur cette même portion oblique AK de ſurface ; rien de cette quantité GKY de Liqueur n'agit ou ne peſe ſur le fond KBCD de ce tuyau incliné AKDX.

2°. Mais en recompenſe ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'eſpace HLD compris entre le plan HL perpendiculaire à la droite KD, & ce que ce plan retranche du côté de HD de la ſurface ſuperieure de ce tuyau incliné AKDX, preſſe ce fond horiſontal KBDC d'une force égale à celle dont il ſeroit preſſé par la portion cylindrique HLDZ, que ce même plan HL retranche du cylin-

dre droit KYZD de la même Liqueur ; car la force ſuivant TQ, reſultante de la réſiſtance que le côté ſupérieur XD du tuyau incliné AKDX, fait ſuivant ſa perpendiculaire TV, à l'aſcenſion du filet vertical RT de Liqueur, ſe trouvant directement oppoſée à l'effort dont le poids du ſurplus de longueur des plus longs tend à le faire monter juſqu'au point S de leur niveau GH, & empêchant cet effet, eſt égale à cet effort ſuivant RT, auquel par la même raiſon le poids d'une portion ST de la même Liqueur ſeroit auſſi égal. Donc la force de réſiſtance avec laquelle le côté oblique XD du tuyau incliné AKDX, repouſſe le filet vertical TR ſuivant ſa direction, eſt égale au poids d'une portion ST de cette Liqueur. Par conſequent le poids de ce filet TR, ainſi repouſſé ſuivant TQ, fait le même effort en ce ſens ſur le fond vertical KBDC du tuyau incliné AKDX, qu'y feroit ce même poids du filet TR augmenté du poids de ST, c'eſt-à-dire, le même effort qu'y feroit le poids d'un filet vertical entier SR de la même Liqueur. La même choſe ſe démontrera de même de chacun de tous les autres filets verticaux TR de ce qu'il y a de Liqueur dans l'eſpace HLD, retenus ou empêchez de monter par le côté ſuperieur XD du tuyau incliné AKDX, dont il exprime tout ce qu'il y a de ſurface retranchée de ce côté-là par le plan vertical HL perpendiculaire à la droite KD. Donc cette portion HLD de Liqueur compriſe entre ce plan vertical HL & cette portion de ſurface qu'il retranche de celle du tuyau incliné AKDX, charge ou preſſe verticalement le fond horiſontal KBDC d'une force égale à celle dont ce fond ſeroit preſſé en ce ſens par le poids de la portion cylindrique HLDZ, que le plan HL retranche du cylindre droit KYDZ de la même Liqueur.

Donc ce fond horiſontal KBDC étant outre cela preſſé verticalement par tout le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'eſpace AYHL commun à ce cylindre droit KYZD, & au tuyau incliné AKDX, & ne l'étant aucunement (*nomb.* 1.) par ce qu'il y en a dans l'eſpace GYK

compris de ce côté-là entre ce tuyau oblique & ce cylindre droit ; il ſuit de ce nomb. 2. que ce fond horiſontal KBDC eſt verticalement preſſé par tout ce que le tuyau incliné AKDZ contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, d'une force préciſément égale à celle dont il ſeroit preſſé par un cylindre vertical de même Liqueur, implanté ſur ce fond horiſontal KBDC, qui en fût la baſe, & de même hauteur que celle KY de ce niveau GH au-deſſus de ce fond ; & conſequemment d'une force égale au poids du cylindre oblique KGHD de ce qu'il y a de Liqueur contenue dans le tuyau incliné AKDY ; puiſque le cylindre vertical AYZD preſſeroit ce fond horiſontal KBDC de tout ſon poids, qui eſt égal à celui de l'oblique KGHD (*Hyp.*) de même Liqueur que ce vertical AYZD, ces deux cylindres (*Hyp.*) de même baſe & de même hauteur, étant égaux entr'eux. *C'eſt tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puiſque ſuivant cela les cylindres KGHD de Liqueurs quelconques contenues dans des tuyaux AKDX d'inclinaiſons quelconques AKI ſur leurs baſes ou fonds horiſontaux quelconques ABDC, preſſent chacun de tout ſon poids abſolu le fond du ſien ; il ſuit que les preſſions ou forces avec leſquelles ces cylindres de Liqueurs quelconques preſſeront verticalement les fonds horiſontaux de leurs tuyaux inclinez à volonté ſur ces fonds, ſeront entr'elles comme les poids abſolus de ces cylindres de Liqueurs, c'eſt-à-dire, de ce qu'en contiennent leurs tuyaux.

COROLLAIRE II.

Donc lorſque ces tuyaux inclinez à volonté ont des baſes ou fonds horiſontaux égaux quelconques, & ſont remplis tous d'une même Liqueur quelconque juſqu'à des hauteurs égales quelconques au-deſſus de ces fonds ; les cylindres de ce qu'ils contiendront tous de cette mê-

me Liqueur, ſe trouvant tous alors de poids égaux, les preſſions verticales qui en reſulteront aux fonds horiſontaux de leurs tuyaux, ſeront auſſi pour lors toutes égales entr'elles, & chacune égale à chacun de ces poids égaux.

SCHOLIE.

I. Le preſent Th. 42. peut être encore démontré autrement que ci-deſſus, en imaginant un tuyau vertical λGZD de fond horiſontal λD, & rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'au niveau GZ. Dans ce tuyau vertical imaginons qu'il s'en forme un autre incliné KGHD de baſe ou fond KBDC (que j'appellerai ſimplement KD, pour l'uniformité des expreſſions) portion de l'horiſontale λD, lequel ſans aucun mouvement de la Liqueur du premier en intercepte une quantité qui le rempliſſe juſqu'au même niveau GH, & qui ne laiſſe de cette Liqueur au-dehors de lui que ce que les portions KGL, HDZ en expriment entre ces deux tuyaux λGZD, KGHD, deſquelles les portions de ſurface de l'incliné KGHD exprimées par ſes côtez obliques GK, HD, rompent la communication avec ce qu'il contient de cette Liqueur. Cela imaginé ou ſuppoſé,

1°. Il eſt viſible que le côté ſolide & ferme GK du tuyau incliné KGHD traverſant en M le filet vertical O*m* de la Liqueur contenue dans le tuyau vertical λGZD, en ſoûtient dans l'oblique KGHD la partie OM comme ſon autre partie M*m* la ſoûtenoit dans le vertical λGZD, ſans lui laiſſer ici non plus que là aucune action contre le fond KD; & ainſi de tous les autres filets OM de Liqueur, appuyez de même en autant de points M ſur la portion de ſurface du tuyau incliné KGMD exprimée par ſon côté inferieur GK. Par conſequent ce qu'il y a de cette Liqueur ainſi ſoûtenue ſur GK dans la portion GKY de l'eſpace cylindrique vertical λGYK, comme elle l'étoit avant la ſuppoſition du tuyau incliné KGHD, dans le vertical λGZD ſur ce qu'il y a de la même Liqueur dans le reſte KGλ de ce cylindre λGYK, ne preſſera non plus

ce

ce fond KD dans le tuyau incliné KGHD, que ce cylindre de Liqueur λGYK le preſſoit libre dans le tuyau vertical λGZD, dont il ne preſſoit le fond λD qu'en λK.

2°. Un pareil raiſonnement fera voir que le côté ſolide & ferme HD du tuyau incliné KGHD, traverſant en T le filet vertical SR de la Liqueur contenue dans le tuyau vertical λGZD, en retient la partie TR en même ſujettion & en même action ou preſſion contre le fond KD dans le tuyau incliné KGHD, que celle que ſa partie retranchée ST par le côté HD de ce tuyau incliné, lui cauſoit contre le fond λD dans le tuyau vertical λGZD avant l'intervention de ce côté HD de l'incliné; puiſque cette intervention ſurvenue ici par une formation ſubite de ce tuyau incliné KGHD, comme s'il n'étoit fait que d'une ſurface cylindrique de la Liqueur glacée là, & fluide dans tout le reſte, s'eſt ici faite ſans aucun mouvement, & qu'il faudroit qu'il y en eût eu quelqu'un pour que la preſſion que le filet SR libre avant cette intervention dans le tuyau vertical λGZD, cauſoit en R à ſon fond λD, eût varié par cette intervention dans le tuyau incliné KGHD, dont le fond KD, où ſe trouve ce point R, n'eſt (*Hyp.*) qu'une portion de celui-là. Donc cette partie TR du filet vertical SR de Liqueur, ainſi retenue par le côté HD du tuyau incliné KGHD en même action ou preſſion contre le fond KD, qui l'y retenoit libre dans le tuyau vertical λGZD le poids de ſa partie retranchée ST alors joint à celui de cette autre TR, preſſera ce fond KD en R d'une force verticale égale à celle dont y étoit preſſé le fond λD par le poids entier du filet total SR, lorſque ce filet étoit libre dans le tuyau vertical λGZD; & ainſi de tous les autres filets verticaux TR de la même Liqueur, retenus de même en preſſion contre le fond KD par la portion de ſurface du tuyau incliné KGHD, exprimée par ſon côté ſuperieur HD. Par conſequent ce qu'il y a de cette Liqueur dans la portion DHL de l'eſpace cylindrique vertical LHZD, qu'on voit ainſi être autant preſſée par HD contre le fond KD, qu'elle l'étoit

contre cette partie du fond KL avant la ſuppoſition du tuyau incliné KGHD dans le vertical λGZD, par le reſte HDZ de ce cylindre LHZD de la même Liqueur, preſſera ce fond KD du tuyau incliné KGHD d'une force égale à celle dont cette portion KD du fond horiſontal λD du tuyau vertical λGZD, étoit preſſée par la portion cylindrique LHZD de ce que ce tuyau vertical contenoit de cette Liqueur.

II. Supprimons preſentement ce tuyau vertical λGDZ, en ſorte qu'il ne reſte plus ici que l'incliné KGHD ou AKDX rempli de la même Liqueur quelconque juſqu'au niveau GH. Le nomb. 1. faiſant voir que le fond horiſontal KD de ce tuyau incliné n'eſt aucunement preſſé par ce qu'il contient de cette Liqueur dans l'eſpace GKY; & le nomb. 2. faiſant voir au contraire que ce fond KD eſt preciſement autant preſſé par ce qu'il y a de cette Liqueur dans la partie LHD de ce tuyau AKDX, qu'il le ſeroit par le poids entier d'un cylindre vertical LHZD de la même Liqueur : ſi à cette preſſion verticale l'on ajoûte celle que cauſe ſur ce fond KD le poids qu'il y a de cette Liqueur dans le reſte LHYK du cylindre vertical KYZD; on verra encore ici que ce qu'il y en a dans le tuyau incliné AKDX juſqu'au niveau quelconque GH, en preſſe le fond horiſontal KD d'une force verticale preciſement égale à celle dont il ſeroit preſſé en ce ſens par le poids entier d'un cylindre vertical KYZD de la même Liqueur, qui auroit ce fond KD pour baſe horiſontale, & pour hauteur celle KY du niveau GH de cette Liqueur dans ce tuyau incliné AKDX : de ſorte que le cylindre oblique KGHD (*Hyp.*) de même Liqueur, de même baſe, de même hauteur, & conſequemment de même poids que ce vertical KYZD preſſe auſſi de tout ſon poids le même fond horiſontal KD du tuyau incliné AKDX dans lequel il ſe trouve. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Digitized by Google

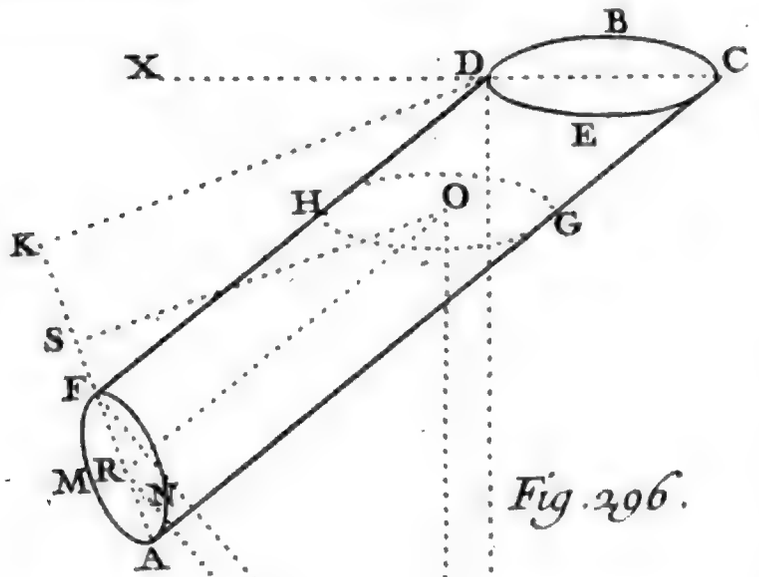
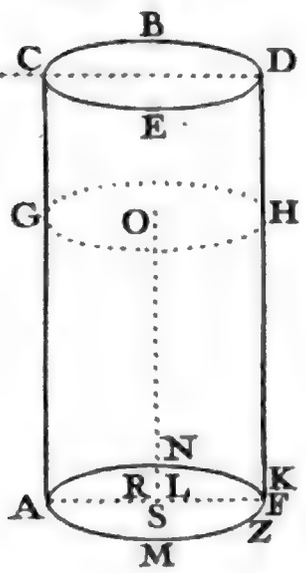


Fig. 296.

Fig. 298.



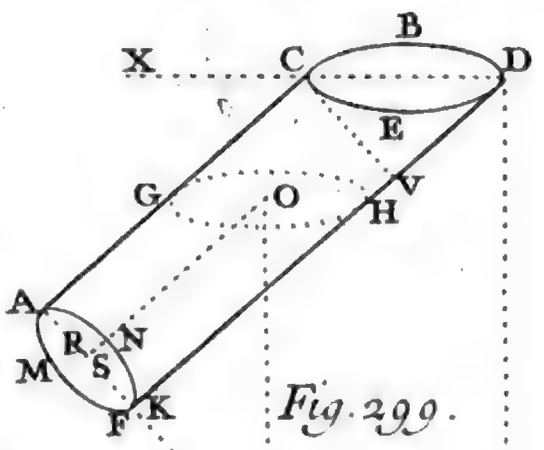


Fig. 299.

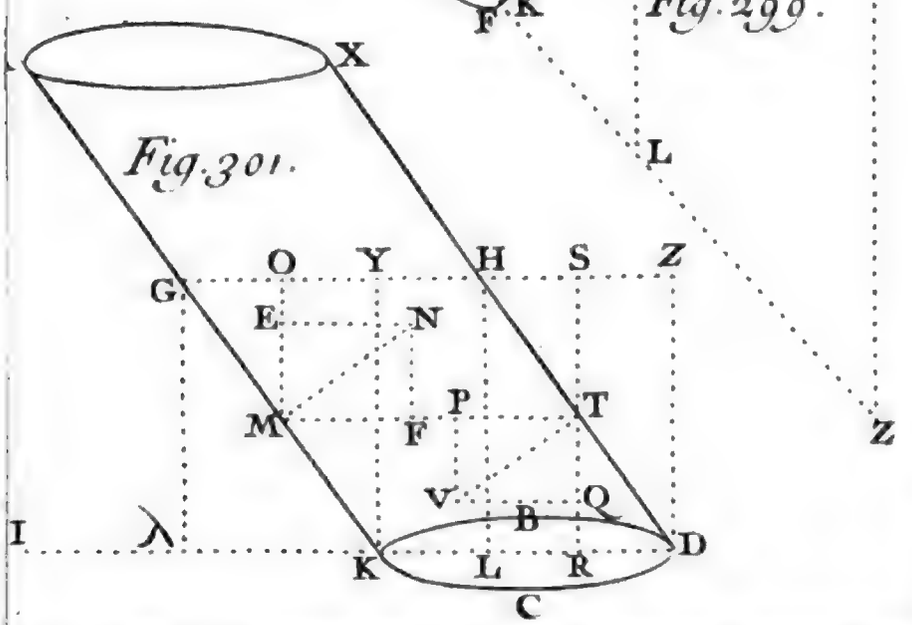


Fig. 301.

THEOREME XLIII.

Soit un vaſe ABCDEF plus large en haut où il ſoit ouvert, qu'en bas où il ſoit rétreci en BCDE, & terminé par un fond horiſontal moindre à volonté que ſon ouverture AF. Soit ce vaſe rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'au niveau ou plan horiſontal GH. Je dis que de toute la Liqueur dont on ſuppoſe le vaſe rempli juſqu'à ce niveau GH, la colonne verticale CYZD, qui aura le fond horiſontal CD pour baſe, ſera la ſeule qui peſe ou faſſe effort ſur ce fond, & qu'elle le preſſera de tout ſon poids.

DEMONSTRATION.

Imaginons encore ici la Liqueur du vaſe ABCDEF comme diviſée en pluſieurs filets verticaux RK, YC, CD, &c. à niveau en GH, dont ces égaux-ci YC, CD, aillent juſqu'au fond CD du vaſe, avec ceux qui ſont entr'eux, & dont les autres RK, plus courts que ceux-là, rencontrent les côtez obliques BC, DE, &c. de ce vaſe. Au point K, où chacun de ces filets RK rencontrent un de ces côtez obliques, par exemple, BC, ſoit BL perpendiculaire à ce côté BC; laquelle de longueur quelconque ſoit la diagonale d'un parallelogramme rectangle MN, dont un côté KN ſoit ſur le filet vertical RK, & l'autre KM horiſontal. FIG. 302.

Cela conçû, il eſt viſible (comme dans la démonſtr. du Th. 42.) que la reſiſtance que le côté BC fait en K à la deſcente de ce filet RK de Liqueur, en ſuivant KL, eſt égale à une force qui la ſuppléeroit en repouſſant comme lui ſuivant KL le bout K de ce filet; & qu'ainſi cette reſiſtance que le côté BC lui fait ſuivant KL, ſe décompoſe comme en deux forces purement paſſives ſuivant KM, KN, dont la premiere ſuivant KM ſoûtient par ſon invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire ſuivant MK, reſultante de ce que la fluidité permet (*art. 3. du Schol. de l'Ax. 9.*) aux filets collateraux d'en FIG. 303.

avoir en tous ſens ; & dont la ſeconde ſuivant KN de bas en haut, ſoûtient (comme dans le nomb. 2. du Th. 42.) l'effort directement contraire de haut en bas, dont la peſanteur du filet vertical RK tend à le faire deſcendre ſuivant cette direction : de ſorte que cet effort de peſanteur, qui eſt tout ce que ce filet RK en a pour deſcendre, étant ainſi ſoûtenu, ce filet doit être ici retenu en K ſur BC, comme ſur un plan incliné, ainſi qu'y demeureroit un poids égal au ſien, repouſſé comme lui ſuivant MK.

Cela ſe démontrera de même de tous les autres filets verticaux RK rencontrez en K par les côtez obliques du vaſe. Donc de toute la Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans ce vaſe ABCDEF retreci par en bas, il n'y a que le ſeul cylindre vertical YCDZ implanté ſur le fond horiſontal CD, qui le preſſe ; & comme il eſt vertical ſans être appuyé ſur ou contre aucun des côtez du vaſe, c'eſt de tout ſon poids qu'il preſſe ce fond CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

A l'imitation du Scholie du Th. 42. imaginons pour un moment que la colonne cylindrique verticale YCDZ de Liqueur, qui a pour baſe le fond horiſontal CD du vaſe ABCDEF plus étroit là qu'ailleurs, eſt dans un tuyau cylindrique de cette baſe horiſontale CD, entouré de tout ce qu'il y a de Liqueur autour de ce cylindre vertical YCDZ dans ce vaſe qu'on en ſuppoſe rempli juſqu'au niveau GH. Il eſt manifeſte que les côtez fermes & ſolides YC, ZD, de ce tuyau vertical YCDZ ſoûtiendront entr'eux & les côtez du vaſe ABCDEF tout ce qu'il aura de Liqueur autour de ce même tuyau vertical, & qu'ils empêcheront cette Liqueur exterieure par rapport à lui, d'entrer dans la colonne YCDZ de ce qu'il en contient, en reſiſtant ſuivant leurs perpendiculaires, c'eſt-à-dire, horiſontalement à tout ce que cette Liqueur exterieure pourroit faire d'effort pour cela, & pour preſſer en

Digitized by Google

conſequence le fond horiſontal CD du vaſe ABCDEF, lequel dans la preſente hypotheſe eſt le fond du tuyau YCDZ ſuppoſé dans ce vaſe.

Or ſi l'on imagine toute la Liqueur dont ce vaſe & ce tuyau ſont remplis juſqu'au niveau GH, comme diviſées en pluſieurs couches horiſontales, telles que KT; on verra, en concevant ce tuyau YCDZ n'y être plus, les particules M de la Liqueur de chacune de ces couches horiſontales KT, appuyées contre les côtez du vaſe ABCDEF par la médiation de tout ce qu'il y en a dans cette couche juſqu'à ces côtez de ce vaſe, ſe faire mutuellement des reſiſtances égales ſuivant le plan de cette couche; & conſequemment on verra ce que le cylindre YCDZ a de ces particules dans cette même couche, empêcher ce qu'elle en a au dehors de lui, d'entrer dans ce cylindre en les repouſſant du centre à la circonference, comme faiſoient les côtez ſolides du tuyau retranché: outre que quand il y en entreroit quelqu'une, ce ne ſeroit qu'à la place d'une autre qui en ſortiroit; ce qui revient au même.

La même choſe, & pour la même raiſon, devant arriver depuis le fond CD juſqu'au niveau GH à toutes les autres couches horiſontales de la Liqueur contenue dans le vaſe ABCDEF juſqu'à ce niveau GH; on voit que la colonne cylindrique verticale YCDZ de cette Liqueur y retient appuyé ſur ou contre les côtez de ce vaſe, ce qu'il contient de cette Liqueur autour de cette colonne verticale, comme l'y retenoient les côtez fermes & ſolides du tuyau retranché, dans lequel cette colonne a été ſuppoſée d'abord. Donc de tout ce qu'il y a de Liqueur juſqu'au niveau GH dans le vaſe ABCDEF, cette colonne verticale cylindrique YCDZ implantée ſur le fond horiſontal CD de ce vaſe plus étroit là qu'ailleurs non ſeulement eſt ici comme dans ce tuyau de même nom YCDZ, tout ce qui preſſe ce fond CD, mais encore le preſſe ici comme là de tout ſon poids abſolu. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig.304. Pour la verité de ce Th. 43. il n'eſt pas neceſſaire que le vaſe ABCDEF ſoit plus étroit en ſon fond horiſontal CD que par tout ailleurs, ni que les filets verticaux du cylindre vertical CYZD ſuppoſé de Liqueur la même quelconque, & de même hauteur que celle dont on ſuppoſe ce vaſe rempli juſqu'au niveau GH, ne rencontrent aucun des côtez de ce vaſe: il ſuffit que ce vaſe aille en s'élargiſſant depuis ſon fond horiſontal CD juſqu'à telle hauteur qu'on voudra, quelle que ſoit ſon ouverture ſuperieure AF. Car,

1°. Si quelques-uns, ou tous les filets verticaux de la Liqueur dont on ſuppoſe ce cylindre vertical CYZD, rencontrent quelque côté EF du vaſe comme les filets verticaux CG, RK, DL, ſont en G, K, L; on démontrera, comme dans le nomb. 2. de la démonſtr. du Th. 42. que chacun de ces filets verticaux, par exemple, RK, qui rencontre en K ce côté EF, qui l'empêche de monter juſqu'en S au niveau GH prolongé vers Z, eſt repouſſé vers R ſuivant KR par la reſiſtance de ce côté EF, d'une force, qui jointe au poids de ce filet KR, preſſe préciſément autant le fond CD du vaſe, que le preſſeroit un filet libre SR de la même Liqueur. La même choſe ſe démontrera de tous les autres filets verticaux KR de la Liqueur du vaſe ABCDEF, compris entre les extrêmes GC, LD, ſur le fond horiſontal CD de ce vaſe: ſçavoir, que ſon côté EF, que ſes extrêmes rencontrent auſſi en G, L, comme tous ces filets KR en K, les empêchant tous de s'élever juſqu'en YZ au niveau GH de la Liqueur que ce vaſe contient, les repouſſe tous verticalement vers ce fond horiſontal CD avec des forces qui jointes à leurs peſanteurs, les fait preſſer tous enſemble ce fond auſſi fortement que le preſſeroit un cylindre vertical CYZD de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horiſontal CD pour baſe, & pour hauteur celle CY du niveau GH de ce que ce vaſe ABCDEF contient de cette Liqueur.

2°. Quant aux autres filets de la même Liqueur, qui autour de la partie CGLD de ce cylindre CYZD, rencontrent en GH, LE, le même côté EF qui les empêche auſſi de s'élever juſqu'à ce niveau GH; ce côté EF du vaſe ABCDEF les repouſſe de même tous verticalement en bas contre les côtez BC, DE, qui les ſoutiennent comme dans les démonſtrations du preſent Th. 43. ſans leur laiſſer aucune action contre le fond horiſontal CD, contre lequel, par la même raiſon la partie GM du côté BC n'en laiſſe de même à ce que le vaſe a de Liqueur de plus dans l'eſpace GHM terminé par la ſurface verticale HM.

Donc le fond horiſontal CD, où ce vaſe ABCDEF eſt plus étroit que juſqu'à telle hauteur qu'on voudra au-deſſus de ce fond, n'eſt ici preſſé que par la colonne cylindrique verticale CGLD de la Liqueur contenue dans ce vaſe juſqu'au niveau GH; & que cette colonne verticale preſſe ce fond horiſontal CD d'une force égale à celle dont il ſeroit preſſé par un cylindre vertical CYZD de pareille Liqueur, lequel eût ce fond horiſontal CM pour baſe, & pour hauteur celle CY du niveau GH de ce que le vaſe ſuppoſé ABCDEF contient de cette Liqueur: le tout conformement au preſent Th. 43.

COROLLAIRE II.

Suivant ce Corol. 1. & le preſent Th. 43. le fond horiſontal CD d'un vaſe quelconque ABCDEF rétreci en ce fond, n'étant preſſé par tout ce que ce vaſe contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, que comme il le ſeroit par un cylindre vertical CYZD de cette Liqueur, lequel le preſſeroit de tout ſon poids abſolu; & (*Th.* 42. *Corol.* 2.) de même force verticale que celle dont le preſſeroit un cylindre d'obliquité quelconque de même Liqueur à même hauteur dans un tuyau incliné CY à volonté, lequel auroit ce fond horiſontal pour le ſien; il ſuit de là que ce que le vaſe ABCDEF rétreci en ce fond horiſontal CD, contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, Fig. 302. 303. 304.

ne preſſe ce fond CD que de la force dont ce même fond ſeroit preſſé par un cylindre quelconque de la même Liqueur à même hauteur CY dans un tuyau vertical ou incliné à volonté, lequel auroit ce fond horiſontal CD pour le ſien. D'où l'on voit que les preſſions verticales ou perpendiculaires de ce fond horiſontal CD par une même Liqueur quelconque à differentes hauteurs dans un vaſe quelconque rétreci en ce fond, ſont toûjours entre-elles comme les produits de ces hauteurs multipliées chacune par ce fond ; & conſequemment en raiſon de ces ſeules hauteurs.

THEOREME XLIV.

FIG. 305. 306. 307.

Renverſons le vaſe ABCDEF du précedent Th. 43. *en ſorte qu'il devienne plus large en bas, où il ſoit fermé par un fond horiſontal AF, qu'en haut, où il ſoit retreci en BCDE, & terminé par une ouverture CD moindre à volonté que la baſe ou fond AF. Soit ce vaſe rempli d'une Liqueur auſſi quelconque juſqu'au niveau ou plan horiſontal GH qui paſſe par ſon rétreciſſement. Je dis preſentement que la force dont ce fond AF ſera preſſé par le poids de la Liqueur dont on le ſuppoſe chargé juſqu'en GH, ſera égale à celle dont il ſeroit preſſé par le poids de tout ce qu'un vaſe cylindrique vertical AYZF de même baſe ou fond horiſontal AF pourroit contenir de cette Liqueur juſqu'à ce niveau GH ou YZ.*

DEMONSTRATION.

Soit la Liqueur du vaſe ABCDEF conçûe comme diviſée en pluſieurs filets verticaux KR, PQ, dont ceux-ci PQ atteignent juſqu'au niveau GH de cette Liqueur, & dont les autres KR ſoient empêchez d'y arriver par les côtez obliques BC, DE, &c. du vaſe. Au point K où chaque filet KR rencontre un de ces côtez obliques, par exemple, BC, ſoit KL perpendiculaire à ce côté BC ; laquelle KL de longueur à volonté, ſoit la diagonale d'un parallelogramme rectangle MN dont le côté KN ſoit ſur le filet vertical KR, & l'autre KM horiſontal.

Cela

Digitized by Google

Cela conçû, il eſt viſible (comme dans la démonſtrat. du Th. 42.) que la réſiſtance que le côté BC fait en K à l'aſcenſion de ce filet RK, que ceux PQ du niveau GH tendent (*Ax.* 9. *Corol.* 2. 3.) à faire monter juſqu'au point S de ce niveau, eſt ſuivant KL, & égale à une force qui la ſuppléeroit, en repouſſant comme ce côté BC ſuivant KL, le bout K de ce filet; & qu'ainſi cette réſiſtance ſuivant KL ſe décompoſe comme en deux forces purement paſſives ſuivant KM, KN, dont la premiere ſuivant KM ſoûtient par ſon invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire ſuivant MK, & dont la ſeconde ſuivant KN de haut en bas, ſoûtient (comme dans le nomb. 2. de la démonſtr. du Th. 42.) l'effort directement contraire de bas en haut ſuivant RK, dont le poids du ſurplus des filets PQ au-deſſus de KR, tend à faire monter celui-ci juſqu'au point S de leur niveau GH; auquel effort ſuivant RK cette force de réſiſtance du côté BC ſuivant KN, eſt conſequemment égale. Mais le poids d'une portion SK de la même Liqueur ſeroit auſſi égal à cet effort directement contraire ſuivant RK. Donc la force de réſiſtance que le côté oblique BC du vaſe ſuppoſé, fait ſuivant KN ou KR à l'aſcenſion de ce filet RK, en le repouſſant ſuivant RK, eſt égal au poids d'une portion SK de cette Liqueur. Par conſequent le poids de ce filet KR, ainſi repouſſé par cette réſiſtance verticale ſuivant KN, fait le même effort en ce ſens ſur le fond AF du vaſe ABCDEF, qu'y feroit ce même poids du filet KR augmenté du poids de SK, c'eſt-à-dire, le même effort qu'y feroit un filet vertical entier SR de la même Liqueur.

Ce qu'on voit du filet vertical KR de Liqueur, retenu au-deſſous de la ſurface ou du niveau GH de cette Liqueur par le côté oblique BC du vaſe ABCDEF, ſe démontrera de même de tous les autres filets verticaux KR ainſi retenus au-deſſous de ce niveau GH par le même côté BC, & par ce que ce vaſe en peut avoir d'autres obliques DE, &c. Donc ces filets verticaux KR trop

courts pour atteindre au niveau GH de la Liqueur contenue dans le vaſe ABCDEF, en preſſeront autant le fond AF, que s'ils atteignoient tous à ce Niveau. Par conſequent tous les autres filets PQ y atteignant, le total de tous ces filets de Liqueur, c'eſt-à-dire, tout ce que ce vaſe ABCDEF contient de cette Liqueur juſqu'au niveau GH & au deſſous en preſſera le fond AF d'une force égale à celle dont il ſeroit preſſé par tout ce qu'un vaſe cylindrique vertical AYZF de même baſe ou fond horiſontal AF, pourroit contenir de cette Liqueur juſqu'à ce niveau GH ou YZ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Encore à l'imitation du Schol. du Th. 42. comme dans la démonſtration du Th. 41. ſuppoſons pour un moment que le vaſe cylindrique vertical AYZF de baſe ou fond horiſontal AF, ſoit rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'au niveau YZ. Concevons que dans ce vaſe cylindrique ſur ſon fond AF, il s'en forme un autre ABCDEF plus large en bas qu'en haut, lequel ſans aucun mouvement de la Liqueur en intercepte une quantité qui le rempliſſe juſqu'au même niveau YZ, qui rencontre ſon rétréciſſement en GH, & qui ne laiſſe de cette Liqueur au-dehors de lui que ce que les portions CBY, DEZ, en expriment entre ces deux vaſes, deſquelles les portions de ſurface du rétréci, exprimées par ſes côtez obliques CB, DE, rompent la communication avec ce qu'il contient de cette Liqueur.

Il eſt viſible que le côté BC traverſant en K le filet vertical SR de cette Liqueur, en retient dans ce vaſe rétréci ABCDEF la partie KR dans la même ſujettion & dans la même action contre ſon fond AF que celle que la partie retranchée SK lui cauſoit contre ce fond dans le cylindre AYZF avant l'intervention de ce côté BC, puiſqu'il retient dans le vaſe rétréci ABCDEF cette partie KR du filet SR auſſi ſerrée contre ce fond AF que la retenoit

Digitized by Google

alors le poids de l'autre partie SK de ce filet SR, n'y ayant en ceci aucun mouvement, & y en fallant quelqu'un de cette partie KR vers S, pour diminuer la preſſion qu'elle cauſoit en R à ce fond AF, lorſquelle étoit chargée de SK libre dans le cylindre AYZF avant l'introduction ou la formation de ce rétréci ABCDEF. Donc cette partie KR du filet vertical SR, renfermée dans ce vaſe rétréci, en preſſera le fond AF d'une force égale à celle dont il étoit preſſé par le poids de ce filet entier SK, lorſque ce filet étoit libre dans le vaſe cylindrique AYZF.

Ce qu'on voit ici du filet vertical KR que le côté oblique BC du vaſe rétréci ABCDEF y retient au-deſſous du niveau YZ ou GH des plus hauts PQ, qui tendent à l'y élever, ſe démontrera de même de tous les autres filets verticaux de la même Liqueur, que ce bord BC, & les autres obliques DE, &c. de ce vaſe rétréci par haut, empêchent d'être élevez juſqu'à ce niveau GH par ceux PQ, qui y atteignent: on démontrera, dis-je, de même que tous ces filets KR retenus plus bas que ce niveau YZ ou GH dans ce vaſe rétréci ABCDEF par les côtez obliques BC, DE, &c. en preſſent tous le fond AF de même force que s'ils étoient tous à ce niveau YZ, augmentées de parties SK, que l'intervention de ces côtez obliques a retranchées des filets totaux SR, c'eſt-à-dire, de même force que celle dont ces filets SK libres dans le vaſe cylindrique AYZF avant cette intervention, en preſſoient le même fond AF. Donc ce que le vaſe ABCDEF plus large en bas qu'en haut, contient de cette Liqueur quelconque juſqu'au niveau GH, en preſſe le fond AF d'une force égale a celle dont il ſeroit preſſé par le poids de tout ce qu'un vaſe cylindrique vertical AYZF de même fond horiſontal AF, contiendroit de la même Liqueur juſqu'au même niveau YZ. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

Pour la verité de ce Th. 44. il n'eſt pas neceſſaire que FIG. 308.

vaſe ABCDEF ſoit plus large en ſon fond horiſontal AMFN que par tout ailleurs : il ſuffit que ce vaſe aille en ſe rétreciſſant depuis ce fond juſqu'à telle hauteur qu'on voudra, quelle qu'en ſoit l'ouverture ſuperieure CD.

Pour le voir, ſoit ce vaſe ABCDEF tel, par exemple, qu'on le voit ici, mais toûjours de baſe ou fond horiſontal AMFN, rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra. Sur ſon fond horiſontal AMFN imaginons un cylindre vertical AYZF de la hauteur AY de la Liqueur dans ce vaſe ; & ce cylindre coupé par un plan vertical de même nom AYZF, lequel en rencontre la baſe horiſontale AMFN en la ſection AF, & auquel ſoit perpendiculaire un autre plan vertical, qui paſſant par E, le coupe en KL, que je prendrai pour ce ſecond plan, qui coupe auſſi en MN le fond AMFN du vaſe ABCDEF. Cela poſé,

1°. L'on verra, comme dans le nomb. 1. du Scholie du Th. 42. & comme dans les démonſtrations 1. 2. du Th. 43. que tout ce que ce vaſe ABCDEF contient de Liqueur entre lui & le cylindre vertical AYZF dans l'eſpace GBAY ſur ce que ſes côtez obliques AB, BC, expriment de ſa ſurface vers eux, eſt ſoûtenu ſur cette portion oblique de ſurface ABC ſans aucune action ſur ou contre le fond AMFN de ce vaſe ABCDEF. On verra de même que tout ce que ce vaſe contient de la même Liqueur dans l'eſpace oppoſé HEK ſur ce que ſon côté oblique DE exprime de la ſurface oppoſée, qui avec la portion KE du plan vertical KL, renferme cet eſpace HEK, eſt pareillement ſoûtenu ſur cette portion DE de ſurface oblique de ce vaſe ABCDEF, ſans aucune action non plus ſur ou contre ſon fond horiſontal AMFN.

2°. L'on verra auſſi, comme dans le nomb. 2. du Schol. du Th. 42. & comme dans les démonſtrations 1. 2. du preſent Th. 44. que ce que ce vaſe ABCDEF contient de la même Liqueur dans l'eſpace FEL entre l'autre portion EL du plan vertical KL, & de ce que le côté oblique EF de ce vaſe exprime de ſa ſurface juſqu'à cette partie

EL de ce plan vertical KL ſur la portion MFN qu'il retranche de la baſe ou fond horiſontal AMFN, charge ou preſſe ce fond de ce vaſe ABCDEF, d'une force verticale égale à celle dont ce même fond AMFN, ſeroit preſſé en MFN par le poids entier d'un cylindre vertical LKZF de même Liqueur à même hauteur AY que celle du vaſe propoſé, ayant pour baſe horiſontale cette portion MFN du fonds AMFN de ce vaſe ABCDEF.

Donc ce fond horiſontal étant outre cela preſſé en MAN par le poids entier de l'autre portion cylindrique AYKL d'un cylindre vertical AYZF de même Liqueur que celle du vaſe ABCDEF de la hauteur AY qu'elle a dans ce vaſe, laquelle portion cylindrique AYKL de ce cylindre AYZF de Liqueur a pour baſe horiſontale cette partie MAN du fond AMFN de ce vaſe ABCDEF; & ce fond horiſontal AMFN n'étant (*nomb.* 1.) aucunement preſſé parce que ce vaſe contient de Liqueur dans les eſpaces GBAY, HEK: il ſuit du nomb. 2. qu'il n'y a que ce que le vaſe ABCDEF contient de cette Liqueur dans l'eſpace KEFAY, qui en preſſe le fond AMFN, & que ce fond horiſontal en eſt preſſé verticalement par cette portion KEFAY de Liqueur, d'une force égale à celle dont il ſeroit preſſé par le poids entier d'un cylindre vertical AYZF de pareille Liqueur de même baſe horiſontale AMFN, & de même hauteur AY que la contenue dans le vaſe ABCDEF. Par conſequent tout ce que ce vaſe contient de cette Liqueur quelconque juſqu'au niveau quelconque GH, preſſe encore ici verticalement ſon fond horiſontal AMFN d'une force égale à celle dont ce fond ſeroit preſſé par le poids d'un cylindre vertical AYZF à même hauteur AY que là dans un tuyau droit ou vertical qui auroit ce même fond horiſontal AMFN pour le ſien, conformément au preſent Th. 44.

COROLLAIRE II.

Suivant ce Corol. 1. & le preſent Th. 44. le fond horiſontal AF (appellé AMFN dans ce Corol. 1. & que- Fig. 305. 306. 307. 308.

j'appelle dans celui AF, pour l'accommoder aux Figures 305. 306. 307. du preſent Th. 44.) d'un vaſe quelconque ABCDEF élargi en ce fond, étant preſſé par ce que ce vaſe contient de Liqueur quelconque juſqu'au niveau GH, comme il le ſeroit par un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, lequel le preſſeroit de tout ſon poids abſolu, & (*Th.* 42. *Corol.* 2.) de même force verticale dont le preſſeroit un cylindre d'obliquité quelconque de même Liqueur à même hauteur AY dans un tuyau incliné à volonté, lequel auroit ce fond horiſontal AF pour le ſien; il ſuit de là que ce que le vaſe ABCDEF élargi en ce fond horiſontal AF, contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, preſſe ce fond AF de la force dont ce même fond ſeroit preſſé par un cylindre quelconque de la même Liqueur à même hauteur AY dans un tuyau vertical ou incliné à volonté, lequel auroit ce fond horiſontal AF pour le ſien. D'où l'on voit que les preſſions verticales ou perpendiculaires de ce fond horiſontal AF pour une même Liqueur quelconque à differentes hauteurs dans un vaſe quelconque élargi en ce fond, ſont toûjours entr'elles comme les produits de ces hauteurs multipliées chacune par ce fond; & conſequemment en raiſon de ces ſeules hauteurs.

COROLLAIRE III.

Ce Corol. 2. joint aux Corol. 2. des précedens Th. 42. 43. fait voir que ſi un vaſe de figure quelconque de largeurs par tout égales ou inégales à volonté, & d'un fond horiſontal auſſi quelconque, eſt rempli d'une même Liqueur quelconque à differentes hauteurs ou niveaux auſſi quelconques; les differentes quantitez de même Liqueur dont ce vaſe ſera ſucceſſivement rempli juſqu'à ces differentes hauteurs, en preſſeront verticalement le fond horiſontal avec des forces qui ſeront toûjours entr'elles en raiſon de ces hauteurs.

Cela ſuit encore de ce que ſuivant les Th. 42. 43. 44.

ces preſſions ou forces verticales ſeront toûjours égales aux poids abſolus de cylindres verticaux de la même Liqueur, qui auroient ces hauteurs pour les leurs, & toutes le fond du vaſe pour leurs baſes horiſontales.

COROLLAIRE IV.

Soient preſentement deux vaſes V, U, differens à volonté, de fonds horiſontaux quelconques b, β, & remplis de differentes Liqueurs quelconques L, Λ, juſqu'à des hauteurs quelconques h, k, au-deſſus de ces fonds; deſquelles Liqueurs L, Λ, les peſanteurs ſpecifiques ſoient f, φ, & leurs denſitez e, ϵ. Si l'on appelle P, Π, les poids abſolus de deux cylindres faits chacun de chacune de ces Liqueurs, deſquelles les hauteurs ſoient celles h, k, de ces mêmes Liqueurs dans les vaſes V, U, & qui ayent pour baſes les fonds horiſontaux b, β, de ces vaſes: le preſent Th. 44. joint aux précedens Th. 42. 43. faiſant voir que les preſſions ou forces dont les quantitez de ce que ces vaſes V, U, contiennent de ces Liqueurs L, Λ, preſſent verticalement leurs fonds horiſontaux b, , ſont toûjours égales entr'elles aux poids abſolus P, Π, de ces cylindres; ſi l'on appelle p, ϖ, ces preſſions verticales des fonds b, β, l'on aura toûjours ici $p=$P, $\varpi=\Pi$. Or ſuivant les noms précedens, ces cylindres de poids P, Π, ayant (*Hyp.*) h, k, pour leurs hauteurs; b, β, pour leurs baſes; & étant (*Hyp.*) faits de Liqueurs L, Λ, de peſanteurs ſpecifiques f, φ, & de denſitez e, ϵ, ont leurs poids abſolus P$=bhef$, $\Pi=\beta k\epsilon\varphi$. Donc on aura toûjours ici $p=bhef$, $\varpi=\beta k\epsilon\varphi$; & conſequemment $p.\ \varpi :: bhef.\ \beta k\epsilon\varphi$. ou $p\beta k\epsilon\varphi=\varpi bhef$ (A). Donc;

1°. Si la Liqueur eſt la même quelconque dans les vaſes quelconques V, U, cette identité d'eſpece des Liqueurs L, Λ, rendant leurs peſanteurs ſpecifiques $f=\varphi$, & leurs denſitez $e=\epsilon$, changera la précedente formule A en $p\beta k=\varpi bh$ (B) pour ce cas-ci; ce qui y donne $p.\ \varpi :: bh.\ \beta k$. D'où l'on voit que les preſſions verticales p, ϖ, des fonds horiſontaux b, β, de ces vaſes V, U, cauſées

par les poids de même Liqueur quelconque contenue dans ces vaſes à hauteurs quelconques h, k, ſeront toûjours ici entr'elles en raiſon des produits bh, βk, de ces fonds horiſontaux quelconques par ces hauteurs auſſi quelconques h, k, de ces vaſes V, U, de figures & de capacitez quelconques, contiennent de la même Liqueur auſſi quelconque.

2°. Si cette même Liqueur ſe trouve à hauteurs égales h, k, dans ces vaſes V, U, au-deſſus de leurs fonds horiſontaux b, β, les précedentes équations A, B, donneront également $p\beta = \varpi b$ (C) pour ce cas-ci : ce qui donnant $p.\varpi :: b.\beta$. fait voir que les preſſions verticales p, ϖ, des fonds horiſontaux b, β, de ces vaſes V, U, ſeront toûjours ici en raiſon de ces fonds quelconques.

3°. Si ces fonds horiſontaux b, β, de figures quelconques ſont égaux, à quelques hauteurs h, k, que leurs vaſes V, U, ſoient remplis d'une même Liqueur quelconque, les précedentes formules A, B, donnant auſſi également ici $pk = \varpi h$ (D), les preſſions verticales p, ϖ, de ces fonds horiſontaux égaux b, β, ſeront ici en raiſon des hauteurs h, k, au-deſſus de ces fonds dans les vaſes quelconques V, U : ce qui donne le précedent Corol. 3. en ſuppoſant ces vaſes être le même ſucceſſivement remplis de la même Liqueur juſqu'à ces hauteurs h, k.

4°. Enfin ſi les vaſes V, U, quelques differens qu'ils ſoient, ont leurs fonds horiſontaux égaux b, β, & qu'ils ſoient remplis d'une même Liqueur quelconque juſqu'à hauteurs égales h, k, au-deſſus de ces fonds les équations précedentes A, B, C, D, donneront également ici toutes $p = \varpi$; ce qui fait voir que les preſſions verticales p, ϖ, des fonds horiſontaux égaux de ces vaſes V, U, differens à volonté dans tout le reſte, ſeront toûjours ici égales entr'elles.

SCHOLIE

SCHOLIE

Commun aux Théoremes XLIII. XLIV.

I. Les deux derniers Th. 43. 44. ſe trouvent conformes à l'experience, en ſe ſervant d'un vaſe ABCDEF plus large dans la Fig. 309. & plus étroit dans la Fig. 310. en bas qu'en haut, duquel le fond AF puiſſe aiſément monter & deſcendre le long de la partie cylindrique verticale VAFX de ce vaſe prolongé vers le bas, y demeurant cependant toûjours ſi juſtement appliqué, qu'il ne laiſſe rien échapper de la Liqueur qu'on ſuppoſe dans ce vaſe ABCDEF. Car ſi l'on arrête fixement ce vaſe en l'air, ſuſpendu à un crochet, ou attaché par le côté à quelque mur ou poteau ferme MN; de maniere que ſon fond AF ſoit parallele à l'horiſon, & qu'on attache enſuite un fil vertical KL au centre de gravité K de ce fond, & à l'extrêmité L d'un (OL) des bras d'une balance LP appuyée en ſon milieu O, laquelle à l'extrêmité P de ſon autre bras OP porte un baſſin Q chargé de petit plomb ou de ſable, juſqu'à ce qu'il demeure en équilibre avec le fond AF chargé de la Liqueur dont on remplit enſuite le vaſe ABCDEF juſqu'à tel niveau GH qu'on voudra, où la ſurface de cette Liqueur parallele à ce fond horiſontal AF, ſoit moindre ou plus grande que lui: tout cela (dis-je) ainſi diſpoſé, l'on verra cet équilibre n'arriver que lorſque le baſſin Q & ſa charge feront enſemble un poids égal à celui d'un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, de baſe AF, & de hauteur AY égale à la plus grande que la même Liqueur ait au-deſſus de ce fond AF dans le vaſe ABCDEF. Hors ce cas on verra le fond AF de ce vaſe y monter vers BC, tant que le poids total fait de celui du baſſin Q & de ſa charge, ſera plus grand que celui de ce cylindre AYZF de Liqueur, quoique moindre que le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans le vaſe ABCDEF de la Fig. 310. On verra au contraire ce fond AF deſcendre vers VX, lorſque ce poids fait de ce-

lui du baſſin Q & de ſa charge, ſera moindre que celui de ce même cylindre AYZF de Liqueur, quoique plus grand que le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'autre vaſe ABCDEF de la Fig. 309.

C'eſt ce que M. Paſchal a obſervé le premier, & ce qu'il a fait remarquer dans ſon Traité de l'Equilibre des Liqueurs; mais ſans que lui, ni aucun autre que je ſçache, en ait donné la raiſon qu'on en voit dans les démonſtrations Th. 42. 43. dans le principe general de tout cet Ouvrage-ci.

II. Comme cette décompoſition de forces vient de la réſiſtance des côtez obliques CB, DE, dans la Figure 309. à l'aſcenſion, & dans la Fig. 310. à la deſcente des filets verticaux de Liqueur qui les rencontrent, dont les uns dans la Fig. 309. ſont ſollicitez à monter par le ſurplus des poids des plus longs, & dont les autres de la Fig. 310. tendent par leur propre poids auſſi bas que les plus longs; & que ſuivant les démonſtrations des Th. 42. 43. c'eſt de-là que vient dans la Fig. 309. la nullité de preſſion du fond AF du vaſe ABCDEF par les filets verticaux moindres que les plus longs de la Liqueur que contient ce vaſe plus étroit en bas qu'en haut, leſquels ſeuls en preſſent ce fond; & dans la Fig. 310. l'égalité de preſſion du fond AF de l'autre vaſe ABCDEF par tous les filets verticaux, tant courts que longs de la Liqueur que contient cet autre vaſe plus large en bas qu'en haut. De-là (dis-je) vient que,

Fig. 309. 1°. Suivant la démonſtration du Th. 42. les filets verticaux, tant courts que Longs de la Liqueur contenue dans le vaſe ABCDEF de la Fig. 309. plus large en bas qu'en haut, en preſſent tous également le fond AF, & auſſi fortement tous enſemble que le preſſeroit un cylindre vertical AYZF de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horiſontal AF pour baſe, & pour hauteur la plus grande AY de ce qu'en contient ce vaſe ABCDEF rétréci par en haut, quoique le poids de ce qu'il en contient ſoit moindre que celui de ce cylindre vertical AYZF

de la même Liqueur : cela, dis-je, venant de la réſiſtance que les côtez obliques CB, DE, du vaſe ABCDEF rétréci par en haut, font à l'aſcenſion des filets verticaux de la Liqueur que ce vaſe contient, moindres que les plus longs qui tendent à les faire monter juſqu'à leur niveau GH, tant que cette Liqueur eſt fluide ; & cette ſollicitation à monter, & conſequemment auſſi les réſiſtances qu'y feroient ces côtez obliques CB, DE, ceſſant dès que cette Liqueur eſt toute glacée, & ne fait plus qu'une maſſe ſolide, dont les plus longs filets verticaux attachez alors comme d'une piece avec les moindres, ne tendent plus à les faire monter, mais au contraire à les faire deſcendre, & à les entraîner en bas avec eux par leur peſanteur, quand même ces moindres filets n'en auroient d'eux-mêmes aucune : il ſuit manifeſtement qu'alors ce total de glace détaché du vaſe en le chauffant tout autour, ne doit plus preſſer ſon fond AF que d'une force égale au poids de ce que le vaſe en queſtion contient de Liqueur ainſi glacée. C'eſt ce que M. Paſchal a auſſi obſervé par le moyen de la balance de l'art. 1. en s'en ſervant là comme ici.

2°. Suivant les démonſtrations du Th. 43. les filets verticaux moindres que les plus longs de la Liqueur contenue dans le vaſe ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, n'en preſſent aucunement le fond AF, qui ne ſe trouve ainſi preſſé que par ces plus longs filets égaux à AY, d'une force ſeulement égale à celle dont il ſeroit preſſé par un cylindre vertical AYZF de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horiſontal AF pour baſe, & AY pour hauteur, quoique le poids de ce que le vaſe ABCDEF rétréci par en bas, contient de cette Liqueur, ſoit plus grand que celui du cylindre vertical AYZF : cela, dis-je, venant de la réſiſtance que les côtez obliques AB, CD, du vaſe ABCDEF rétréci par en bas, font à la deſcente des moindres filets verticaux de Liqueur appuyez ſur eux, ſans en faire aux plus longs appuyez ſur le fond AF, tant que la Liqueur compoſée de Fig. 310

tous ces filets eſt fluide, & que ces filets peuvent agir par leur peſanteur indépendamment les uns des autres ; dès que cette Liqueur ſera toute glacée, les plus longs de ces filets attachez alors comme d'une piece avec les moindres ſoûtenus ſur les côtez obliques AB, CD, du vaſe ABCDEF rétréci par en bas, ces plus longs filets de Liqueur glacée ſe trouveront auſſi pour lors ſoûtenus par la médiation des moindres ſur les côtez obliques AB, CD, de ce vaſe, ſans s'appuyer ſur ſon fond AF, qui alors ſeroit inutile pour les retenir avec les autres dans ce vaſe ; de ſorte que quand le total de ce qu'il contient de Liqueur ainſi glacée, en ſeroit détachée en la chauffant tout autour, ce total de glace ainſi appué ſur les côtez AB, CD, du rétréciſſement de ce vaſe, ne peſeroit plus du tout ſur le bras OL de la balance OP, ni conſequemment contre ſon baſſin Q.

Fig. 309. 310. III. Au reſte quoique, ſuivant le Th. 43. la Liqueur déglacée & fluide contenue juſqu'au niveau GH dans le vaſe ABCDEF de la Fig. 309. plus large en bas qu'en haut, en preſſe le fond horiſontal AF d'une force égale à celle dont ce fond ſeroit preſſé par le poids d'un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, lequel eût ce fond horiſontal AF pour baſe, & pour hauteur la plus grande AY qu'ait la même Liqueur dans ce vaſe ABCDEF de la Fig. 309. plus large en bas qu'en haut ; & que ſuivant le Th. 43. la Liqueur déglacée & fluide contenue auſſi juſqu'au niveau GH dans le vaſe de même nom de la Fig. 310. plus étroit au contraire en bas qu'en haut, n'en preſſe le fond horiſontal AF que d'une force égale à celle dont ce fond ſeroit preſſé par le poids d'un cylindre AYZF de la même Liqueur, lequel eût auſſi ce fond horiſontal AF pour baſe, & pour celle AY qu'a la même Liqueur au-deſſus de ce fond AF dans ce vaſe ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut : quoique (dis-je) cela ſoit vrai de part & d'autre, ſuivant les Th. 42. 43 il ne faut pourtant pas s'imaginer que la Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans le vaſe ABCDEF de

Digitized by Google

la Fig. 310. plus large en bas qu'en haut, peſât autant à la main qui ſoûtiendroit ce vaſe, qu'y peſeroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, que ſoûtiendroit ou porteroit cette main dans un vaſe cylindrique de même baſe AF que celui-là; ni que la Liqueur contenue auſſi juſqu'au niveau GH dans le vaſe ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, ne peſât à la main qui ſoûtiendroit ou porteroit ce vaſe, qu'autant qu'y peſeroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, que cette main ſoûtiendroit ou porteroit dans un vaſe cylindrique de même fond AF que celui-là. Car,

1°. Suivant la démonſtration 1. du Th. 43. la Liqueur dont eſt rempli juſqu'au niveau GH le vaſe ABCDEF de la Fig. 310. plus large en bas qu'en haut, ne peſe pas ſeulement de tout ſon poids ſur ſon fond AF, mais de plus elle y peſe d'un effort de réſiſtance dont les côtez obliques CB, DE, de ce vaſe ou de ſon rétréciſſement BCDE en repouſſent vers ce fond AF les filets lateraux que les plus longs ou plus élevez qu'eux, tendent à y faire monter d'une force égale & directement contraire à cet effort, laquelle pouſſe autant en haut ce rétréciſſement ou les côtez obliques de ce vaſe, que ſon fond AF eſt repouſſé en bas par leurs réſiſtances; ce qui, comme un reſſort appuyé par un bout ſur ce fond, & par l'autre contre ces côtez obliques CB, DE, du vaſe ABCDEF de la Fig. 309. ne tend qu'à écarter d'eux ce fond, & non à charger ce vaſe, qui ne ſe trouve ainſi l'être que du ſeul poids de la Liqueur qu'il contient. Donc le cylindre ſuppoſé de la même Liqueur, de hauteur égale à la plus grande qu'elle ait dans ce vaſe ABCDEF rétréci par en haut, preſſant auſſi de tout ſon poids le fond horiſontal AF de ſon vaſe cylindrique vertical ſuppoſé de même baſe ou fond que celui-là, & y étant en plus grande quantité, & conſequemment d'un plus grand poids: ce n'eſt pas merveille, au contraire c'eſt une conſequence neceſſaire qu'en ſoûtenant ou en portant ſéparément FIG. 309.

ces deux vaſes avec ce qu'on y ſuppoſe de la même Liqueur ; la contenue dans le vaſe ABCDEF rétréci par en haut, peſe à la main la valeur de ſon poids, & conſequemment moins que la ſoûtenue par la même main dans le vaſe cylindrique vertical de même fond AF que celui-là, & à même hauteur que dans ce même-là, quoique ces deux portions de la même Liqueur preſſent également (*Th.* 42.) les fonds égaux de ces deux vaſes dans la Fig. 309.

Fig. 310. 2°. Suivant les démonſtrations du Théor. 43. la Liqueur dont eſt auſſi rempli juſqu'au niveau GH le vaſe ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, preſſant vers le bas de tout ſon poids les fonds AF & les côtez obliques CB, DE, de ce vaſe ; & ne preſſant (*Th.* 43) ce fond horiſontal AF que d'une force égale à celle dont il ſeroit preſſé par un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur dans un vaſe cylindrique de même fond AF que celui-là : c'eſt auſſi une conſequence neceſſaire que ce que cet autre vaſe ABCDEF rétréci par en bas, contient de cette Liqueur, peſe de tout ſon poids à la main qui la ſoûtiendroit dans ce vaſe ; & conſequemment qu'elle y peſe plus que n'y peſeroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, ſoûtenu par la même main dans un vaſe cylindrique de même fond horiſontal AF que celui-là, quoique ces deux portions de la même Liqueur preſſent également (*Th.* 43.) ce fond ou les fonds égaux de ces deux vaſes dans la Fig. 310.

REMARQUES

Sur les Théoremes XLII. XLIII. XLIV.

Fig. 311. 312. 313. I. Dans les Th. 42. 43. dans leurs Corollaires, & dans le précedent Scholie qui leur eſt commun, l'on a ſuppoſé que les vaſes ABCDEF remplis de Liqueur quelconque juſqu'au niveau quelconque GH, ont leurs fonds horiſontaux, leſquels ſont AF, lorſque les vaſes ſont cylin-

Digitized by Google

Fig. 303.

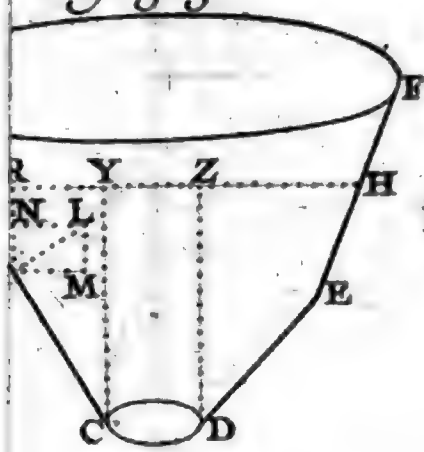


Fig. 304.

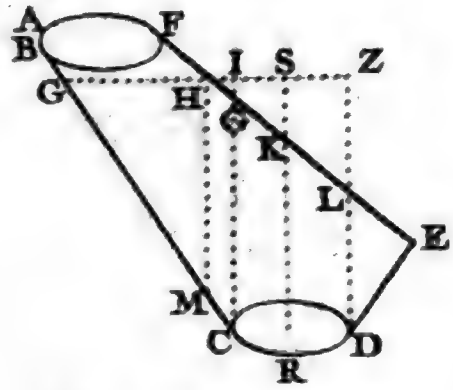


Fig. 306.

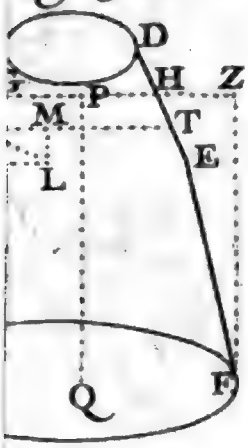
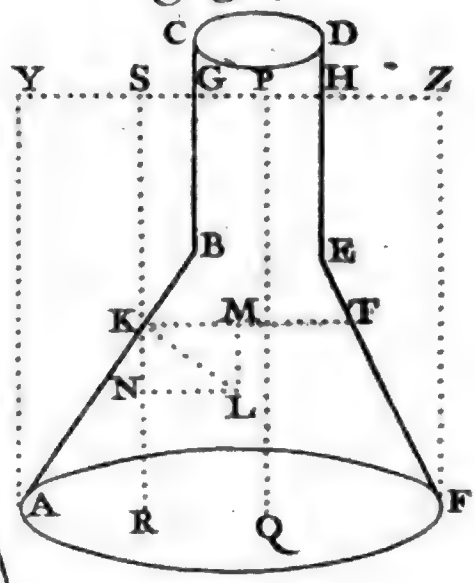


Fig. 307.



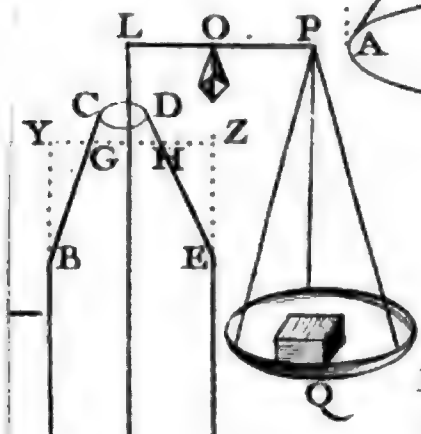
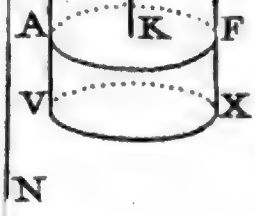


Fig. 309.



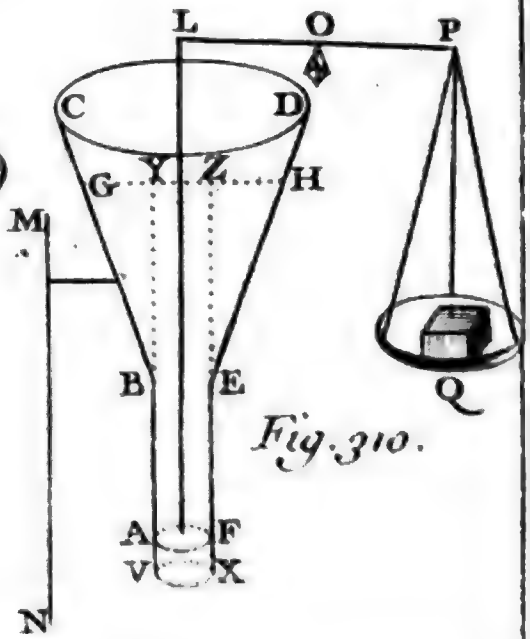


Fig. 310.

Digitized by Google

driques inclinez, comme dans le Th. 42. ou plus larges en bas qu'en haut, comme dans le Th. 44. & CD lorſque ces vaſes ſont au contraire plus larges en haut qu'en bas, comme dans le Th. 43. La raiſon de cette ſuppoſition vient de ce que,

1°. Si le vaſe ABCDEF cylindrique incliné, comme dans le Th. 42. ou plus large en bas qu'en haut, comme dans le Th. 44. avoit ſon fond AF oblique à l'horiſon, comme ici dans les Fig. 311. 312. plus haut en F qu'en A; des filets verticaux de la Liqueur dont on le ſuppoſe rempli juſqu'au niveau GH, ceux qui en rencontreroient les côtez obliques au-deſſous du plan horiſontal FO, comme le filet vertical RK en rencontre ici en K l'oblique BC, lequel s'oppoſant à l'aſcenſion de ce filet RK ſollicité à monter par les plus longs, comme dans les démonſtr. 1. des Th. 42. 44. en repouſſe comme là le point K ſuivant ſa perpendiculaire KL, & conſequemment (par décompoſition de force de la réſiſtance de ce côté BC ſuivant ſa perpendiculaire KL) ſuivant les côtez KM, KN du parallelogramme rectangle MN fait, comme dans la démonſtr. 1. avec des forces qui preſſent le fond oblique AF non ſeulement comme là en R, ſuivant le côté vertical KN qui le rencontre en R, mais encore en T, ſuivant le côté horiſontal KM, qui rencontre ce fond oblique AF en ce point T; & ainſi de toutes les réſiſtances que les côtez obliques du vaſe font a l'aſcenſion de tout ce qu'ils rencontrent d'autres filets verticaux au-deſſous du plan horiſontal FO. Or ſi ce fond AF n'en étoit preſſé que ſuivant les verticales KR, on démontreroit de la maniere qu'on a démontré les Th. 42. 43. que ce fond oblique AF ſeroit preſſé par tout ce que le vaſe ABCDEE contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, préciſément de la même force qu'il le ſeroit par un cylindre vertical, ou (*Th.* 42.) oblique quelconque de la même Liqueur, qui auroit pour baſe ce fond AF pareillement oblique à l'horiſon, & qui ſe termineroit en haut au niveau GH de la Liqueur du vaſe ABCDEF. Fig. 311. 312. 313.

cylindrique incliné dans la Fig. 311. ou plus large en bas qu'en haut dans la Fig. 312.

Fig.313. 2°. Si ce vaſe ABCDEF étoit renverſé, en ſorte qu'il en devînt un plus large au contraire en haut qu'en bas, où il eût CD pour fond, comme dans le Th. 43. & qu'il eût auſſi ce fond CD oblique à l'horiſon comme ici dans la Fig. 314. plus haut en D qu'en C; des filets verticaux de la Liqueur dont on le ſuppoſe rempli juſqu'au niveau GH, ceux qui en rencontreroient les côtez obliques au-deſſous du plan horiſontal DO, comme le vertical RK rencontre ici en K l'oblique BC, qui s'oppoſoit à la deſcente de ce filet RK, comme dans la démonſtr. 1. du Th. 43. en repouſſe comme là le point K ſuivant ſa perpendiculaire KL, & conſequemment (encore par décompoſition de force de la réſiſtance de ce côté BC ſuivant ſa perpendiculaire KL) ſuivant les côtez KM, KN, du parallelogramme rectangle MN fait auſſi comme dans cette démonſtr. avec des forces dont l'une ſuivant le côté KN ſoûtient comme là le poids directement contraire du filet RK, & l'autre ſuivant le côté horiſontal KM preſſe en ce ſens le fond oblique CD, qu'il rencontre en T; & ainſi de toutes les réſiſtances que les côtez obliques du vaſe font à la deſcente de tout ce qu'ils rencontrent d'autres filets verticaux au-deſſous du plan horiſontal DO. Or ſi ce fond CD n'étoit preſſé par aucun des filets verticaux qui rencontrent les côtez obliques du vaſe ABCDEF de la Fig. 313. plus étroit en bas qu'en haut, on démontreroit comme l'on a démontré le Th. 43. que ce fond oblique CD ne ſeroit preſſé par tout ce que ce vaſe contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, que d'une force égale à celle dont il ſeroit preſſé par un cylindre vertical, ou (*Th.* 42.) oblique quelconque de la même Liqueur, qui auroit pour baſe ce fond CD pareillement incliné à l'horiſon, & qui ſe termineroit en haut au niveau GH de la Liqueur du vaſe de la Fig. 313. plus étroit en bas qu'en haut.

3°. Donc (*nomb.* 1. 2.) un vaſe de fond oblique à l'horiſon,

riſon, tant cylindrique incliné, que plus ou moins large en ce fond qu'au-deſſus, rempli de Liqueur quelconque juſqu'à quelque hauteur ou niveau que ce ſoit, aura ce fond oblique plus preſſé par ce qu'il contiendra de cette Liqueur, que ce fond ne le ſeroit par un cylindre quelconque de même Liqueur, qui auroit pour baſe ce même fond pareillement incliné à l'horiſon, & qui ſe termineroit en haut au niveau de la Liqueur contenue dans le vaſe ſuppoſé cylindrique incliné, ou plus ou moins large en bas qu'en haut. Ce qui ne revient aux Th. 42. 43. 44. qu'en rendant ce fond horiſontal : cas ſeul où ſe trouve vrai ce qu'on dit d'ordinaire ſur le ſeul témoignage (ce me ſemble) de l'experience, & ce qui ſe trouve démontré dans ces Th. 42. 43. 44. ſçavoir, qu'*à quelque hauteur ou niveau qu'un vaſe quelconque de fond horiſontal, ſoit rempli de Liqueur quelconque, ce qu'il contiendra de cette Liqueur, en preſſera toûjours ce fond d'une force égale à celle dont ce fond horiſontal ſeroit preſſé par un cylindre quelconque de la même Liqueur, lequel auroit ce même fond horiſontal pour baſe, & pour hauteur celle de ce qu'il y a de cette Liqueur dans le vaſe ſuppoſé plus ou moins large en bas qu'en haut.* Ç'a été pour démontrer ce Théoreme appris par l'experience de M. Paſchal que le fond d'un tel vaſe a été ſuppoſé horiſontal dans les Th. 42. 43. 44.

II. Dans le précedent art. 1. en parlant des vaſes cylindriques (la même choſe ſe dira des priſmatiques quelconques) de fonds ou baſes obliques à l'horiſon, n'y ayant parlé que des baſes cylindriques, qui lui ſont auſſi inclinez : voici preſentement pour ceux qui ont auſſi des fonds obliques à l'horiſon. Pour cela ſoit le tuyau ou vaſe cylindrique vertical ACDF, de baſe ou fond oblique quelconque AMNFP, qui prolongé faſſe un angle quelconque DFK avec la longueur de ce tuyau, lequel ſoit rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'à tel niveau GH qu'on voudra. 310. 314.

1°. Il eſt évident que ce qu'il y a de cette Liqueur juſqu'en GH dans ce vaſe cylindrique ou priſmatique ver-

tical ACDF, en preſſe verticalement, ou ſuivant ſa longueur le fond oblique AMNFP d'une force égale au poids abſolu de cette quantité AGHF de Liqueur, puiſque ce poids porte tout entier ſur ce fond.

2°. Quant à la preſſion perpendiculaire qui en réſulte à ce fond oblique AMNFP, ſoit toute cette quantité de Liqueur conçûe encore ici comme diviſée en un nombre preſqu'infini de filets verticaux OR terminez en autant de points O de ſon niveau GH, & en autant de points R du plan de la baſe ou fond oblique AMNFP du tuyau cylindrique ou priſmatique vertical propoſé ACDF, lequel ſoit imaginé coupé par un plan mené ſuivant quelqu'un OR de ces filets verticaux parallelement au plan vertical DFK, & qui rencontre en la droite MN prolongée vers L, ce fond AMNFP oblique à l'horiſon; ſur lequel fond prolongé tombent les perpendiculaires DK, OL, qui en rencontrent en K, L, les droites FK, ML, paralleles (*conſtr.*) entr'elles, auſſi-bien que DF, OR.

Cela poſé, il eſt pareillement viſible que le poids abſolu de chaque filet OR de Liqueur, eſt à la preſſion ou à la force dont il preſſe perpendiculairement le fond oblique AMNFP :: OR. OL (*conſtr.*) :: DF. DK. Donc ce dernier rapport étant conſtant, la ſomme des poids abſolus de tous les filets OR, c'eſt-à-dire, le poids total & abſolu de toute la quantité de Liqueur AGHF ſuppoſée juſqu'au niveau GH dans le cylindre vertical ACDF, eſt à la preſſion ou force dont ce poids total preſſe perpendiculairement le fond oblique de ce tuyau, comme DF eſt à DK; & conſequemment comme la ſurface inferieure AMNFP de la Liqueur eſt à ſa ſurface ſuperieure GH, quelle qu'en ſoit la figure.

III. On ſuppoſe ici (*art.* 2. *nomb.* 2.) que AMNFP. GH :: DF. DK. En voici la démonſtration pour toutes ſortes de cylindres ou priſmes de baſes de figures quelconques, tel qu'on ſuppoſe le précedent vertical ACDF, lequel ſoit ici en poſition quelconque.

Fig. 315. Soit ce cylindre ou priſme quelconque ACDF de baſes

Digitized by Google

oppoſées DXCT, AMFP, dont celle qu'on voudra ſoit de figure quelconque, & dont la premiere DXCT ſoit perpendiculaire, & l'autre AMFP lui ſoit inclinée de tel angle DFK qu'on voudra, ſoûtendu par DK perpendiculaire en K au plan de la baſe oblique AMFP.

Cela fait, je dis que l'aire de cette baſe oblique AMFP du cylindre ou priſme ACDF eſt à l'aire de ſa baſe perpendiculaire oppoſée DXCT, comme DF eſt à DK; c'eſt-à-dire, AMFP. DXCT :: DF. DK.

Pour le faire voir, ſoit ce cylindre ou priſme quelconque ACDF coupé en DS par un plan parallele à l'oblique AMFP, & en FRQP par un autre plan perpendiculaire à ce cylindre ou priſme ACDF. Cela fait, il eſt manifeſte que les ſections obliques DS, AMFP, de ces cylindres ou priſmes quelconques étant égales, ſemblables, & ſemblablement poſées, de même que les ſections perpendiculaires DXCT, FRQP, les cylindres partiaux ASDF, DCQF, ſont égaux entr'eux: de ſorte qu'ayant ici le cylindre oblique ASDF=AMFP×DK, & le droit DCQF=FRQP×DF=DXCT×DF, l'on y aura auſſi AMFP×DK=DXCT×DF. Donc AMFP. DXCT :: DF. DK. *Ce qu'il falloit démontrer.*

IV. On voit preſentement que ACDF de poſition quelconque dans le précedent art. 3. eſt ſuppoſé être le tuyau vertical de même nom dans l'art. 2. & de baſe AMFP oblique à l'horiſon, rempli de Liqueur quelconque juſqu'à tel niveau GH qu'on voudra; cette ſurface horiſontale GH de ſa Liqueur étant la baſe ſuperieure perpendiculaire du tuyau vertical partial AHGF de baſe inferieure AMFP oblique à l'horiſon: on voit, dis-je, ſuivant le précedent art. 3. qu'en ce cas la ſurface oblique inferieure AMFP de la Liqueur ſera à ſa ſurface ſuperieure GH, comme DF eſt à DK, ainſi qu'on la ſuppoſé ſur la fin du nomb. 2. de l'art. 2.

Cela ſe voit encore en ce que ſi l'on ſuppoſe que la baſe ſuperieure DXCT du tuyau vertical ACDF eſt horiſontale, & conſequemment perpendiculaire à ce tuyau

comme l'eſt la ſurface ſuperieure GH de la Liqueur qu'il contient ; ayant ici GH=DXCT, & le précedent art. 3. y donnant AMFP. DXCT :: DF. DK. il donnera pareillement ici AMFP. GH :: DF. DK. c'eſt-à-dire, que la ſurface oblique inferieure AMFP de la Liqueur ſuppoſée juſqu'au niveau GH dans le tuyau vertical ACDF, ſera encore ici à cette ſurface ſuperieure GH de cette Liqueur, comme DF eſt à DK.

V. On peut remarquer en paſſant que la maniere dont l'art. 3. vient de donner le rapport de l'aire de la ſection oblique quelconque d'un cylindre ou priſme quelconque ACDF, à l'aire de la ſection perpendiculaire de ce priſme ou cylindre preſentement de poſition quelconque, comme dans l'art. 3. donneroit auſſi les rapport entr'elles des aires des ſections obliques quelconques de ce corps, leſquelles ſeroient en des plans, qui paſſant par F, ſeroient tous perpendiculaires à celui DKF, ſuivant lequel ce cylindre ou priſme ACDF ſeroit incliné au plan d'une quelconque AMFP de ces ſections obliques à ce cylindre; & cela en imaginant autant de perpendiculaires DK ſur leurs plans prolongez. Ce qui donneroit ainſi les rapports des aires de toutes les autres ſections obliques du cylindre, paſalleles à celles-la dans toute ſa longueur.

Mais ſans tant de perpendiculaires DK; voici comment les rapports des aires de toutes ces ſections obliques cylindriques ou priſmatiques, peuvent ſe trouver par le moyen de la ſeule perpendiculaire DK imaginée (*art.* 3.) ſur le plan prolongé d'une quelconque AMFP de ces ſections obliques. Il n'y a pour cela qu'à imaginer le plan DKF prolongé à travers le cylindre ou priſme ACDF; lequel plan DKF en le coupant en quelque trapeze ACDF de deux côtez oppoſez DF, CA, paralleles entr'eux, coupe ſa ſection oblique AMFP en la droite AF, qui prolongée paſſe par K, & ſa ſection perpendiculaire FRQP en la droite FQ perpendiculaire en Q au côté CA. Car ayant ainſi les triangles rectangles AQF, FKD, ſemblables entr'eux on aura les droites FA. FQ :: DF. DK. De ſorte que dans la ſup-

Digitized by Google

poſition que DXCT eſt, auſſi-bien que FRQP, une ſection perpendiculaire du cylindre ou priſme ACDF, & conſequemment que DXCT=FRQP; l'art. 3. venant de donner DF. DK :: AMFP. DXCT :: AMFP. FRQP, l'on aura auſſi les droites FA. FQ :: AMFP. FRQP. ou FRQP. AMFP :: FQ. FA. c'eſt-à-dire, que les aires de la ſection perpendiculaire FRQP, & de l'oblique quelconque AMFP du cylindre ou priſme ACDF, ſont entr'elles en raiſon des droites FQ, FA, où ces ſections cylindriques ſont coupées par le plan DKF prolongé, qui eſt perpendiculaire aux leurs.

Donc la ſection oblique AMFP arbitrairement inclinée à la longueur du cylindre ou priſme quelconque ACDF, pouvant être priſe pour tout ce que le priſme ou cylindre en peut avoir d'obliques à ſa longueur par ſon point F, en des plans perpendiculaires à celui DKF, ſuivant lequel ce priſme ou cylindre ACDF eſt incliné au plan d'une quelconque AMFP de ces ſections obliques; les aires de toutes ces ſections ſeront entr'elles comme les droites en qui elles ſeront coupées par ce plan DKF prolongé à travers d'elles, & à l'aire de la ſection perpendiculaire FKQP, comme ces droites correſpondantes ſeront à la droite FQ, en qui elle ſera auſſi coupée par le même plan DKF.

Ainſi de quelque maniere que le cylindre ou priſme quelconque ACDF ſoit coupé en travers par tant de plans qu'on voudra, tous perpendiculaires au plan DKF, & paſſant tous par F, les aires de toutes les ſections, tant droites qu'obliques quelconques, qui en réſulteront à ce priſme ou cylindre ACDF, ſeront toutes entr'elles comme leurs ſections communes chacune avec ce plan DKF ſuivant lequel ce cylindre ou priſme eſt incliné au plan d'une quelconque AMFP de ſes ſections obliques.

Cela a déja été remarqué d'une autre maniere pour les cylindres de baſes ou de ſections perpendiculaires circulaires, ou (ce qui revient au même) de ſections obliques elliptiques quelconques : mais je ne ſçais point qu'on l'ait juſqu'ici remarqué

pour toutes ſortes de cylindres ou de priſmes de ſections de figures quelconques : c'eſt ce qui me fait ajoûter ici cet art. 5. quoique hors d'œuvre.

THEOREME XLV.

FIG. 316. 317.

Quelque Liqueur qu'il y ait dans un Ciphon recourbé de branches quelconques,

I. *Dès que cette Liqueur y ſera à hauteurs égales quelconques, c'eſt-à-dire, à niveau dans ces branches, elle y reſtera en équilibre à ce niveau, tant qu'elle y ſera libre.*

II. *Si elle n'y eſt pas à niveau, elle s'y mettra d'elle-même, & y reſtera pareillement en équilibre.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Soit d'abord un vaſe de figure quelconque ABCD, rempli de quelque Liqueur que ce ſoit, juſqu'à tel niveau ou plan horiſontal GH qu'on voudra. Imaginons enſuite que dans ce vaſe il ſe forme un Ciphon recourbé GEMNFHQPG fait (ſi l'on veut) de la même Liqueur gelée ſeulement en ce qu'il faudroit d'autre matiere pour le former, c'eſt-à-dire, ſeulement en une lame roulée, de laquelle il ſoit fait comme il le ſeroit de verre, de fer blanc, ou de quelqu'autre métal : en ſorte que ce que ce Ciphon de glace intercepte de la Liqueur non glacée dans tout le reſte, y ſoit contenu comme dans un autre, qui n'en differeroit que dans la matiere dont il ſeroit fait.

Une telle formation ou naiſſance de ce Ciphon de glace, ne cauſant aucun mouvement ni varieté aucune dans le reſte de la Liqueur qu'on ne ſuppoſe glacée que dans ce qu'il y en a d'employé à la conſtruction de ce Cyphon ; il eſt évident que ce qu'il contient de cette Liqueur non glacée, y doit reſter dans le même état qu'avant que ce Ciphon l'eût intercepté d'avec ce qui en reſte hors de lui dans le vaſe ABCD, & y être retenu par les côtez fermes de ce Ciphon, comme ce reſte de Liqueur environnante

Digitized by Google

retenoit celle-là dans la place qu'elle y occupe. De ſorte que ſi l'on conçoit preſentement que le vaſe ABCD ſoit anéanti avec tout ce qu'il contient de Liqueur au dehors du Ciphon GEMNFHQPG qui ſoit toûjours dans la même ſituation ; cet anéantiſſement ne cauſant non plus aucun mouvement ni varieté aucune à ce ciphon, ni à ce qu'il contient de Liqueur, elle y doit encore reſter en équilibre au niveau GH, comme avant cet anéantiſſement; & conſequemment y ſeroit-elle auſſi reſtée en équilibre à ce niveau GH, ſi, de quelque matiere que ce Ciphon eût été fait, on l'eût rempli juſques-là de cette Liqueur, ſans y en employer davantage dans aucun vaſe qui contînt le tout comme on l'a ſuppoſé d'abord. Donc une Liqueur quelconque miſe à niveau dans les branches quelconques de quelque Ciphon que ce ſoit, y doit toujours demeurer en équilibre à ce niveau, tant qu'elle y ſera libre. *Ce qu'il falloit* 1°. *demontrer.*

La même choſe ſe prouveroit de même quand toute la Liqueur du vaſe ABCD ſeroit glacée à la reſerve de ce qu'il y en auroit dans un canal GEMNFHQPG de Ciphon, qui reſteroit comme creuſé dans cette glace ; puiſqu'il ne s'agit ici que de l'équilibre de cette Liqueur toûjours fluide dans ce canal, & non de l'épaiſſeur de la matiere qui le renferme. FIG. 312

Autrement. Soit un Ciphon GEMNFHQPG de matiere quelconque, & de jambes GEMP, HFNQ, de directions & de cavitez à volonté, fait & placé de maniere que les ouvertures GE, FH, en ſoient à niveau, c'eſt-à-dire, dans un même plan horiſontal GH au-deſſus de ce Ciphon. Je dis que ſi on le remplit d'une Liqueur quelconque juſqu'à ces ouvertures, c'eſt àdire, juſqu'à ce niveau GH, elle y demeurera en équilibre, quelles qu'en ſoient les groſſeurs des colonnes GEMP, HFNQ.

Pour le voir, imaginons ce Ciphon vuide ainſi placé dans un vaſe quelconque ABCD plus haut que le niveau GH, au-deſſus duquel il ait (ſi l'on veut en H) un trou qui de ſon bord inferieur touche ce niveau ou plan horiſontal GH, & qui bouché d'une cheville juſte H, per-

Digitized by Google

mette de remplir de Liqueur ce vaſe ABCD juſqu'à quelqu'autre niveau ſuperieur KL, lorſque ce trou H eſt fermé, & la laiſſe deſcendre juſqu'au niveau GH, lorſqu'il eſt ouvert.

Ce trou H étant fermé, ſoit le vaſe ABCD rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'au niveau KL, il eſt viſible qu'elle n'y arrivera qu'après que le Ciphon GEMNFHQPG en ſera entierement rempli juſqu'à ſes ouvertures GE, FH, ſuppoſées au niveau GH; & que ſi ce trou H reſte fermé après que cette Liqueur ſera arrivée à cet autre niveau KL, elle y reſtera en repos ſuivant le Corol. 1. de l'Ax. 9.

Ouvrons preſentement ce trou H, qu'on ſuppoſe toucher de ſon bord inferieur le niveau GH. Il eſt pareillement manifeſte qu'en ce cas la Liqueur deſcendra de l'autre niveau KL en celui-ci GH, & qui étant arrivée, elle y demeurera, quoique ce trou H reſte ouvert, à moins que quelqu'une des colonnes de cette Liqueur, contenues juſqu'en ce niveau GH dans les branches du Ciphon, par exemple, la plus groſſe colonne GEMP ne l'emportât ſur l'autre HFNQ; ce qui ne ſçauroit être. Car en ce cas, ſi l'on referme le trou H, ce qu'il ſortiroit de Liqueur par l'ouverture FH, devenant plus haute là que le niveau GH, & conſequemment que l'ouverture GE ſuppoſée à ce même niveau, refluroit (*Ax. 9. Cor. 1.*) par cette ouverture GE en la place de celle qui s'y abaiſſeroit alors; laquelle redevenue juſqu'au bord de cette ouverture GE, continueroit d'en faire ſortir par l'autre FH, qui de ſon côté la rendroit ainſi à l'ouverture GE, & toûjours de même. Ce qui cauſeroit ainſi un mouvement perpetuel dans la Liqueur du Ciphon GEMNFHQPG, & dans la ſurface de ce qu'il en auroit de plus entre lui & le vaſe ABCD: abſurdité qui fait voir que la Liqueur dont ce Ciphon eſt rempli juſqu'au niveau GH, y doit demeurer en équilibre. De ſorte qu'y étant ſans aucune communication avec ce qu'il y en a de plus au même niveau GH entre ce Ciphon & le vaſe; & conſequemment de

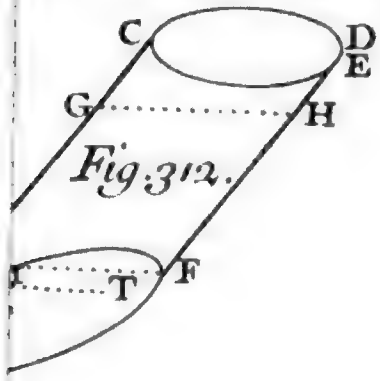


Fig. 312.

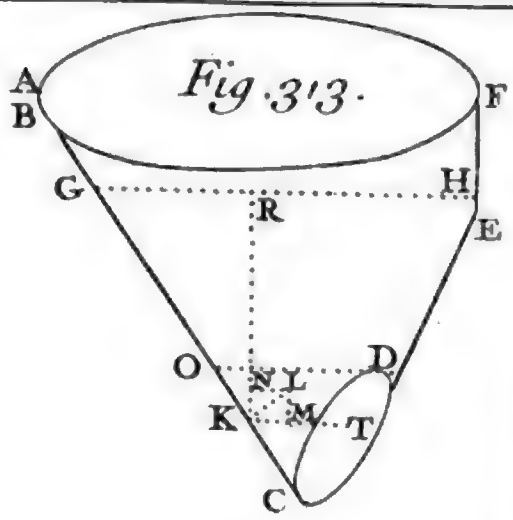
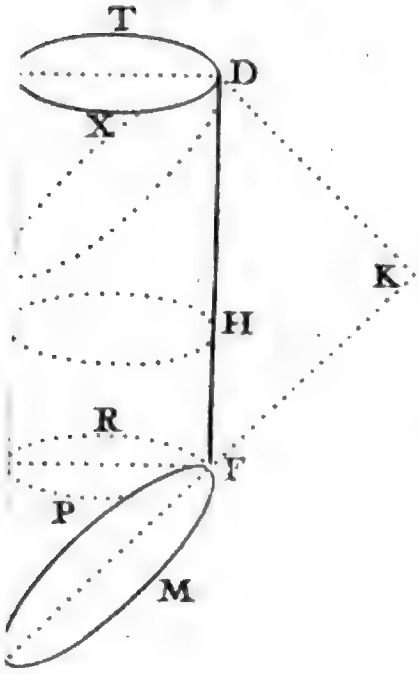


Fig. 313.

Fig. 315.



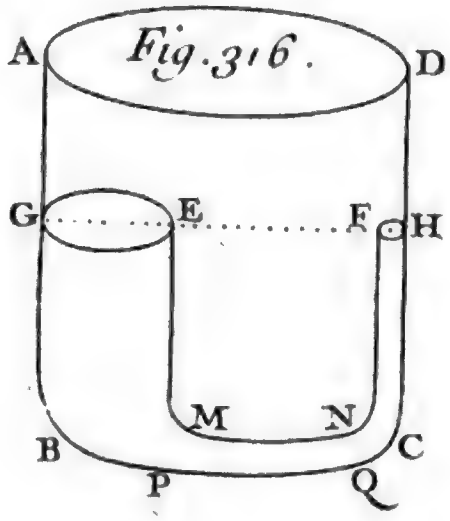
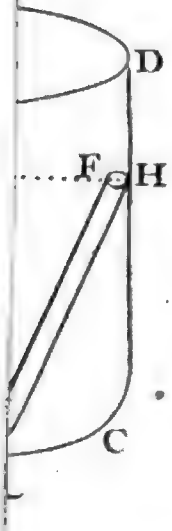


Fig. 316.



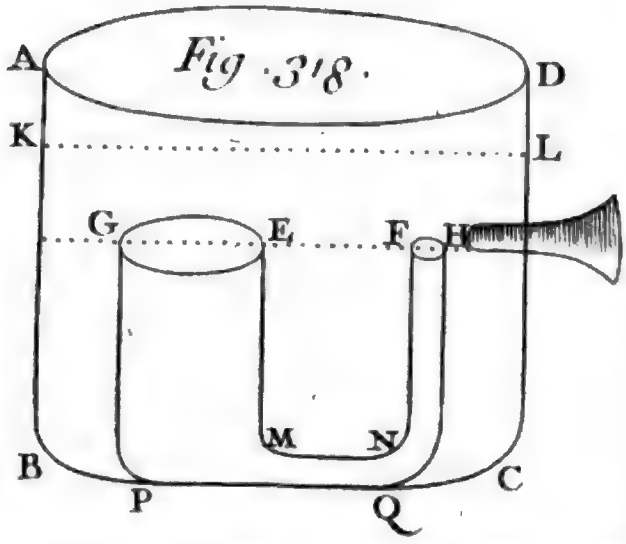


Fig. 318.

de même que s'il n'y en avoit point d'autre dans ce vaſe ABCD, & que ce vaſe lui-même ne fût plus ici; mais le Ciphon ſeul rempli de Liqueur juſqu'au niveau GH des ouvertures GE, FH, de ſes branches. Donc une Liqueur quelconque miſe à niveau dans les branches quelconques de quelque Ciphon que ce ſoit, y doit toûjours demeurer en équilibre à ce niveau tant qu'elle y ſera libre. *Ce qu'il falloit encore* 1°. *démontrer.*

PART. II. Je dis preſentement que ſi la Liqueur n'eſt pas à niveau dans les branches du Ciphon, elle s'y mettra d'elle-même, & y reſtera en équilibre. Pour le voir, ſoit un Ciphon APQB de branches quelconques AP, BQ, dans lequel ſoit une Liqueur quelconque KPQS plus haute en RS dans la branche BQ, qu'en KL dans l'autre branche AP. Soit GH le plan horiſontal auquel cette Liqueur ſeroit à niveau en GE, FH, dans ces deux branches. On vient de voir (*part.* 1.) qu'en ce cas-ci cette Liqueur quelconque demeureroit en équilibre à ce niveau; & conſequemment que les colonnes GPE, HQF, preſſeroient également alors en ſens contraires ce qu'il y auroit de cette Liqueur dans le canal PQ de communication. Or dans le cas de cette même Liqueur à hauteurs inégales en RS & en KL, dans les branches du même Ciphon APQB; ce qu'il y en auroit dans le canal PQ de communication, ſeroit plus fortement preſſé de Q vers P par la colonne RQS que par la colonne FQH, & moins preſſé de P vers Q par la colonne KPL, que par la colonne GPE. Donc en ce cas-ci de la ſurface RS de Liqueur plus élevée dans la branche BQ, que l'autre ſurface KL de la même Liqueur dans l'autre branche AP du Ciphon APQB; la Liqueur compriſe dans le canal PQ de communication, ſera plus fortement preſſée de Q vers P, que de P vers Q; & toûjours de même tant que RS ſera plus haute que KL. Donc en ce cas la ſurface RS de la Liqueur deſcendra juſqu'en FH, & l'autre ſurface KL montera juſqu'en FE; & ſi par l'impetuoſité de la deſ- FIG. 319 320.

cente de la Liqueur dans la branche BQ, la ſurface RS deſcend plus bas que FH ; & qu'en conſequence l'autre ſurface KL monte plus haut que GE : celle-ci KL redeſcendra par la même raiſon, & l'autre RS remontera, & toûjours de même juſqu'à ce que leur mouvement ceſſe ; ce qu'on voit ne pouvoir arriver qu'au niveau GH. Donc cette Liqueur d'abord inégalement haute dans les branches du Ciphon, n'y aura de repos qu'en ce niveau GH, auquel elle ſe mettra ainſi d'elle-même, & auquel, ſuivant la part. 1. elle demeurera en équilibre tant qu'elle ſera libre. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

On va voir encore d'autres preuves de ces parties 1. 2. *dans les art.* 2. 3. *du Scholie que voici.*

SCHOLIE.

Fig. 311. 312. 313. 314.

I. Voilà quelle eſt la neceſſité de l'équilibre d'une Liqueur quelconque à niveau dans les branches d'un Ciphon, quelques inégales que ſoient les groſſeurs de ces branches, & conſequemment des colonnes de cette Liqueur, qui s'y trouvent ainſi en équilibre entr'elles à ce niveau, nonobſtant l'inégalité de leurs poids. Pour voir preſentement la raiſon d'un tel effet, autant que peut le permettre le peu de connoiſſance que nous avons de la nature de la fluidité, ainſi qu'il a été remarqué dans le Scholie de l'Axiome. Soit un tuyau APBCRD recourbé en PR, ouvert par le haut en AB, & fermé en bas d'un fond CD de poſition quelconque, ſoit ce tuyau rempli de telle Liqueur qu'on voudra juſqu'en GE, laquelle preſſe le fond CD de plus en plus depuis ſon plus haut point C juſqu'au plus bas D, ſelon que les hauteurs des filets de Liqueur, qui le preſſent, vont en augmentant en ce ſens, depuis le niveau ou plan horiſontal GH prolongé vers M juſqu'aux profondeurs des differens points où ils preſſent ce fond. Soit la verticale MO moyenne arithmétique entre toutes ces hauteurs differentes ; &

Digitized by Google

conſequemment telle que multipliée par le nombre de ces hauteurs ou filets de Liqueur, le produit en ſoit égal à leur ſomme : laquelle étant proportionnelle à ce qu'ils exercent tous enſemble de force contre le fond CD ſuivant le fil inferieur du tuyau en cet endroit ; ce produit doit être auſſi proportionnel à ce total de forces, c'eſt-à-dire, à tout ce que la Liqueur GEKCDPG cauſe de preſſion, ſuivant cette direction, au fond CD d'angle quelconque avec cette direction. Or le nombre des filets de Liqueur, qui preſſent ainſi ce fond CD à plein canal, eſt égal au nombre des points de ce fond. Donc leur hauteur moyenne MO multipliée par le nombre des points de ce fond CD, c'eſt-à-dire, par ce fond lui même, eſt auſſi proportionnelle à tout ce que la Liqueur cauſe de preſſion au fond CD, ſuivant la direction de cette Liqueur en cet endroit.

II. Suivant cela, une Liqueur quelconque miſe à tel niveau GH qu'on voudra dans un Ciphon APQB de branches AP, BQ, de groſſeurs & de directions à volonté, y reſtera toujours en équilibre à ce niveau, ainſi qu'on l'a déja vû dans la part. 1. du preſent Th. 45. Car ſi l'on imagine où l'on voudra dans le canal PQ de communication une lame, laquelle lame conçûe comme une pellicule, ou comme de glace détachée des côtez de ce canal, ſoit regardée comme un fond auſſi mobile que tout le reſte parfaitement fluide de la Liqueur, & toûjours juſte de chacune des deux parties APDCRA, BQDCSB de ce Ciphon APQB ; & qu'on prenne, comme dans l'art. 1. la ligne verticale MO pour la moyenne hauteur arithmétique entre toutes les differentes hauteurs de ce que la premiere partie APDCRA du Ciphon contient de filets de cette Liqueur, qui preſſent la lame CD de P vers Q : l'on aura auſſi cette même verticale MO pour la hauteur moyenne arithméti ue entre toutes celles de ce que la ſeconde partie BQDCSB contient de filets de la la même Liqueur, qui preſſent au con- FIG. 318

traire la même lame CD de Q vers P ; puiſque les hauteurs de ces filets ſont les mêmes de part & d'autre depuis le niveau ou plan horiſontal GH, juſqu'à tous les points de la lame CD, à chacun deſquels il s'en termine par tout deux égales de part & d'autre, une de chaque côté.

Donc en appellant p, ϖ, les preſſions directement contraires qui en réſultent à la lame CD ; le précedent art. 1. donnera ici MO×CD. p :: MO×CD. ϖ. ou MO×CD. MO×CD :: p. ϖ. D'où l'on voit que les preſſions directement contraires de cette lame CD ſont ici égales entr'elles, quelques inégales que ſoient les quantitez GERCDPG, HFSCDQH, de la même Liqueur qui les cauſent par leurs poids. Donc nonobſtant l'inégalité de ces poids cette lame CD doit reſter ici en repos ; & conſequemment auſſi tout ce qu'il a de Liqueur à niveau GH dans le Ciphon APQB, laquelle doit ainſi demeurer en équilibre à ce niveau GH dans les deux branches de ce Ciphon, comme on l'a déja vu dans la part. 1. du preſent Th. 45.

III. La part. 2. de ce Théoreme 45. ſuit immédiatement auſſi du précedent art. 1. ſans y employer la part. 1. comme l'on a fait dans la démonſtration de cette partie 2. Pour cela ſoit d'abord la Liqueur à hauteurs inégales en KL, TV, dans les branches AP, BQ, du Ciphon APQB. Soit encore imaginée une lame CD de cette Liqueur dans le canal de communication PQ, la même & pour le même uſage que dans le précedent art. 2. ſoit auſſi comme dans les art. 1. 2. depuis le plan horiſontal KL prolongé vers N, la verticale NO moyenne hauteur arithmétique entre toutes les differentes hauteurs de ce que la partie APDCRA du Ciphon renferme de filets de Liqueurs, qui preſſent la lame CD de P vers Q : il eſt viſible que la verticale XO menée juſqu'en O depuis le plan horiſontal TV prolongé vers X, ſera auſſi la moyenne hauteur arithmétique entre toutes celles de

Digitized by Google

ce que l'autre partie BQDCSB du Ciphon contient de filets de la même Liqueur, qui preſſent au contraire la même lame CD de Q vers P.

Cela poſé, ſi l'on appelle encore p la premiere de ces preſſions, qui eſt de P vers Q; & ϖ, la ſeconde qui eſt au contraire de Q vers P; l'art. 1. donnera ici NO×CD. XO×CD :: p. ϖ. D'ou l'on voit que pour que ces preſſions directement contraires p, ϖ, ſoient égales entr'elles, & que la lame CD demeure en repos avec tout ce que le Ciphon APQB contient de Liqueur, il faudroit ici NO=XO, c'eſt-à-dire, que les ſurfaces TV, KL, de cette Liqueur y fuſſent à hauteurs égales, comme au niveau GH; & qu'ainſi la premiere TV deſcendît en HF, & que l'autre KL montât en GE, c'eſt-à-dire, que l'une & l'autre de ces ſurfaces TV, KL, de la Liqueur, vinſſent à ce niveau : lequel cas rendant XO=MO=NO, & changeant ainſi l'analogie précedente en MO×CD. MO×CD :: p. ϖ. la Liqueur ainſi venue de part & d'autre à ce niveau GH, y reſteroit en équilibre comme dans le précedent art. 2. ainſi qu'on l'a déja vû dans la démonſtr. de la par. 2. du preſent Th. 45.

IV. Puiſque dans les art. 2. 3. en quelqu'endroit du canal IQ de communication des branches AP BQ du Ciphon APQB que ſe trouve la lame CD de la Liqueur dont on ſuppoſe ce Ciphon rempli juſqu'à telles hauteurs qu'on voudra dans ſes branches; les preſſions des côtez ou faces oppoſées de cette lame CD, ſont entr'elles (*art.* 1.) en raiſon des produits faits de cette lame, multipliez par les hauteurs moyennes arithmétiques chacune entre celles de tout ce qu'il y a de filets de Liqueur qui preſſent cette lame de chaque côté: on voit que ce qu'il y a de cette Liqueur qui preſſe de chaque côté cette même lame CD, équivaut en force contr'elle à un cylindre de la même Liqueur, qui auroit CD pour baſe, & pour hauteur la moyenne arithmétique entre toutes

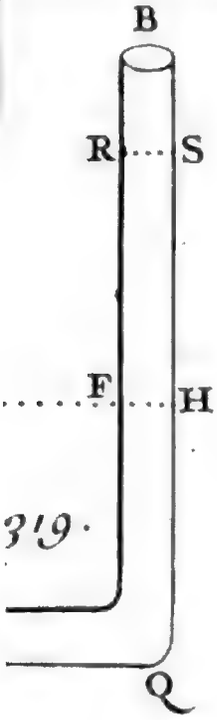
les hauteurs de ce qu'il y a de filets de cette Liqueur, qui preſſent cette lame CD de ce côté-là. Donc ces deux produits étant égaux de part & d'autre de cette même lame en cas (*art.* 2.) de la Liqueur à même niveau dans les branches du Ciphon, & en cas (*art.* 3.) d'équilibre de cette Liqueur dans ces branches: ſçavoir, l'un & l'autre (*art.* 2. 3.) =MO×CD par rapport au niveau GH dans chacun de ces deux cas; les preſſions directement contraires *p*, ϖ, de la lame CD, leſquelles ſe trouvent en l'un & en l'autre (*art.* 2. 3.) égales entr'elles, ſont l'effet des colonnes de même Liqueur égales en groſſeurs & en hauteurs. Ce qui conſideré, fait évanoüir tout le merveilleux qui paroît d'abord dans l'équilibre d'une Liqueur quelconque à niveau dans les branches d'un Ciphon qui les a de groſſeurs inégales.

Ce merveilleux vient de ce qu'on croit que tout ce qu'il y a de Liqueur dans la groſſe branche, eſt employé contre tout ce qu'il y en a dans la plus menue, & reciproquement: de maniere que lorſque cette Liqueur eſt à niveau dans ces deux branches du Ciphon, on en regarde l'équilibre, qui (*art.* 2. *&* *part.* 1.) s'y trouve alors comme entre deux forces inégales, au lieu qu'on voit ici qu'il eſt toûjours entre deux forces égales, de même que ſi les branches du Ciphon étoient de groſſeurs égales.

Dans l'article 1. *de ce Scholie-ci, conformément à l'article* 3. *du Scholie de l'Axiome, l'on a ſuppoſé à l'ordinaire ſur le rapport de l'experience, que la nature de la fluidité des Liqueurs eſt telle que* les preſſions de l'eau (& ainſi des autres Liqueurs) comprimée par ſa ſeule peſanteur dans un reſervoir ou vaſe quelconque, ſont égales entr'elles en tous ſens à diſtances égales de ſon niveau: *Et de-là on a conclu dans le précedent article* 1. *que* la preſſion ou force dont le fond de poſition quelconque d'un vaſe de figure quelconque, rempli de Liqueur juſ-

qu'à quelque niveau que ce ſoit, eſt toûjours proportionnelle au produit de ce fond multiplié par la hauteur moyenne arithmétique de cette Liqueur, ou de ſon niveau au-deſſus de differens points de ce même fond. *Cela revient aux Théoremes* 43. 44. *qui n'en ſont même que des Corollaires.*

ΑΝΑΓΝΩΣΤΗΣ ΕΙΜΙ ΤΟΥ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΠΟΣΤΟΛΟΝ ΠΑΥΛΟΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΟΥ ΚΑΙ ΔΙΑΚΟΝΟΥ ΤΗΣ ΕΝ ΚΟΡΙΝΘΩ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣ ΤΟΥ ΘΕ



319.

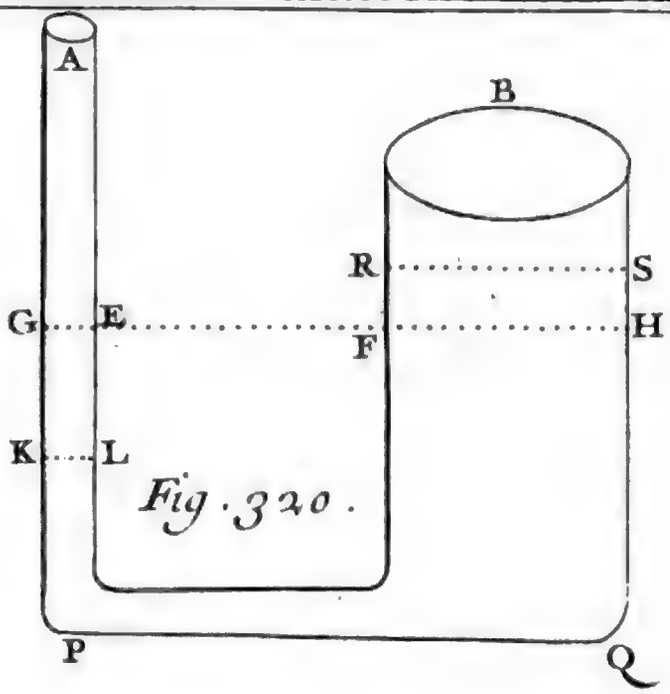


Fig. 320.

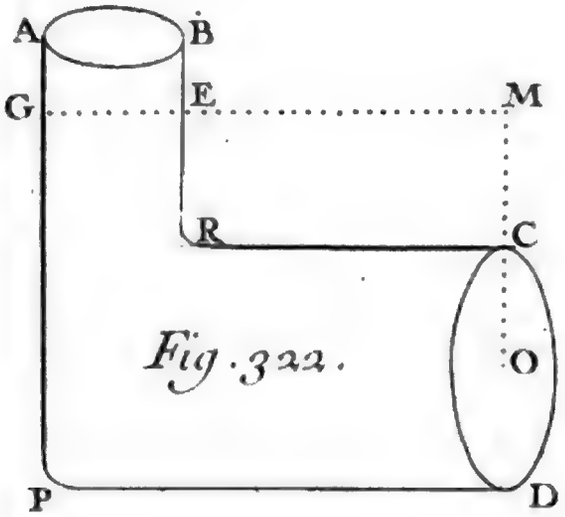


Fig. 322.

Fig. 324.

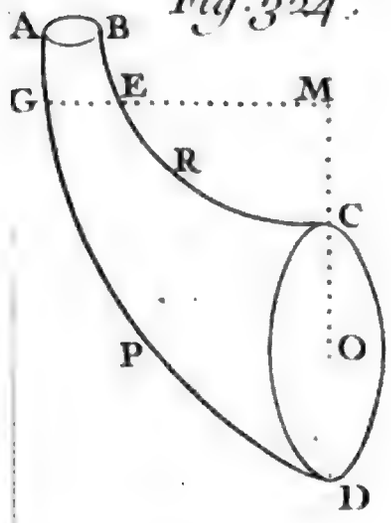
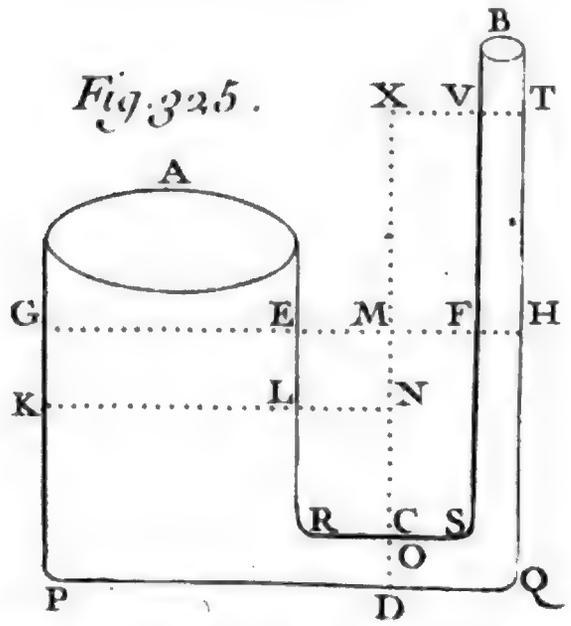


Fig. 325.



NOUVELLE MECANIQUE.

SECONDE PARTIE.

OU L'ON APPLIQUE LA THEORIE précedente à la réſolution de pluſieurs Problêmes ; à la démonſtration de quelques Machines, & à l'examen de l'opinion de M. Borelli, ſur les proprietez des Poids ſuſpendus par des Cordes.

APPLICATION
DE LA
NOUVELLE MECANIQUE
A LA RESOLUTION
DE PLUSIEURS PROBLEMES.

DANS la ſuite lorſqu'il s'agira de poids, on les ſuppoſera de directions paralleles entr'elles, & chacun de direction par tout parallele à elle-même, à moins qu'on n'avertiſſe du contraire. Et en parlant de cordons, auſquels autant de puiſſances ſeront appliquées, nous les ſuppoſerons toûjours tous attachez enſemble par un ſeul & même nœud commun, juſqu'à ce que nous avertiſſions du contraire.

PROBLEME I.

Une force quelconque étant donnée, en trouver une infinité d'autres, qui trois à trois appliquées à des cordes perpendiculaires entr'elles, faiſant équilibre avec celle-là. FIG. 316.

Ce qui revient à

Une force quelconque étant donnée ſuivant AE, la décompoſer en trois autres de directions perpendiculaires entr'elles.

SOLUTION.

Autour de la diagonale AE prise à volonté sur la direction donnée de la puissance donnée, soit le parallelogramme rectangle quelconque EBAF, dont le côté AF soit aussi la diagonale d'un autre parallelogramme rectangle quelconque FCAD dans un plan perpendiculaire à celui du premier EBAF. Je dis que la force quelconque suivant AE, se décomposera en trois autres suivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles; & cette force suivant AE, sera ces derivées suivant ces trois directions AB, AC, AD, comme AE est à ces trois côtez des parallelogrammes BF, CD.

DEMONSTRATION.

Puisque AE, AF, sont les diagonales de ces deux parallelogrammes, il est manifeste que la force suivant AE, se decomposera en deux autres suivant AB, AF, ausquelles elle sera comme AE à AB, AF; & que la resultante suivant AF, se decomposera de même en deux autres suivant AC, AD, ausquelles elle sera comme AF à AC, AD. Donc la premiere force donnée suivant AE, se décomposera ainsi en trois autres suivant AB, AC, AD, ausquelles elle sera comme AE est à ces trois côtez des parallelogrammes BF, CD. Or ces trois côtez AB, AC, AD, sont perpendiculaires entr'eux: puisque les plans des parallelogrammes BF, CD, sont supposez perpendiculaires entr'eux, & que AB supposez perpendiculaires à leur section commune AF, l'est aussi aux lignes AC, AD, qu'on suppose perpendiculaires entr'elles. Donc la force donnée suivant AE se trouve ici decomposée en trois autres suivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles; & est à chacune de ces trois forces derivées, comme AE est à chacune de ces trois lignes AB, AC, AD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

Si l'on veut que les trois puiſſances derivées ſuivant les directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entre-elles, ſoient égales entr'elles, la direction AE de la puiſſance donnée étant laiſſée arbitraire; ſoient faites AF, BE, paralleles entr'elles, & AB qui les rencontrent angles droits: enſuite ſur BE ſoit priſe BG=AB; & après avoir fait du centre A, & du rayon AG, l'arc de cercle GF qui rencontre AF en F: de ce point F ſoit menée FE parallele à AB, qui rencontre BG prolongée en E, par lequel point E ſoit menée la diagonale AE du parallelogramme rectangle BF, autour du côté AF, comme diagonale, ſoit fait le quarré CD dans un plan perpendiculaire à celui du parallelogramme BF & le côté AF, ſera la ſection commune de ces deux plans orthogonaux l'un à l'autre. Fig. 178

Il eſt déja viſible, ſuivant la demonſtration precedente, que la force donnée ſuivant AE ſe decompoſe ici en trois autres ſuivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles, & que cette force ſuivant AE eſt à chacune de ces trois forces derivées ſuivant ces trois directions AB, AC, AE, comme AE à chacune de ces trois lignes: de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à demontrer que ces trois lignes ſont égales entr'elles pour faire voir que les forces derivées ſuivant ces directions, le ſont auſſi entr'elles. Or cela eſt aiſé, puiſqu'ayant (*Hyp.*) l'angle B droit, & AB=BG, on aura $2\times\overline{AB}^2=\overline{AG}^2=\overline{AF}^2$ (à cauſe du quarré CD) $=\overline{AD}^2+\overline{FD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2$. d'où reſulte $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}^2$; & conſequemment AB=AC=AD. *Ce qui reſtoit ici à démontrer.*

COROLLAIRE II.

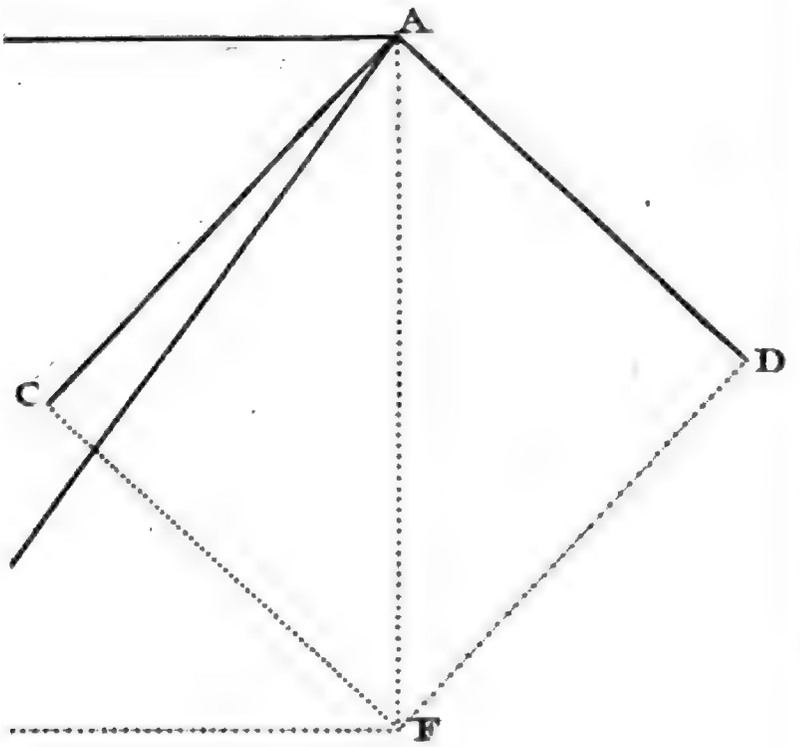
Fig. 317. Pour trouver la même choſe, lorſque AE eſt donnée, ſoit ſur le diametre AE un demi-cercle AFE, dans lequel ſoit inſcrite une corde AF. AE :: $\sqrt{\frac{1}{3}}$. 1. Soit achevé le parallelogramme AFEB, dont le côté AF ſoit la diagonale d'un quarré CD fait ſur un plan perpendiculaire à celui de ce parallelogramme AFEB. Il eſt encore viſible par la demonſtration precedente, que la force de direction donnée AE, ſera encore ici decompoſée en trois autres, ſuivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles; & que cette force eſt à chacune des derivées ſuivant ces directions AB, AC, AD, comme AE eſt à ces trois lignes; de ſorte qu'il ne s'agit plus que de faire voir que ces trois lignes ſont égales entr'elles; ce qui eſt aiſé: car puiſque (*Hyp.*) AF. AE :: $\sqrt{\frac{1}{3}}$. 1. ſi l'on prend AE = 1, l'on aura AF = $\sqrt{\frac{1}{3}}$; & conſequemment (à cauſe de l'angle droit AFE) FE = $\sqrt{\frac{1}{3}}$. De plus AF ($\sqrt{\frac{1}{3}}$) étant la diagonale du quarré CD, l'on aura auſſi ſes côtez FD, AD, chacun = $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Donc FE = FD = AD. Or FE = AB, FD = AC. Donc AB = AC = AD. *Ce qui reſtoit à démontrer.*

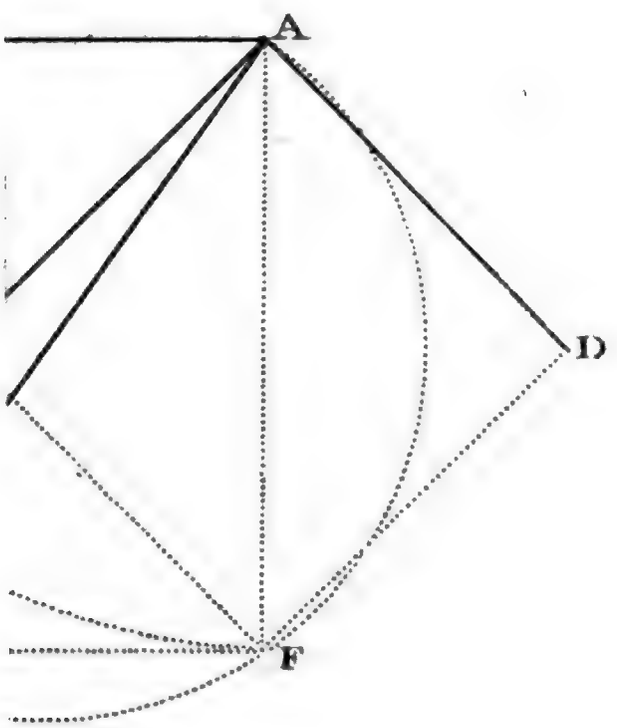
PROBLEME II.

Fig. 318. *Trois puiſſances P, Q, R, étant données, ou de rapports donnez entr'elles, appliquées à trois cordons AP, AQ, AR, diriger ces cordons avec ces trois puiſſances, de maniere qu'elles faſſent équilibre entr'elles.*

SOLUTION.

On a vû (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) que pour la poſſibilité de ce Problême, la ſomme de deux quelconques de ces trois puiſſances, doit être plus grande que la troiſiéme.


A
C
D
F


A
D
F

Cela posé, soit à volonté la direction d'une quelconque de ces trois puissances, par exemple, de la puissance Q, sur une partie quelconque AD de cette direction QA, prolongée vers D, soit fait le triangle ABD, dont les côtez AB, BD, soient au troisiéme AD, comme les puissances données P, R, sont à la puissance Q pareillement donnée, soient ensuite la puissance P dirigée suivant AB, & la puissance R dirigée suivant AR parallele à BD. Je dis que ces deux puissances P, R, & la puissance Q, ainsi dirigées suivant AP, AR, AQ, feront équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit achevé le parallelogramme BC, en faisant DC parallele à AB; ce qui rend AC=BD. Donc par la solution ayant AB, BD, à AD, comme les puissances P, R, sont à la puissance Q; les côtez AB, AC, du parallelogramme BC, sont pareillement à sa diagonale AD, comme les puissances P, R, sont à cette puissance Q. Donc (*Th.* 1. *part.* 5.) ces trois puissances P, R, Q, appliquées aux trois cordons AP, AR; AQ, dirigez suivant ces trois lignes AB, AC, AD, seront ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME III.

Soient deux puissances données Q, R, avec deux directions AR, AP, pareillement données. On demande une troisiéme puissance P à diriger suivant AP, & une troisiéme direction AQ de la puissance donnée Q; telles que les trois puissances P, R, Q, appliquées à trois cordons dirigées suivant AP, AR, AQ, fassent équilibre entr'elles. Fig. 329. 330. 331.

SOLUTION.

Après avoir pris à volonté AC sur la droite AR de position donnée, & ensuite sur elle prolongée pris du côté de A,

une autre partie AE. AC : : Q. R. dont les puiſſances Q, R, ſont auſſi données ; ſoit fait du rayon AE un arc de cercle ED, qui rencontre en D la droite OO menée par le point C parallelement à la direction donnée AP de la puiſſance requiſe P.

Cela fait, je dis que ſi de ce point D par A on mene la droite DAQ, & qu'on acheve le parallelogramme ACDB, l'on aura AQ pour la direction requiſe de la puiſſance donnée Q ; & qu'une puiſſance qui ſera aux données Q, R, comme AB eſt à AD, AC, ſera auſſi la requiſe P, qui appliquée ſuivant la direction donnée AP, ſera équilibre avec ces deux autres Q, R, appliquées de même ſuivant AQ, AR. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Ces trois puiſſances P, R, Q, étant ainſi appliquées à leurs cordons AP, AR, AQ, ſuivant AB, AC, AD, & entr'elles comme les côtez AB, AC, & la diagonale AD du parallelogramme ABDC, la part. 5. du Th. 1. fait voir qu'elles ſeront alors toutes trois en équilibre entre-elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

On voit que ſelon que le cercle ED décrit du centre A, & du rayon AE = AD, rencontre CO parallele à AP, en un ou en deux points D, *d*, differens de C, le Problême n'aura qu'une ou deux ſolutions. Or,

Fig. 330. 331. 1°. Lorſque AC eſt plus grande que AE, comme dans la Fig. 330. ou égale à elle, comme dans la Fig. 331. dans leſquelles Fig. 330. 331. ce cercle ne rencontre CO qu'en un ſeul point D, different de C. Donc dans chacun de ces deux cas le Problême n'aura point d'autre ſolution que la precedente ; c'eſt-à-dire, que la direction requiſe de la puiſſance donnée Q, n'y pourra être que ſuivant l'unique DA prolongée vers Q ; & que la puiſſance P auſſi requiſe ſuivant AP pour faire équilibre avec

les

Digitized by Google

les données R, Q, dirigées ſuivant AR, AQ, y devra neceſſairement être à chacune d'elles comme le côté AB du parallelogramme ABDC eſt à ſon autre côté AC & à ſa diagonale AD. Donc la precedente ſolution ayant AC. AE::R. Q. le Problême n'aura auſſi que cette unique ſolution, lorſque la puiſſance donnée R ſera plus grande que l'autre donnée Q, ou qu'elle lui ſera égale.

2°. Mais lorſque AC eſt moindre que AE=AD, ainſi que dans la Fig. 329. le cercle ED y rencontre OO en deux points D, *d*, differens de C. Donc le Problême y aura deux ſolutions: l'une comme la precedente, dans laquelle le point D donne la droite DAQ pour une direction de la puiſſance donnée Q, & une puiſſance P, qui dirigée ſuivant AP, doit être aux deux données R, Q, comme AB eſt à AC, AD, pour faire équilibre avec elles dirigées ſuivant AR. AQ. FIG. 329.

L'autre ſolution donnera de même *dAq* pour une autre direction de la même puiſſance donnée Q placée en *q*, & une autre puiſſance P, qui dirigée comme l'autre ſuivant AP, doit être ici (en achevant le parallelogramme *Abd*C) aux puiſſances données R, Q, comme A*b* eſt à AC, A*d*, pour faire auſſi équilibre avec ces mêmes puiſſances R, Q, dirigées ſuivant AR, A*q*. Cette ſeconde ſolution ſe demontrera comme la premiere, la demonſtration precedente convenant également à toutes les deux, en employant ici le parallelogramme A*bd*C comme l'autre ABDC a été employé là.

Puiſque le Problême eſt ici (*Fig.* 329.) ſuſceptible de ces deux ſolutions, lorſque AC eſt moindre que AE, & qu'elles exigent également AC. AE::R. Q. Ce Problême eſt auſſi ſuſceptible de deux ſolutions, lorſque des deux puiſſances données R, Q, la premiere R eſt moindre que la ſeconde Q. FIG. 329.

3°. Donc (*nomb.* 1. 2.) le preſent Probl. 3. n'eſt ſuſceptible que d'une ſolution, telle que la premiere du nomb. 1. lorſque des deux puiſſances données R, Q, la premiere R eſt plus grande que la ſeconde Q, comme FIG. 329. 330. 334.

dans la Fig. 330. ou égale à elle, comme dans la Fig. 331. & de deux ſolutions, quand la premiere R de ces deux puiſſances eſt plus petite que la ſeconde, comme dans la Fig. 329.

PROBLEME IV.

FIG. 332. 333. *Trois puiſſances P, Q, R, ou trois poids des mêmes noms, étant donnez, appliquez à trois cordons AEP, AQ, AFR, ou les rapports de ces trois puiſſances de la Fig. 332. ou de ces trois poids de la Fig. 333. étant ſimplement donnez avec deux points fixes dans la Fig. 332. & deux pivots ou poulies de mêmes noms dans la Fig. 333. par leſquels points fixes ou pivots E, F, l'on veut que paſſent les cordons de deux quelconques P, R, de ces trois puiſſances ou poids: on demande les directions que leurs trois cordons doivent avoir en partant de leur nœud commun A, pour mettre ces trois puiſſances, ou ces trois poids en équilibre entr'eux.*

SOLUTION.

On ſçait (*Th. 1. Corol. 6. art. 1.*) que pour cela la puiſſance Q, ou le poids de ce nom, doit être moindre que la ſomme des deux autres.

Pour cela ſoit dans la Fig. 332. une droite quelconque GK en même plan avec la droite, qui paſſe par les points donnez E, F, & de poſition quelconque differente d'elle dans la Fig. 332. & parallele à la direction du poids Q dans la Fig. 333. ſur cette droite de grandeur arbitraire GK des Fig. 332. 333. ſoit fait un triangle KHG auſſi en même plan avec les points donnez E, F, duquel triangle les deux côtez KH, HG, ſoient au premier GK, comme les puiſſances ou les poids donnez P, R, ſont à Q pareillement donné. Prenant enſuite les poulies ou les pivots E, F, de la Fig. 333. pour des points fixes, tels que ſont E, F, dans la Fig. 332. De ces points E, F, dans chacune de ces deux Fig. 332. 333. ſoient menées les droites EA parallele à HK, & FA parallele à GH. Enfin par le point A, où ces deux droites EA, FA, ſe rencontrent,

Digitized by Google

ſoit AQ parallele à GK dans chacune des Fig. 332. 333.

Cela fait, je dis que ſi l'on dirige ſuivant ces trois droites AE, AF, AQ, les cordons des trois puiſſances ou poids P, R, Q, il y aura équilibre entr'elles dans la Fig. 332. & entr'eux dans la Fig. 333. deſquelles puiſſances ou poids les deux P, R, auront leurs directions par les points donnez E, E. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Autour de AD, portion quelconque de QA prolongée vers D, comme diagonale, ſoit imaginé un parallelogramme BC, fait de côtez AB, AC, pris ſur les directions AE, AF, des cordons AEP, AFP, continues en lignes droites par les points donnez E, F, dans la Fig. 332. & qui paſſent par-deſſus les poulies ou pivots E, F, pareillement donnez de poſition dans la Fig. 333. Ce parallelogramme BC, qui a par conſtruct. ſa diagonale AD parallele à KG, & ſon côté AC parallele à HG, aura le triangle ABD ſemblable au primitif KHG; & en conſequence les côtez AB, BD, AD du premier ABD de ces deux triangles, ſont ici proportionnels aux côtez KH, HG, KG, de l'autre triangle KHG; qui les a auſſi (*conſtr.*) proportionnels aux puiſſances ou aux poids P, R, Q. Donc les puiſſances P, R, ſont ici à la puiſſance Q dans la Fig. 332. & les poids P, R, au poids Q dans la Fig. 333. comme les côtez AB, BD, du triangle ABD, ſont à ſon troiſiéme côté AD, c'eſt-à-dire (à cauſe de AC=BD) comme les côtez AB, AC, du parallelogramme BC, ſont à ſa diagonale AD. Par conſequent (*Th.* 1. *part.* 5.) il y aura ici équilibre tant entre les trois puiſſances P, R, Q, de la Fig. 332. qu'entre les poids de mêmes noms dans la Fig. 333. deſquelles puiſſances ou poids, les deux P, R, auront leurs directions par les points donnez E, F: le tout ainſi qu'on l'exigeoit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

I. Cette derniere condition, ſuivant laquelle on exi-

geoit que dans l'équilibre demandé entre les trois puiſſances ou poids donnez P, R, Q, les directions de P, R, paſſaſſent par les points donnez fixes E, F, n'eſt ici rigoureuſement obſervée que dans le cas des puiſſances de la Fig. 332. & n'approche de cette rigueur dans le cas des poids de la Fig. 333. qu'autant que la petiteſſe des poulies ou des pivots E, F, qui s'y trouvent, approche de l'infinie petiteſſe de ces points, pour leſquels nous les avons priſes juſqu'ici.

Fig. 333. II. Mais ſi l'on ne veut pas prendre ainſi ces poulies ou ces pivots E, F, de la Fig. 333. pour de veritables points, & qu'on veuille ſeulement trouver les directions que les cordons des trois poids donnez P, R, Q, doivent avoir en partant de leur nœud commun A, pour mettre ces trois poids en équilibre entr'eux ſur des poulies E, F, données de poſition & de grandeurs quelconques, par-deſſus leſquelles les cordons des deux premiers poids P, R, doivent paſſer. Voici la ſolution de cet autre Problême, qui fera voir, que ſi outre cela on vouloit que les directions des deux cordons AEP, AFR, des poids P, R, paſſaſſent par deux points donnez ſur les poulies E, F, ou ailleurs, le Problème en ſeroit impoſſible, à moins que ces deux points ne fuſſent heureuſement donnez dans ces deux directions que la direction déterminée du poids Q, rend auſſi déterminées, ſans permettre de les faire paſſer par où l'on veut, comme l'indéterminée de la puiſſance Q de la Fig. 332. le vient de permettre des directions des puiſſances P, R. Quelque clair que tout cela ſoit, on le verra encore mieux dans le Schol. du Probl. 5.

PROBLEME V.

Fig. 334. *Si l'on veut preſentement avoir égard aux grandeurs des poulies, imaginon-en deux VY, XZ, de rayons EV, FX, donnez de grandeurs quelconques dans un plan vertical, & mobiles dans ce plan autour des centres fixes E, F, donnez de poſition. Soient encore trois poids donnez P, R, Q, appli-*

Digitized by Google

quez à trois cordons AVYP, AXZR, AQ, dont les deux premiers AVYP, AXZR, doivent paſſer par-deſſus les poulies VY, XZ. On demande la ſituation de leurs parties AV, AX, propres à mettre leurs poids P, R, en équilibre avec le poids Q.

SOLUTION.

Je repete encore que pour cet équilibre chacun de ces trois poids doit être (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) moindre que la ſomme des deux autres.

Cela poſé, ſoit fait ſur une verticale quelconque GK dans le plan des poulies VY, XZ, un triangle GHK, dont les deux côtez KH, HG, ſoient au troiſiéme GK, comme les poids donnez P, R, ſont au donné Q. Soient enſuite menées les droites LS parallele à KH, & MT parallele à HG; ſur leſquelles des centres E, F, des poulies VY, XZ, ſoient menées les perpendiculaires ES, FT, qui prolongées des côtez de E, F, rencontrent en V, X, les circonferences de ces mêmes poulies; auſquels points V, X, ſoient enfin leurs tangentes VA, XA, qui ſe rencontrent en A.

Cela fait, je dis que ſi l'on met en ce point A le nœud commun des cordons AVYP, AXZR, AQ, bandez par les poids P, R, Q, & dont les deux premiers paſſent par-deſſus les poulies VY, XZ; ces trois poids y demeureront en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Puiſque (*conſtr.*) les droites AV, AX, ſont tangentes en V, X, des poulies VY, XZ; & conſequemment ſont perpendiculaires à leurs rayons VE, XF, qui prolongez vers S, T, le ſont auſſi (*conſtr.*) en ces points aux droites LS, MT; ces autres droites AV, AX, ſont paralleles chacune à chacune des droites LS, MT, ſçavoir, AV à LS, & AX à MT. Or (*conſtr.*) LS l'eſt à KH, & MT à HG. Donc AV eſt auſſi parallele à KH, & AX à HG. Or, à cauſe de GK ſuppoſée parallele à AQ, ſi l'on prolonge celle-ci vers D, & qu'autour de ſa partie quelconque AD

(comme diagonale) l'on faſſe le parallelogramme ABDC, dont les côtez AB, AC, ſont ſur AV, AX; ce parallelogramme aura auſſi AD parallele à KG, & BD parallele à AC, ou à AX. Donc ſon triangle ABD eſt équiangle à KHG; & conſequemment ce triangle ABD à ſes côtez AB, BD, AD, proportionnels à ceux KH, HG, KG, de KHG. Or (*conſtr.*) ce triangle-ci KHG à ces mêmes côtez KH, HG, KG, en raiſon des poids P, R, Q. Donc l'autre triangle ABD a auſſi ſes côtez AB, BD, AD, en raiſon de ces mêmes poids P, R, Q; par conſequent le parallelogramme BC, ayant AC=BD, donne pareillement ici AB, AC, AD, en raiſon de ces poids donnez P, R, Q; ce qui y rend les deux premiers P, R, au troiſiéme Q, comme les deux côtez AB, AC, du parallelogramme BC, ſont à ſa diagonale AD. Donc (*Th.* 1. *art.* 5.) ces trois poids P, R, Q, doivent ici demeurer en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Cet équilibre reſultant de ce que le parallelogramme BC ſe trouve ici avoir ſes côtez AB, AC, & ſa diagonale AD, en raiſon des poids donnez P, R, Q; & ces rapports entre AB, AC, AD, dépendant de ceux des angles des trois cordons entr'eux, leſquels rapports d'angles ſeroient autres qu'ici, ſi l'on plaçoit le nœud commun de ces trois cordons ailleurs que dans le point A, qu'on lui a trouvé dans la ſolution. On voit que pour l'équilibre ici requis entre les poids donnez P, R, Q, ce point A eſt l'unique où le nœud commun de leurs trois cordons puiſſe être placé; & qu'ainſi les directions ſuivant AV, AX, ſont les ſeules ſuivant leſquelles les poids P, R, puiſſent ici faire équilibre avec le poids Q. De ſorte que ſi outre ce que deſſus l'on exigeoit ces directions des poids P, R, par des points qui fuſſent hors de ces lignes AV, AX, le Problême ſeroit alors impoſſible, ainſi qu'on le vient de dire dans l'art. 2. du Schol. du précedent Probl. 4.

Digitized by Google

Fig. 329.

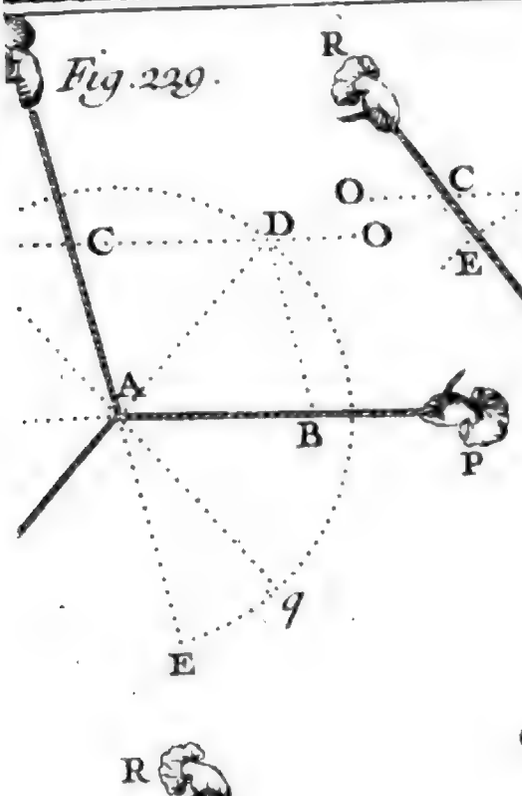
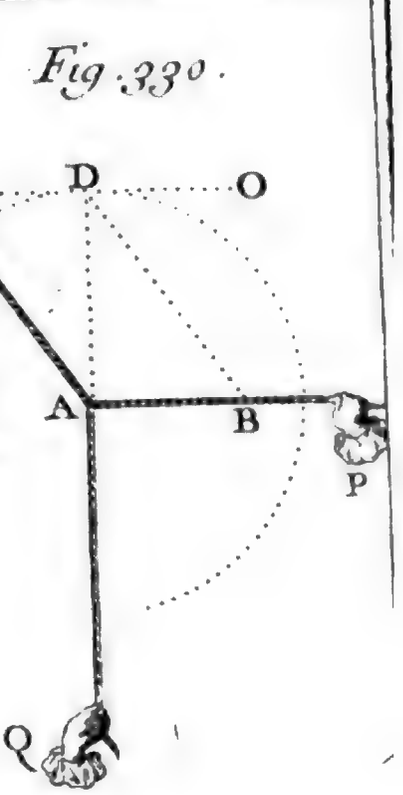


Fig. 330.



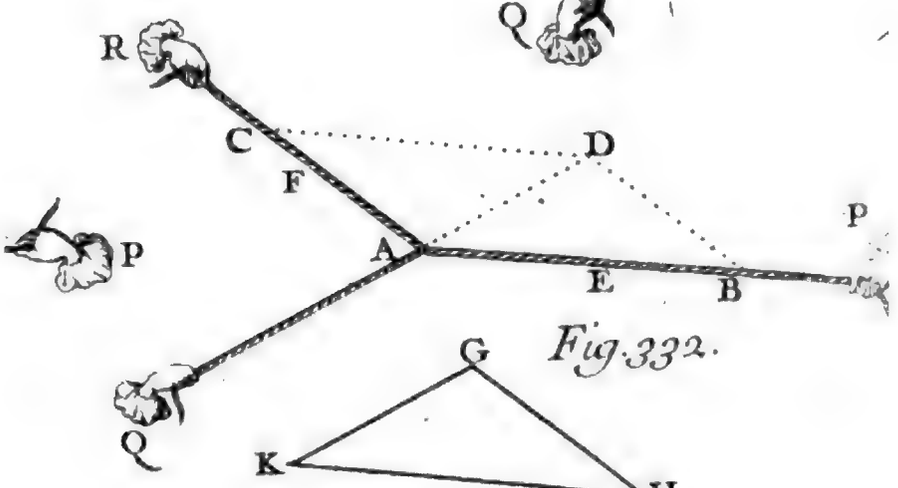
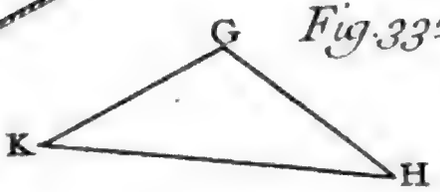


Fig. 332.



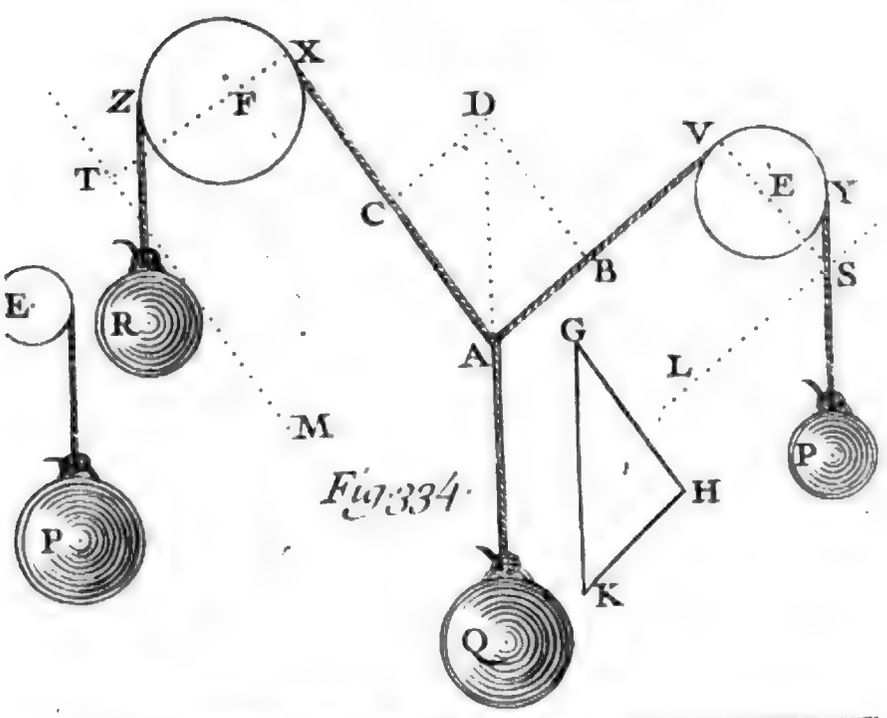


Fig. 334.

Digitized by Google

PROBLEME VI.

Trois puiſſances P, Q, R, étant données à volonté, les appliquer à trois cordons, de maniere qu'elles faſſent équilibre entr'elles ſuivant des directions qui paſſent par trois points A, B, C, donnez auſſi à volonté en toute autre poſition qu'en ligne droite. Fig. 339.

SOLUTION.

Il eſt encore ici à remarquer (*Th.* 1. *Corol.* 6. *part.* 1.) que pour cet équilibre chacune des puiſſances données P, Q, R, doit être moindre que la ſomme des deux autres.

Cela poſé, par deux A, B, des trois points donnez A, B, C, ſoit la droite AB, ſur laquelle ſoit le triangle AFB, dont les trois côtez AB, AF, BF, ſoient entr'eux comme les trois puiſſances données R, Q, P. Après avoir circonſcrit le cercle AFBE à ce triangle AFB, du troiſiéme point donné C ſoit menée par F la droite CF, qui rencontre encore la circonference de ce cercle en quelque point E de l'arc AEB.

Cela fait, je dis que ſi l'on met en E le nœud commun des trois cordons auſquels les puiſſances données P, Q, R, doivent être appliquées, & qu'on les dirige ſuivant EA, EB, FC, prolongée vers R; ces trois puiſſances P, Q, R, demeureront en équilibre entr'elles ſuivant ces directions EP, EQ, ER, qui paſſent ainſi par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Puiſque (*conſtr.*) les trois côtez BF, AF, AB, du triangle AFB ſont entr'eux comme les trois puiſſances données P, Q, R; & auſſi entr'eux comme les ſinus des angles BAF, ABF, AFB, qui leur ſont oppoſez dans ce triangle AFB: ces trois puiſſances P, Q, R, ſont pareillement entr'elles comme ces trois ſinus. Or ces trois ſinus des angles BAF, ABF, AFB, ſont les mêmes que ceux des an-

gles BEF, AEF, AEB : puiſque de ces ſix angles, tous à la circonference du cercle AFBE, les deux BAF, BEF, appuyez ſur le même arc BF, ſont égaux entr'eux ; que les deux ABF, AEF, appuyez ſur le même arc AF, ſont auſſi égaux entr'eux ; & que les deux AFB, AEB, ſont complemens l'un de l'autre à deux droits. Donc les trois puiſſances données P, Q, R, ſont auſſi entr'elles comme les ſinus des angles BEF, AEF, AEB ; c'eſt-à-dire, comme les ſinus des angles QER, PER, PEQ, les deux premiers de ces trois-ci étant complemens à deux droits des deux premiers des trois autres, & le troiſiéme étant le même de part & d'autre. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 20.) ces trois puiſſances données P, Q, R, demeureront ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions EP, EQ, ER, qui (*conſtr.*) paſſent par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Sans le ſecours des Sinus.

Si l'on fait BM parallele à EA, & qui rencontre la droite EF en quelque point M, l'on aura le triangle EBM, lequel ayant les angles BEM=BEF=BAF, & BME=AEF=ABF, ſera ſemblable au triangle AFB ; & conſequemment aura ſes trois côtez BM, EB, EM, en raiſon des trois côtez BF, AF, AB, de cet autre triangle AFB, leſquels ſont (*conſtr.*) entr'eux comme les trois puiſſances données P, Q, R. Donc ces trois puiſſances ſont auſſi entr'elles comme les trois côtez BM, EB, EM, du triangle EBM. Par conſequent ſi l'on acheve le parallelogramme BMNE, qui donne EN=BM, l'on aura ici les puiſſances P, Q, à la puiſſance R, comme les côtez EN, EB, à la diagonale EM de ce parallelogramme BMNE. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) ces trois puiſſances données P, Q, R, ſeront ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions EP, EQ, ER, qui (*conſtr.*) paſſent par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

SCHOLIE.

Digitized by Google

SCHOLIE.

I. On voit que tant que le troiſiéme C des trois points donnez A, B, C, ſe trouvera quelque part dans quelqu'un des angles AFB, GFH, oppoſez au ſommet ; le nœud commun E des trois cordons EP, EQ, ER, qui doivent paſſer par ces trois points dans l'équilibre requis, ſera toûjours quelque part ſur l'arc circulaire AEB compris entre les deux autres points donnez A, B.

II. On voit auſſi que ſi ce troiſiéme point donné C ne ſe trouve dans aucun des angles AFB, GFH, il n'y aura qu'à mener de ce point C par quelqu'un des deux autres A, B, une ligne droite, & s'en ſervir comme l'on vient de faire de AB dans la ſolution, pour reſoudre comme là le Problême en queſtion.

III. Si les trois points donnez A, B, C, l'étoient en ligne droite, par exemple, tous trois ſur la droite AB de longueur quelconque ; il eſt manifeſte que pour l'équilibre requis entre les trois puiſſances données P, Q, R, dont on veut que les directions paſſent par ces trois points, le commun E de leurs cordons devroit auſſi être ſur cette ligne droite AB, ſuivant laquelle ces trois cordons devroient auſſi pour lors être tous dirigez : ſçavoir, deux d'un même côté de ce nœud E, & le troiſiéme du côté directement oppoſé ; & qu'en ce cas la puiſſance appliquée à ce troiſiéme cordon devroit être ſeule égale à la ſomme des deux autres, qui auroient alors une même direction directement contraire à la ſienne ; & qui par conſequent ainſi réunies en une directement contraire à celle-là, l'emporteroient ſur elle, ſi elle étoit moindre que leur ſomme, ou ſeroient emportées par elle, ſi elle étoit plus grande.

PROBLEME VII.

Etant donnez les deux angles ACD, BDC, que deux poids quelconques E, F, ſont faire à la corde ACDB lâchement tenduë entre deux clous ou crochets A, B, auſquels elle eſt atta- Fig. 336.

chée par ſes extrêmitez, & entre leſquels ces deux poids E, F, pendent aux points quelconques C, D, de cette corde : l'on demande les rapports de ces deux poids entr'eux.

SOLUTION.

Soient AC, BD, prolongées juſqu'à leurs rencontres en G, H, avec les directions CE, DF, des poids E, F, qu'on ſuppoſe les avoir paralleles entr'elles.

Cela fait, je dis que ces poids E, F, ſont entr'eux en raiſon reciproque des parties CH, DG, de leurs directions, compriſes en AC, BD, prolongées juſqu'à elles ; c'eſt-à-dire, E. F :: DG. CH. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soient appellées C la force dont le point D eſt tiré vers C, & D, la directement contraire, dont le point C eſt tiré vers D : ſoit de plus ſ la marque des ſinus.

L'équilibre étant ici ſuppoſé, le Corol. 20. du Th. 1. donnera E. D :: ſACD. ſACE :: ſDCG. ſECG :: ſDCG. ſCGD :: DG. CD. c'eſt-à-dire, E. D :: DG. CD. le même Corol. 20. du Th. 1. donnera pareillement F. C :: CH. CD. ou C. F :: CD. CH. Mais la force C, dont le point D eſt tiré vers C, eſt égale à la force D, dont le point C eſt tiré vers D ; puiſque ces deux forces C, D, ſont en équilibre & directement oppoſées entr'elles. Donc E. D :: DG. CD. & D. F :: CD. CH. Donc auſſi (en raiſon ordonnée) E. F :: DG. CH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

M. Newton a auſſi démontré cette propoſition à ſa maniere dans ſon Arithmétique univerſelle.

PROBLEME VIII.

FIG. 337. *Deux poids donnez P, Q, étant attachez à une corde ABCP, qui retenue par une de ſes extrémitez au clou ou crochet A, paſſe librement par-deſſus une poulie Cc mobile entre ces poids autour de ſon centre fixe G : on demande en quel point B, ou en quelle ſituation ABC de la corde ces deux poids demeureront en équilibre entr'eux.*

SOLUTION.

Après avoir mené la verticale AE, & d'un de ſes points quelconque E pris au-deſſus de A, mené en angle auſſi quelconque la droite ET. AE :: P. Q. ſoit par les points A, T, la droite ATO rencontrée en une infinité d'autres points *t*, par une infinité de *et* paralleles à ET, & qui rencontrent auſſi la verticale AE en une infinité de points *e*, E, deſquels ſoient menées autant de droites *ec*, EC, qui touchent la poulie en *c*, C. Si l'on prend par tout ſur ces touchantes, depuis AE, les portions *eb*=*et*, EB=ET; la courbe A*b*Bβ, qui paſſera par tous les points *b*, B, ainſi trouvée, déterminera par ſa rencontre avec l'arc de cercle LBD décrit du centre A & du rayon donné AB, le point B ou le poids Q demeurera ſuſpendu en équilibre avec le poids P. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit le parallelogramme HK, dont la diagonale BF ſoit ſur la verticale QB prolongée vers F; & les côtez BH, BK, ſur les portions AB, BC, de la corde ABCP. La reſſemblance des triangles rectilignes FKB, ABE, donnera BK. BF :: EB. EA (*conſtr.*) :: ET. EA (*Hyp.*) :: P. Q. c'eſt-à-dire, BK. BF :: P. Q. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) le poids Q demeurera ici ſuſpendu en B en équilibre avec le poids P. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Le rayon AB étant arbitraire, on voit que de quelque longueur qu'il ſoit, le point B de ſuſpenſion du poids Q en équilibre avec le poids P, ſe trouvera toûjours ſur la courbe ABβ. Ainſi *ſi ce poids Q, au lieu d'etre attaché en B à la corde ABCP, eût été propoſé coulant le long de cette corde entre le crochet A & la poulie CcG, & qu'on eût demandé en quel point de cette même corde il devoit s'arréter en équilibre avec le poids P* : cette queſtion auroit été reſolue par le moyen de la courbe ABβ, faite comme ci-deſſus, en ré-

pondant que ce poids Q auroit pû demeurer ainſi en équilibre avec le poids P dans tout ce que la longueur de la corde lui peut permettre de points B, qui puiſſent atteindre à cette courbe ABβ, & qu'il y ſeroit effectivement demeuré dans tous ceux où cette corde auroit atteint cette courbe ; puiſque par la conſtruction de cette même courbe ABβ, ce poids Q y auroit été par tout au poids P :: BF. BK. Et conſéquemment auſſi (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) en équilibre par tout là avec le poids P. D'où l'on voit que ce même poids Q peut ainſi demeurer en équilibre avec le même poids P en une infinité de points B de la corde ABCP ainſi repliée juſqu'à la courbe ABβ ; de ſorte que cette courbe eſt le lieu de tous les points B d'équilibre.

PROBLEME IX.

Fig. 338. 339. *Un Levier droit, ſans peſanteur, étant de longueur donnée EF dans la Fig.* 338. *& EG dans la Fig.* 339. *chargé d'un poids donné Q en un point donné G quelconque ; lui appliquer en deux autres points auſſi donnez E, F, deux puiſſances données P, R, de maniere qu'avec des cordes ſeulement ce Levier chargé de ce poids Q, demeure en équilibre avec elles.*

SOLUTION.

I. Il eſt démontré (*Th.* 21. *part.* 3.) que pour cela il faut que des trois puiſſances P, R, Q, (en appellant auſſi de ce nom le poids Q) la ſomme de deux quelconques ſoit plus grande que la troiſiéme de ces puiſſances ; ou du moins que P+R ſoit =Q, lorſque ſon point G de ſuſpenſion eſt entre E & F, comme dans la Fig. 338. ou enfin que R—P ſoit =Q, lorſque F eſt entre E & G, comme dans la Fig. 339.

Cas de G entre E & F, comme dans la Fig. 338.

Fig. 338. II. Dans ce cas de la Fig. 338. outre P+R=Q, la poſſibilité du Problême exige encore (*Th.* 21. *Corol.* 13.) P.R : FG. EG. Cela étant, il n'y aura qu'à donner aux

puiſſances P, R, des directions EP, ER, paralleles & contraires à celle du poids Q, pour le mettre (*Th.* 21. *Corol.* 13.) en équilibre avec ces deux puiſſances. *Ce qu'il falloit* 1°. *faire & démontrer.*

III. Dans le même cas de la Fig. 338. lorſque des trois puiſſances P, R, Q, la ſomme de deux quelconques eſt plus grande que la troiſiéme, ſoit dans les Fig. 340. 341. une verticale MA, c'eſt-à-dire, parallele à la direction GQ du poids Q; ſur une partie quelconque AD de cette verticale ſoit fait un triangle ABD, dont les côtez AB, BD, ſoient à AD, comme les puiſſances données P, R, ſont au poids donné Q. Enſuite après avoir achevé le parallelogramme ABDC, & prolongé les côtez AB, AC, vers P, R, ſoit priſe BH vers P ſur AP, telle qu'on ait AB. BH :: FG. GE. Du point H par D ſoit menée la droite HDK, laquelle rencontre AR en K, & rende ainſi (à cauſe des paralleles BD, AR,) KD. DH :: AB. BH (*conſtr.*) :: FG. GE. Cela fait, Fig. 338. 340. 341.

1°. Si la droite HK des Fig. 340. 341. eſt égale à la longueur EF du Levier de la Fig. 338. placé en HK, il aura en D ſon point G, d'où pendra le poids Q ſuivant DA; & ſes points E, F, en H, K, où les puiſſances P, R, lui ſeront appliquées ſuivant AP, AR. Donc puiſque (*conſtr.*) ces puiſſances P, R, & ce poids Q, ſont entre-eux comme AB, BD, AD, c'eſt à-dire (à cauſe du parallelogramme ABDC) comme AB, AC, AD; les deux puiſſances P, R, appliquées ſuivant HP, KR, aux extrêmitez du Levier EF de la Fig. 338. placé ici en HK, y demeureront (*Th.* 21. *part.* 6.) en équilibre avec ce Levier chargé du poids Q en ſon point G. *Ce qu'il falloit* 2°. *faire & demontrer.*

2°. Si la droite HK des Fig. 340. 341. eſt plus longue ou plus courte que le Levier FE de la Fig. 338. ſoit priſe KL=FE, ſur cette même KH prolongée, s'il eſt eſt neceſſaire, du côté de H; de ſon point L ſoit faite *Le* parallele à AR, & qui rencontre AP en *e*; duquel point ſoit *ef* parallele à HK, & qui rencontre AM, AR, en G, *f*.

je dis que cette droite *fe*=KL (*conſtr.*) = au Levier FE de la Fig. 338. ſera la poſition requiſe de ce Levier dans les Figures 340. 341. lequel y étant ainſi placé, aura ſes points F, E, G, en *f*, *e*, G, & ſon poids Q dirigé ſuivant DA. Donc puiſque (*conſtr.*) les puiſſances P, R, & ce poids Q, ſont entr'eux comme AB, BD, AD, c'eſt-à-dire (à cauſe du parallelogramme ABDC) comme AB, AC, AD; les puiſſances P, R, appliquées ſuivant *e*P, *f*R, aux extrêmitez *e*, *f*, ou E, F, du Levier EF placé en *ef*, le ſoûtiendront alors en équilibre avec ſon poids Q. *Ce qu'il falloit* 3°. *faire & démontrer.*

Cas de F entre E & G, comme dans la Fig. 339.

FIG. 339. IV. Dans ce cas de la Fig. 339. lorſque R—P=Q, la poſſibilité du Problême exige de plus (*Th.* 21. *Corol.* 13.) P.R:: GF. GE. Cela étant, il n'y aura qu'à donner aux puiſſances P, R, des directions paralleles à celle GQ du poids Q, deſquelles directions celle de R ſoit contraire aux deux autres: alors ce poids donné Q ſe trouvera (*Th.* 21. *Cor.* 13.) en équilibre avec les deux puiſſances P, R. *Ce qu'il falloit* 4°. *faire & démontrer.*

FIG. 339. 342. 343. V. Dans le même cas de la Fig. 339. lorſque des trois puiſſances P, R, Q, la ſomme de deux quelconques eſt plus grande que la troiſiéme, ſoit auſſi dans les Fig. 342. 343. comme dans les Fig. 340. 341. de l'art. 3. une verticale ou parallele MA à la direction GQ du poids Q; ſur une partie quelconque AD de cette verticale, ſoit auſſi fait un triangle ACD, dont les côtez CD, CA, ſoient à cette partie arbitraire AD, comme les puiſſances données P, R, ſont au poids donné Q. Enſuite après avoir achevé le parallelogramme ABCD, & prolongé ſes côtez AD, AB, vers Q, P, avec ſa diagonale CA vers R, ſoit priſe AH ſur AP, telle qu'on ait AB. AH:: GF. GE. Du point H par C ſoit la droite HCK, laquelle rencontre AQ en K, & rend ainſi (à cauſe des paralleles BC, AQ) KC. KH:: AB. AH (*conſtr.*) :: GF. GE. Cela fait,

1°. Si la droite HK des Fig. 342. 343. eſt égale à la longueur EG du Levier de la Fig. 339. ce Levier GE placé en KH, aura en C ſon point F, où la puiſſance R lui ſera appliquée ſuivant CR; & les deux autres points E, G, en H, K, où la puiſſance P, & le poids Q, lui ſeront appliquez ſuivant AP, AQ. Donc puiſque les puiſſances P, R, & ce poids Q, ſont entr'eux comme CD, CA, AD, c'eſt-à-dire (à cauſe du parallelogramme ABCD) comme AB, AC, AD: les deux puiſſances P, R, ainſi appliquez ſuivant HP, CR, aux points E, F, du Levier GE de la Fig. 339. qui placé ici en KH, les aura en H, C, y demeureront en équilibre avec ce Levier chargé du poids Q ſuivant la verticale MA prolongée vers K, dans laquelle ſera ſon point G de ſuſpenſion. *Ce qu'il falloit* 5°. *faire & démontrer.*

2°. Si la droite KH des Fig. 342. 343. eſt plus longue ou plus courte que ce Levier GE de la Fig. 339. ſoit priſe KL=GE, ſur cette même KH prolongée, s'il eſt neceſſaire; de ſon point L ſoit faite Le parallele à AQ, & qui rencontre AP en *e*, duquel point ſoit *e*G parallele à HK, & qui rencontre MA, RC, prolongées en G, *f*. Je dis que cette droite *e*G=LK (*conſtr.*)=au Levier EG de la Fig. 339. ſera la poſition requiſe de ce Levier dans les Fig. 342. 343. lequel y étant ainſi placé, aura ſes points G, F, E, en G, *f*, *e*, des Fig. 342. 343. ſon poids Q appliqué en G ſuivant AD, & les puiſſances R, P, appliquées ſuivant CA, AB, en *f*, *e*, ou ſeront les points F, E, de ce Levier GE placé en G*e*. Donc puiſque ces puiſſances P, R, & ce poids Q, ſont entr'eux (*conſtr.*) comme DC, CA, AD, c'eſt-à-dire (à cauſe du parallelogramme ABCD) comme AB, AC, AD, ces deux puiſſances P, R, & ce poids Q, ainſi appliquez au Levier GE de la Fig. 339. placé en G*e* dans les Fig. 342. 343. y demeureront (*Th.* 21. *part.* 6.) en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit* 6°. *faire & démontrer.*

PROBLEME X.

Fig. 344. *Quatre puiſſances P, Q, R, K, étant données en raiſon des lignes AB, AC, AE, AD, les appliquer à autant de cordons réunis enſemble par un même nœud, & les diriger de maniere qu'elles faſſent équilibre entr'elles.*

SOLUTION.

De deux quelconques AB, AC, des quatre lignes proportionnelles aux quatre puiſſances données, ſoit fait le parallelogramme ABFC, dont la diagonale AF ſoit moindre que la ſomme des deux autres proportionnelles AE, AD. Soient enſuite des centres A, F, & des rayons AD, AE, deux arcs de cercles qui ſe coupent en D dans le plan du parallelogramme ABFC, ou hors de ce plan, il n'importe. Après cela menez AD, FD, avec AR parallele à FD, & prolongez DA vers K.

Cela fait, je dis que ſi l'on met en A le nœud commun des quatre cordons, & qu'on les dirige ſuivant AB, AC, AR, AK, les quatre puiſſances données P, Q, R, K, appliquées à ces quatre cordons AP, AQ, AR, AK, ainſi dirigez, demeureront en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Soit menée DE parallele à AF, & qui rencontre en E la droite AR déja (*Hyp.*) parallele à FD; ce qui forme le parallelogramme AEDF. La conſtruction precedente rendant les lignes AB, AC, AE, AD, en raiſon des puiſſances données P, Q, R, K, & appliquées ſuivant ces lignes; le parallelogramme AEDF fait de la proportionnelle AE, & de la diagonale AF du parallelogramme ABFC fait des deux proportionnelles AB, AC, ſera ici le dernier des parallelogrammes faits comme dans le Corol. 10. du Lem. 2. ou comme dans la démonſtration de la partie 2. du Theoreme 4. & la puiſſance K ſera ici aux trois autres

P,

Fig. 336.

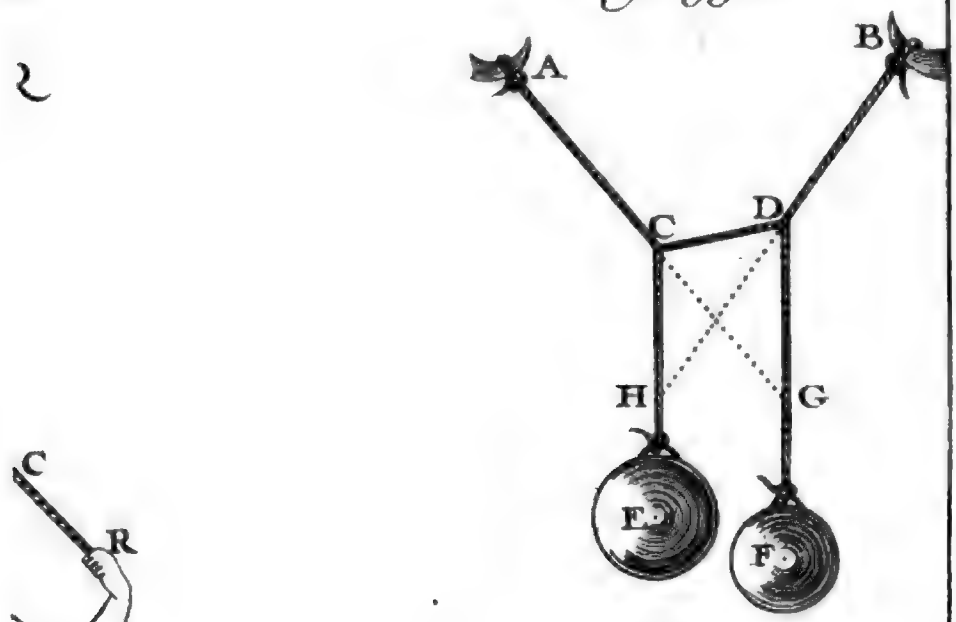


Fig. 338.

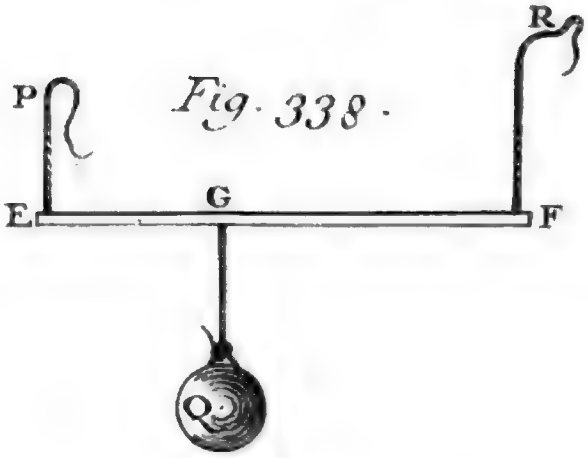


Fig. 339.

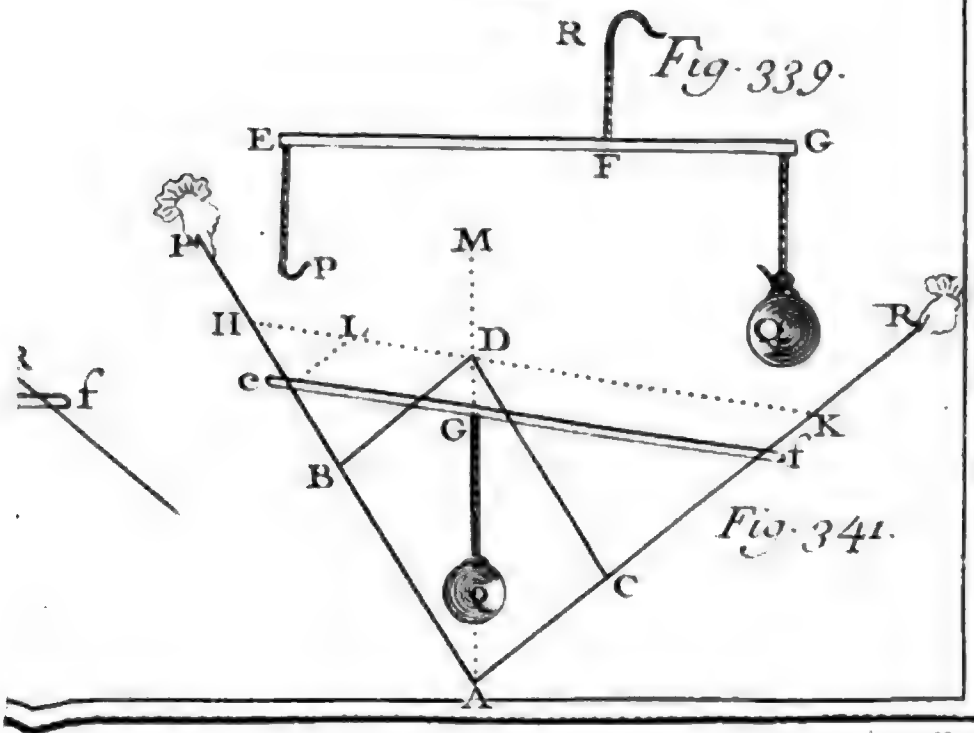


Fig. 341.

Digitized by Google

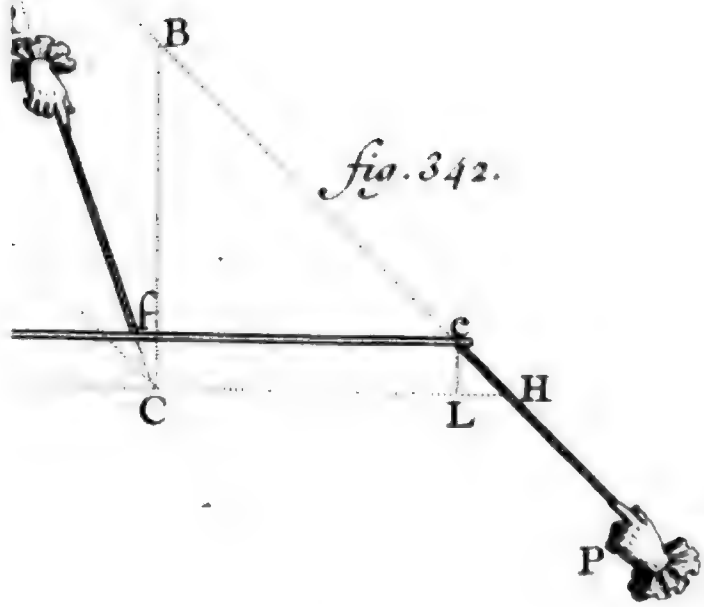


fig. 342.

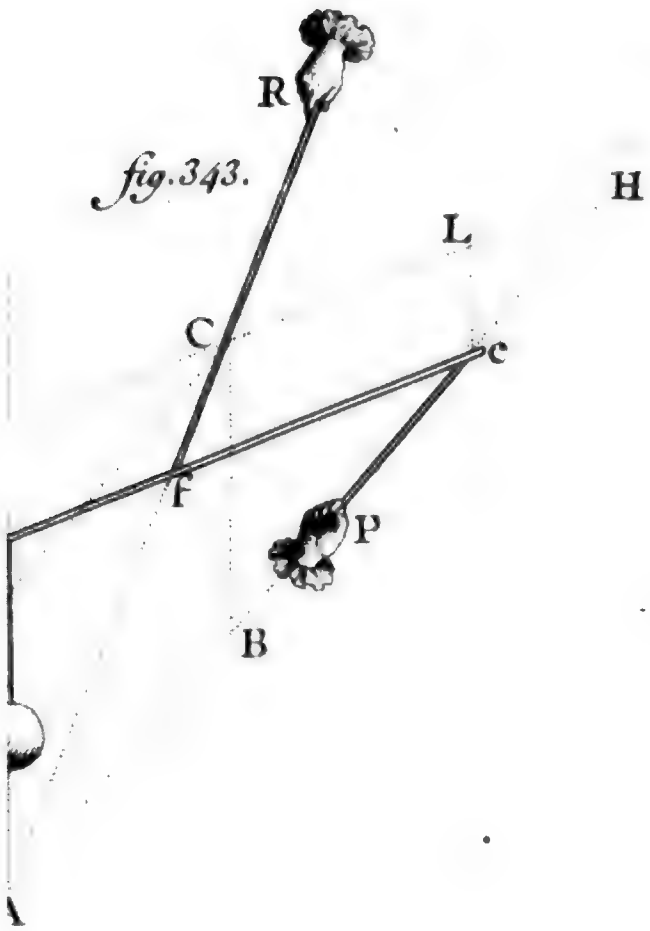


fig. 343.

Digitized by Google

P, Q, R, comme la diagonale AD de ce dernier parallelogramme, eſt à leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc (*Th.* 4. *part.* 2.) il y aura ici équilibre entre toutes ces quatre puiſſances. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Il eſt viſible que ſi l'on prend le point D au dehors du plan BAC, alors AE parallele (*conſtr.*) à DF, ſera auſſi hors de ce plan; & conſequemment AD proportionnelle à la puiſſance K, ſera pour lors la diagonale d'un parallelepipede BACFDGEH, qui aura pour côtez les proportionnelles des trois autres puiſſances P, Q, R: ainſi cette puiſſance K ſera pour lors à chacune de celles-ci, comme la diagonale AD de ce parallelepipede eſt à chacun de ſes côtez AB, AC, AE, qui leur répondent. Par conſequent ces quatre puiſſances données K, P, Q, R, étant ici (*conſtr.*) dirigées ſuivant ces quatre lignes AD, AB, AC, AE; ce leur ſera encore (*Th.* 4. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) une nouvelle raiſon d'être ici toutes en équilibre entr'elles, ainſi qu'il étoit requis.

PROBLEME XI.

Des quatre puiſſances à appliquer à quatre cordons retenus enſemble par un même nœud, une quelconque K étant donnée avec ſa direction AK, trouver les trois autres avec leurs directions telles que ces quatre puiſſances faſſent équilibre entr'elles, & que les trois demandées ayent leurs trois directions perpendiculaire chacune à chacune des deux autres. FIG. 345.

SOLUTION.

Sur la direction donnée AK prolongée vers D, ſoit priſe depuis le nœud A des cordes, vers ce point D, une partie quelconque AD, autour de laquelle, comme diagonale, ſoit fait un parallelogramme rectangle quelconque AEDF, dont le côté AF ſoit de même la diagonale d'un autre parallelogramme auſſi rectangle quelconque

ACFB fait ſur un plan perpendiculaire à celui du precedent parallelogramme AEDF.

Cela fait, je dis que ſi l'on dirige ſuivant AB, AC, AE, les cordons des trois puiſſances demandées, & que ſuivant ces directions AP, AQ, AE, on leur applique trois puiſſances P, Q, R, qui ſoient à la donnée K, comme les côtez correſpondans AB, AC, AE, des parallelogrammes CB, EF, ſont à la diagonale AD du ſecond EF; ces trois puiſſances P, Q, R, ſeront les trois demandées, & leurs directions AP, AQ, AR, ſeront auſſi les trois requiſes, c'eſt-à-dire (ainſi qu'on le demande) que,

I. Ces trois puiſſances P, Q, R, ainſi dirigées, feront équilibre avec la donnée K de direction donnée AK; &,

II. Chacune des trois directions AP, AQ, AR, de ces trois puiſſances P, Q, R, ſera perpendiculaire à chacune des deux autres.

DEMONSTRATION.

PART. I. Cette part. 1. ſe demontrera de même que la ſolution du precedent Problême 10. car puiſque (*ſolut.*) les puiſſances P, Q, R, K, ſont entr'elles en raiſon des lignes AB, AC, AE, AD, ſuivant leſquelles elles ſont appliquées au nœud commun A de leurs cordons ainſi dirigez; le parallelogramme AEDF fait de la proportionnelle AE, & de la diagonale AF du parallelogramme ABFC fait des deux proportionnelles AB, AC, ſera ici le dernier des parallelogrammes fait comme dans le Corol. 10. du Lem. 2. ou comme dans la demonſtration de la part. 2. du Th. 4. & la puiſſance donnée K ſuivant AK, ſera ici aux trois autres P, Q, R, comme la diagonale AD (en ligne droite avec AK) de ce dernier parallelogramme AEDF, eſt à leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc (*Th. 4. part. 2.*) il y aura ici équilibre entre ces quatre puiſſances. *Ce qu'il falloit 1°. demontrer.*

PART. II. Il s'agit preſentement de faire voir que chacune des trois directions AP, AQ, AR, eſt perpendiculaire à chacune des deux autres: ce qui eſt aiſé; car il eſt

Digitized by Google

déja évident que les deux AP, AQ, ſont perpendiculaires entr'elles; puiſque (*ſolut.*) le parallelogramme CB eſt rectangle. Il ne reſte donc plus qu'à faire voir que la direction AR eſt auſſi perpendiculaire à chacune de ces deux AP, AQ: ce qui eſt encore évident, car puiſque les parallelogrammes CB, EF, ſont (*ſolut.*) en plans perpendiculaires entr'eux, & que le ſecond EF eſt rectangle, ſon côté AE perpendiculaire à leur ſection commune AF, le ſera auſſi à chacun des côtez AB, AC, de l'autre parallelogramme CB. Donc chacun de ces trois côtez AB, AC, AE, de ces deux parallelogrammes CB, EF, eſt perpendiculaire à chacun des deux autres; & conſequemment chacune des trois directions AP, AQ, AR, des trois puiſſances P, Q, R, dirigées (*ſolut.*) ſuivant ces trois côtez AB, AC, AE, eſt auſſi perpendiculaire à chacune des deux autres. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PROBLEME XII.

Toutes choſes étant ici les mêmes que dans le précedent Problême 11. *excepté qu'on veut ici que les trois puiſſances qui y ſont demandées, ſoient égales entr'elles: on demande ici ces trois puiſſances égales avec leurs trois directions, telles que ces trois puiſſances y faſſent équilibre avec la donnée K de direction donnée AK, & que chacune de ces trois directions y ſoit encore perpendiculaire à chacune des deux autres.* FIG. 346.

SOLUTION.

D'un diametre AD pris à volonté depuis le nœud A des quatre cordons ſur le prolongement vers D de la direction donnée AK de la puiſſance donnée K, ſoit fait un demi-cercle AFD rencontré en F par une perpendiculaire GF à ce diametre, menée de l'extrêmité G de ſa partie $AG=\frac{1}{3}AD$; menez-y les cordes AF, DF: & après avoir achevé le parallelogramme rectangle AFDE, ſoit ſon côté AF la diagonale d'un quarré CB fait dans un plan perpendiculaire à celui de ce parallelogramme EF.

Cela fait, je dis que ſi l'on dirige ſuivant AB, AC, AE, les cordons AP, AQ, AR, des trois puiſſances demandées, & que ſuivant ces directions on leur applique trois puiſſances égales P, Q, R, dont chacune ſoit à la donnée K, comme AB à AD; ces trois puiſſances P, Q, R, ſeront les demandées, qui ainſi dirigées, feront enſemble équilibre avec la donnée K de direction donnée AK, & auront auſſi chacune de leurs trois directions AP, AQ, AR, perpendiculaire aux deux autres: le tout ainſi qu'on le demande.

DEMONSTRATION.

Pour voir tout cela, il faut d'abord demontrer que les trois côtez AB, AC, AE, des parallelogrammes CB, EF, ſont ici égaux entr'eux. Pour cela il faut conſiderer que puiſque (*ſolut.*) $AG=\frac{1}{3}AD$, l'on aura $\overline{AF}^2=\frac{1}{3}\overline{AD}^2$, & $\overline{DF}^2=\frac{1}{3}\overline{AD}^2$: ainſi le quarré CB rendant $\overline{AF}^2=\overline{AB}^2+\overline{BF}^2$, & $\overline{AB}^2=\overline{BF}^2$, l'on aura pareillement ici $\overline{AB}^2=\frac{1}{3}\overline{AD}^2$, & $\overline{BF}^2=\frac{1}{3}\overline{AD}^2$. Donc $\overline{AB}^2=\overline{BF}^2=\overline{DF}^2$; & conſequemment AB=BF=DF. Or les parallelogrammes (*ſolut.*) CB, EF, rendent BF=AC, & DF=AE. Donc auſſi AB=AC=AE. Or (*ſolut.*) chacune des trois puiſſances égales P, Q, R, eſt à la donnée K, comme AB à AD. Donc ces trois puiſſances P, Q, R, ſont à cette donnée K, comme les trois côtez correſpondans des parallelogrammes CB, EF, ſont à la diagonale AD du dernier EF. Par conſequent les plans de ces deux parallelogrammes CB, EF, ſe coupant ici (*ſolut.*) perpendiculairement en EF comme dans la ſolution du precedent Probl. 11. Fig. 345. l'on démontrera ici comme la que ces trois puiſſances égales P, Q, R, feront enſemble équilibre ici avec la donnée K, & ſuivant des directions AP, AQ, AR, dont chacune ſera perpendiculaire aux autres. *Ce qu'il falloit ici démontrer.*

Digitized by Google

PROBLEME XIII.

En general tant de puiſſances qu'on voudra P, Q, R, S, T, K, &c. étant données en raiſon des lignes quelconques AB, AC, AE, AF, AG, AD, &c. les appliquer à autant de cordons, & les diriger de maniere qu'elles faſſent toutes équilibre entr'elles. FIG. 347.

SOLUTION.

D'un point quelconque A ſoient menées à volonté, c'eſt-à-dire, ſuivant tels angles, & ſuivant tels plans qu'on voudra, autant de lignes (moins deux) qu'il y a de puiſſances données; ſçavoir, AP, AQ, AR, AS, &c. ſur deux quelconques AP, AQ, de ces lignes ſoient priſes deux quelconques AB, AC, des proportionnelles données aux puiſſances propoſées: après en avoir fait le parallelogramme BACM de ſa diagonale AM, & d'une troiſiéme proportionnelle quelconque AE, priſe ſur une troiſiéme quelconque AR des lignes menées du point A, ſoit auſſi fait le parallelogramme MAEH; de la diagonale AH de ce parallelogramme, & d'une quatriéme proportionnelle AF donnée, priſe ſur une quatriéme quelconque AS des lignes menées du point A, ſoit pareillement fait le parallelogramme HAFL; & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere incluſivement des lignes d'abord menées du point A, c'eſt-à-dire (*conſtr.*) juſqu'à ce qu'il ne reſte plus que deux des proportionnelles aux puiſſances données, ſçavoir, AG, AD. Après ſur la diagonale par A du dernier des parallelogrammes ainſi faits, c'eſt-à-dire, ici ſur AL, ſoit fait le triangle ADL, dont les côtez LD, AD, ſoient égaux aux deux proportionnelles reſtantes AG, AD, ſçavoir, en faiſant des centres L, A, & de rayons égaux à ces deux proportionnelles reſtantes AG, AD, deux arcs de cercles qui ſe coupent en D dans un plan quelconque; ſoit enſuite menée AT parallele à LD, & AK ſur DA prolongée vers K.

Cela fait, je dis que ſi l'on met le nœud commun des

cordes en A, & qu'après les avoir dirigées ſuivant AP, AQ, AR, AS, AT, AK, &c. on leur applique les puiſſances données P, Q, R, S, T, K, &c. Toutes ces puiſſances ainſi dirigées demeureront en équilibre entr'elles ſur le nœud commun de leurs cordons. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Suivant la conſtruction précedente (en achevant le parallelogramme ALDG) les lignes AB, AC, AE, AF, AG, AD, &c. dans les parallelogrammes précedens ſont entr'elles comme les puiſſances données P, Q, R, S, T, K, &c. Et ALDG eſt ici le dernier de ces parallelogrammes, en qui la puiſſance K eſt ainſi à chacune des autres P, Q, R, S, T, comme la diagonale AD de ce dernier ALDG de tous ces parallelogrammes eſt à chacun de leurs côtez AB, AC, AE, AF, AG, correſpondans ſur les directions de ces puiſſances. Donc (*Th. 4. part. 4.*) ces puiſſances ainſi dirigées, ſeront ici toutes en équilibre entr'elles; & ainſi de tel autre nombre qu'on pût ainſi propoſer. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

I. On voit que s'il n'y avoit ici que trois puiſſances données L, T, K, il n'y auroit qu'à faire le triangle ALD, dont les trois côtez AL, LD, AD, fuſſent entr'eux comme ces trois puiſſances; à mener enſuite AT parallele à LD, & à prolonger DA vers K: les trois puiſſances données L, T, K, appliquées à trois cordons attachez enſemble par un nœud commun, & dirigées ſuivant AL, AT, AK, demeureroient en équilibre entr'elles ſuivant ces directions, conformément à la ſolution du Probl. 2.

II. S'il n'y avoit que quatre puiſſances données H, S, T, K, il n'y auroit qu'à faire d'un angle quelconque HAF le parallelogramme AHLF, dont les côtez AH, AF, fuſſent entr'eux comme deux quelconques H, S, des puiſſances données: enſuite ſur la diagonale AL de ce pa-

Digitized by Google

rallelogramme, faire le triangle ALD, dont les côtez LD, DA, fuſſent à AF comme les deux autres puiſſances données T, K, ſont à la puiſſance F : après cela mener AT parallele à LD, & prolonger DA vers K. Cela fait, il ſuit de la ſolution précedente que les quatre puiſſances données H, S, T, K, étant appliquées à autant de cordons d'une même corde, dirigez ſuivant AH, AS, AT, AK, y demeureront en équilibre entr'elles comme les quatre du précedent Probl. 10. & ainſi de tel autre plus grand nombre qu'on voudra de puiſſances données quelconques.

COROLLAIRE II.

De ce que les directions, moins deux, des puiſſances données en plus grand nombre que trois, ont été priſes arbitrairement dans la ſolution précedente ; & de ce que ces directions arbitraires (moyennant les proportionnelles priſes ſur elles) déterminent les deux reſtantes dans cette ſolution : il ſuit de cette même ſolution que les mêmes puiſſances données en raiſons quelconques, peuvent faire équilibre entr'elles ſuivant une infinité de directions differentes pour chacune. Puiſque quelles qu'on les prenne, moins deux, elles détermineront toûjours ces deux-là, & differentes en autant de manieres qu'elles le feront elles-mêmes, ſans cependant empêcher les puiſſances données en plus grand nombre que trois, de faire équilibre dans toutes ces directions, ainſi que le prouve l'aſſomption arbitraire de celles-là dans la ſolution précedente. Mais dès qu'il ne s'agit que de trois puiſſances données, le Corol. du Th. 1. le Probl. 2. & l'art. 1. du précedent Corol. 1. prouvent qu'elles ne peuvent ainſi faire équilibre entr'elles, que ſuivant une ſeule direction chacune.

SCHOLIE.

Il eſt à remarquer que quelques arbitraires que ſoient (*ſolut. & Corol.* 2.) les directions de plus de trois puiſſances données qu'on veut mettre en équilibre entr'elles en

les appliquant ſeulement à autant de cordons attachez enſemble par un nœud commun ; cette liberté de varier ces directions a cependant des limites que voici dans les articles ſuivans.

1°. Si les cordons de directions données ſont en même plan, ils doivent être répandus en plus d'un demi-cercle, dont le centre ſoit le nœud commun des cordons, autrement l'équilibre ſeroit impoſſible. (*Corol.* 2. *Lem.* 4.)

2°. Si les cordons de directions données ne ſont pas en même plan, ils doivent être répandus en plus d'une demi-ſphere, dont le centre ſoit le nœud commun des cordons. (*Corol.* 2. *Lem.* 4.)

PROBLEME XIV.

Fig. 348. 349. *Les directions AB, AC, AD, AE, de quatre quatre cordons attachez enſemble par un ſeul nœud A, étant données ; trouver quatre puiſſances B, C, D, E, qui appliquées à ces quatre cordons, feroient équilibre entr'elles ſuivant ces directions données.*

SOLUTION.

Je dis que ce Problême peut être tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impoſſible. Car ou les quatre cordons de directions données ſont en plans differens, ou tous en même plan. Or je vas faire voir que dans le premier de ces deux cas le Problême eſt toûjours déterminé ou impoſſible, & que dans le ſecond il eſt toûjours indéterminé ou impoſſible. Donc, &c. Voici la démonſtration de ces deux dernieres propoſitions avec la ſolution du Problême lorſqu'il eſt poſſible.

CAS

CAS I.

Lorſque les quatre cordons de directions données, ſont en plans differens, le Probleme eſt toûjours déterminé ou impoſſible.

Voici la démonſtration de cette propoſition en trois parties, dans leſquelles je vas faire voir,

I. Que lorſque les quatre cordons de directions données en plans differens, ſont répandus en plus d'une demi-ſphere, dont leur nœud commun ſoit le centre; le Problême eſt toûjours poſſible.

II. Qu'alors il eſt toûjours déterminé.

III. Que lorſque ces quatre cordons de directions données en differens plans, ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere; le Problême eſt toûjours impoſſible.

PART. I. Puiſque (*Hyp.*) les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions données, ſont ici en plans differens, & répandus en plus d'une demi-ſphere, dont leur nœud commun A eſt le centre; & que ſi deux ou trois de ces cordons étoient dans un plan, & les deux autres ou le quatriéme hors de ce plan d'un ſeul côté de lui, ils ne ſeroient tous répandus que dans une demi-ſphere terminée par ce plan de deux ou trois cordons: il eſt manifeſte que les quatre ne peuvent être ici que deux à deux dans chaque plan, & de maniere (*Lem.* 5. *part.* 3.) que le plan de deux de ces cordons, prolongé par de-là leur nœud commun A, paſſera toûjours ici à travers l'angle que les deux autres cordons y font entr'eux. Donc le plan BAE des deux cordons AB, AE, doit paſſer ici par de-là le nœud A, à travers l'angle CAD que les deux autres cordons AC, AD, font entr'eux; & reciproquement le plan CAD de ces deux-ci doit paſſer de même à travers l'angle BAE des deux autres: de ſorte que la ſection commune RAP de ces deux plans BAE, CAD, diviſera toûjours ici chacun des deux angles de ces noms en quelque rapport déterminé que ce ſoit. Cela poſé,

SOLUTION I.

FIG. 348. D'un point quelconque F pris à volonté depuis A vers P ſur la droite RAP, dans l'angle CAD : ſoient menées trois autres droites FK, FL, FG, paralleles à AD, AC, AE, déterminées (*Hyp.*) de poſition. Les deux premieres FK, FL, formeront ſur le plan CAD un parallelogramme ALFK, dont la diagonale AF priſe (*Hyp.*) à volonté, & déterminée auſſi (*Hyp.*) de poſition, déterminera de grandeur les côtez AK, AL, ſur AC, AD; & la troiſiéme FG dans le plan BAE, déterminera auſſi de grandeur AG ſur BA prolongée vers Q : de ſorte que GH parallele à AE, déterminera pareillement AH de grandeur ſur AE. Donc on aura ainſi AK, AL, AG, AH, déterminées non ſeulement (*Hyp.*) de poſition, mais auſſi de grandeur; & par conſequent les rapports de ce quatre lignes entr'elles, ſeront ainſi déterminez & connus.

Cela étant, je dis que ſi l'on applique aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions données, autant de puiſſances B, C, D, E, qui ſoient entr'elles dans les rapports connus des lignes correſpondantes AG, AK, AL, AH; ces quatre puiſſances ainſi dirigées feront équilibre entr'elles, & retiendront ainſi en repos (les unes contre les autres) le nœud libre A, qui tient tous leurs cordons attachez enſemble.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*Hyp.*) les deux puiſſances C, D, ſont entr'elles comme les côtez correſpondans AK, AL, du parallelogramme KL, il reſultera (*Lem.* 2.) de leur concours d'action ſur le nœud A une force ou impreſſion de A vers P ſuivant AP ou AF, laquelle ſera à chacune de ces deux puiſſances C, D, comme cette diagonale AF du parallelogramme KL, eſt à chacun de ſes côtez correſpondans AK, AL : de ſorte que ſi l'on appelle P cette nouvelle force ſuivant AF ou AP, l'on aura ici P. C. : AF. AK. Or (*Hyp.*) C. E :: AK. AH. Donc P. E :: AF. AH. c'eſt-à-

Digitized by Google

dire, les deux forces P, E, entr'elles comme les côtez correſpondans AF, AH, du parallelogramme AFGH. Donc (*Lem.* 2.) du concours d'action de ces deux forces P, E, ſur le nœud A, il lui en reſultera auſſi une de A vers G ſuivant la diagonale AG du parallelogramme FH, laquelle ſera à chacune de ces deux-là P, E, comme cette diagonale AG à chacun des côtez correſpondans AF, AH: de ſorte qu'en appellant auſſi Q cette nouvelle force ſuivant AG ou AQ, l'on aura ici Q. E :: AG. AH. Donc ayant auſſi (*Hyp.*) B. E :: AG. AH. l'on aura ici les deux forces Q, B, égales entr'elles: ainſi ces deux forces étant (*Hyp.*) directement oppoſées, elles feront équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la force Q ſuivant AG, eſt l'effort que les deux puiſſances E, P, font enſemble ſur le nœud A contre la puiſſance B. Donc ces trois puiſſances E, F, B, feront pareillement ici en équilibre entre-elles. Or on vient de voir auſſi que la force P ſuivant AF, eſt l'effort que les deux puiſſances C, D, font enſemble ſur le nœud A contre les deux puiſſances E, B. Donc les quatre puiſſances B, C, D, E, ſeront ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions données AB, AC, AD, AE. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

SOLUTION II.

Les directions des quatre cordons AB, AC, AD, AE, étant données ici les mêmes que dans la precedente ſolut. 1. la ſection commune RAP des deux plans BAE, CAD, donnez (*Hyp.*) de poſition, ſera auſſi de poſition déterminée ici comme là dans l'un & dans l'autre de ces deux plans, auſſi-bien que (*Hyp.*) les directions AB, AE, dans le premier BAE; & AC, AD, dans le ſecond CAD: de ſorte que cette ſection commune RAP diviſera ici comme là chacun des angles BAE, CAD, en quelque rapport déterminé que ce ſoit. Donc en prenant de part & d'autre depuis A vers P, R, deux parties égales quelconques AF, AM, ſur cette ſection commune RAP, autour deſquelles (comme diagonales) ſoient faits deux pa- Fig. 349.

rallelogrammes KL ſur le plan CAD, & GH ſur le plan BAE; leurs côtez AK, AL, AH, AG, qui ſont autant de parties des directions AC, AD, AE, AB, de poſitions (*Hyp.*) déterminées, ſeront auſſi déterminez de grandeur; & conſequemment entr'eux en des rapports déterminez & connus.

Je dis preſentement que ſi l'on applique aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, donnez (*Hyp.*) de poſition, autant de puiſſances B, C, D, E, qui ſoient entr'elles comme les quatre côtez connus AG, AK, AL, AH, des deux parallelogrammes GH, KL; ces quatre puiſſances ſeront encore ici en équilibre entr'elles ſuivant ces directions données.

DEMONSTRATION.

Le Lemme 1. fait encore voir que du concours d'action des deux puiſſances C, D, ſur le nœud A, il reſultera à ce nœud une force ou impreſſion de A vers F ſuivant AF, équivalente à ce concours d'action de ces deux puiſſances ſur ce nœud A, laquelle force ſuivant AF ſera à chacune de ces deux puiſſances C, D, comme cette diagonale AF du parallelogramme KL, ſera à chacun de ſes côtez correſpondans AK, AL: & que du concours d'action des deux autres puiſſances B, E, ſur le même nœud A, il reſultera pareillement à ce nœud une force ou impreſſion de A vers M ſuivant AM, équivalente auſſi à ce concours d'action de ces deux autres puiſſances ſur ce nœud A, laquelle force ſuivant AM ſera de même à chacune de ces deux puiſſances B, E, comme cette diagonale AM du parallelogramme GH, ſera à chacun de ſes côtez correſpondans AG, AH. Donc ſi ces deux forces ou impreſſions directement contraires ſuivant AF ou AP, & ſuivant AM ou AR, l'on appelle la premiere P, & la ſeconde R; l'on aura ici P. C :: AF. AK. Et B. R :: AG. AM. avec (*Hyp.*) C. B : AK. AG. Ce qui (en multipliant par ordre) donnera P. R :: AF. AM. De ſorte qu'avant ici (*Hyp.*) AF égale à AM, & en ligne droite avec elle, l'on

y aura auſſi les forces P, R, égales entr'elles, & directement oppoſées l'une à l'autre. Donc elles ſeront ici en équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la force P ſuivant AF eſt l'effort que les deux puiſſances C, D, font enſemble ſur le nœud A ; & que la force R ſuivant AM, eſt pareillement l'effort que les deux autres puiſſances B, E, font auſſi enſemble ſur le même nœud A. Donc l'effort que les deux puiſſances C, D, font enſemble ſur le nœud A, eſt ici égal & directement oppoſé à l'effort que les deux autres puiſſances B, E, font auſſi enſemble ſur ce nœud. Par conſequent ces quatre puiſſances B, C, D, E, ſeront encore ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions données AB, AC, AD, AE. *Ce qu'il falloit encore trouver & démontrer.*

PART. II. Telle eſt (*part.* 1.) la poſſibilité & la ſolution du Problême propoſé, lorſque les quatre cordons de directions données en differens plans, ſont répandus en plus d'une demi-ſphere. Je dis preſentement que ce Problême eſt alors déterminé aux rapports des puiſſances que l'on y vient d'aſſigner.

DEMONSTRATION.

On vient de voir au commencement de la part. 1. que les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données, ſont en deux plans differens BAE, CAD, dont la ſection commune RAP diviſe toûjours chacun des angles BAE, CAD ; & que ces deux plans étant ainſi donnez de poſition l'un par rapport à l'autre, cette ſection commune RAP, qu'ils font entr'eux, eſt auſſi déterminée de poſition par rapport aux côtez AB, AE, AC, AD, de ces deux angles, leſquels ſont ainſi diviſez par elle en parties déterminées, qui conſequemment déterminent les rapports des diagonales AF, AG, aux côtez de leurs parallelogrammes KL, FH, dans la part. 1. ſolut. 1. Fig. 348. ou des diagonales AF, AM, aux côtez de leurs parallelogrammes KL, GH dans la même part. 1. ſolut. 2. Fig. 349. Donc ces directions AB, AC, AD, AE, don- Fig. 348. 349.

nées (*Hyp.*) les mêmes dans l'une & dans l'autre de ces deux ſolutions, y déterminent ainſi les rapports de leurs parties (employées à ces parallelogrammes) AG, AK, AL, AH, à être toûjours les mêmes pour les mêmes directions. Par conſequent ces rapports étant (*part.* 1. *ſolut.* 1. 2.) les requis des quatre puiſſances B, C, D, E, qu'on vient de démontrer (*part.* 1.) devoir faire équilibre entr'elles ſuivant ces quatre directions données AB, AC, AD, AE; les quatre puiſſances propres à faire équilibre entr'elles ſuivant ces directions, ſeront toûjours déterminées à ces mêmes rapports, tant que ces directions ſeront les mêmes. Donc ce cas 1. de la queſtion propoſée, eſt un Problème déterminé aux rapports des puiſſances qu'on vient d'aſſigner (*part.* 1. *ſolut.* 1. 2.) pour faire équilibre entr'elles ſuivant les directions données, ſans qu'aucun autre rapport de puiſſances ainſi dirigées y puiſſe ſatisfaire: ces rapports des quatre grandeurs AG, AK, AL, AH, proportionnelles aux quatre puiſſances B, C, D, E, requiſes pour cela, étant les mêmes dans les ſolut. 1. 2. de la part. 1. dans leſquelles, ſi l'on prend AF la même de part & d'autre, ces quatre grandeurs ſeront auſſi les mêmes. Donc en ce cas-ci de quatre cordons de directions données, & répandus en plus d'une demi-ſphere, dont leur nœud commun eſt le centre, le Problème eſt toûjours déterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Cette part. 3. eſt que lorſque les quatre cordons de directions données en differens plans, ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere; le Problême eſt impoſſible. Cela ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4.

CAS II.

Lorſque les quatre cordons de directions données ſont tous en meſme plan, le Probleme eſt toûjours indéterminé ou impoſſible.

Voici auſſi la démonſtration de cette propoſition en trois parties, dans leſquelles je vas faire voir,

I. Que lorſque les quatre cordons de directions données en même plan, ſont répandus en plus d'un demi-cercle, le Problème eſt toûjours poſſible.

II. Qu'alors il eſt toûjours indéterminé.

III. Et que lorſque les quatre cordons de directions données en même plan, ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême eſt toûjours impoſſible.

PART. I. Pour ne pas multiplier inutilement les Figures, ſuppoſons preſentement que les quatre cordons AB, AC, AD, AE, des Fig. 348. 349. regardées ci-deſſus (*cas* 1.) comme en plans differens, ſont ici tous de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Suivant cette hypotheſe, la ligne RAP, qui étoit-là une ſection commune de deux plans, ne ſera plus ici qu'une ſimple ligne droite, laquelle y ſoit menée au hazard ſur le plan des cordons par leur nœud commun A, à travers quelqu'un BAE de leurs angles, ſans paſſer le long d'aucun de ces cordons. la part. 2. du Lem. 5. fait voir que cette droite RAP diviſera encore quelqu'autre angle CAD de ces mêmes cordons; & la part. 1. du même Lem. 5. fait pareillement voir que chacun de ces cordons prolongé par de-là leur nœud commun A, par exemple, BA prolongé vers Q dans la Fig. 348. diviſera auſſi quelqu'un DAE de leurs angles. FIG. 348. 349.

SOLUTION.

1°. Cela poſé, ſi dans la preſente hypotheſe des Fig. 348. 349. l'on fait en même plan les parallelogrammes

KL, FH, dans la Fig. 348. & KL, GH, dans la Fig. 349. de la maniere qu'on les a faits en plans differens dans les ſolut. 1. 2. de la part. 1. du cas 1. & qu'on applique ici comme là aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données, autant de puiſſances (une à chacun) B, C, D, E, qui ſoient encore ici entr'elles comme les parties correſpondantes AG, AK, AL, AH, de leurs directions : on démontrera ici que ces quatre puiſſances y demeureront en équilibre entr'elles ſuivant ces directions ici données en même plan, & de cordons répandus en plus d'un demi-cercle : comme on a démontré là que les quatre puiſſances qu'on y a aſſignées, y devoient demeurer en équilibre ſuivant les directions qui y étoient données en plans differens, & de cordons répandus en plus d'une demi-ſphere. Donc le Problême eſt toûjours poſſible ici comme là. *Ce qu'il falloit* 1°. *trouver & démontrer.*

Fig. 350. 2°. Si l'on veut que deux des quatre cordons de directions ici données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, par exemple, les deux AC, AE, ſoient ici en ligne droite CE, qui diviſe (*Lem.* 5. *part.* 1.) l'angle BAD, que les deux autres AB, AD, font entr'eux : il n'y a qu'à faire ſur une partie quelconque AK de AC, comme diagonale, un parallelogramme GL de côtez AG, AL, pris ſur AB, AD ; & après avoir ajoûté à cette diagonale AK une partie quelconque KH du même cordon AC, appliquer aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, autant de puiſſances (une à chacun) B, C, D, E, qui ſoient entr'elles comme AG, KH, AL, AH. Cela fait, je dis que ces quatre puiſſances ainſi dirigées, ſeront encore ici en équilibre entr'elles.

DEMONSTRATION.

De ce que (*Hyp.*) B. D :: AG. AL. il ſuit du Lem. 1. que du concours de ces deux puiſſances B, D, il reſultera au nœud A une force ou impreſſion de A vers C ſuivant AC, laquelle ſera à chacune de ces deux puiſſances B, D, comme la diagonale AK du parallelogramme

me GL à chacun de ſes côtez correſpondans AG, AL ; & conſequemment que ſi l'on appelle K cet effort commun des puiſſances B, D, ſuivant AK, l'on aura ici K. B :: AK. AG. Or (*Hyp.*) B. C :: AG. KH. Donc K. C :: AK. KH. Et K+C. C :: AK+KH (AH) : KH. Or (*Hyp.*) C. E :: KH. AH. Donc K+C. E :: AH. AH. c'eſt-à-dire, K+C=E. Or on vient de voir que K eſt l'effort que les deux puiſſances B, D, font enſemble de A vers C ſuivant AC ſur le nœud A, dans le ſens que la puiſſance C le tire ; d'où il reſulte que K+C eſt tout ce que ces trois puiſſances B, D, C, font enſemble d'effort ſur le nœud A contre la puiſſance E qui le tire directement (*Hyp.*) à contre-ſens de cet effort commun K+C. Donc ayant déja K+C=E, cette puiſſance E ſera ici directement contraire & égale à tout ce que les trois autres B, C, D, font enſemble d'effort ſur le nœud A. Par conſequent ces quatre puiſſances B, C, D, E, doivent encore ici demeurer en équilibre entr'elles ſuivant les directions AB, AC, AD, AE, qui y ſont données. *Ce qu'il falloit auſſi démontrer.*

3°. Si les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, étoient deux à deux en lignes droites, qui fuſſent, par exemple, BD, CE : il eſt viſible qu'en appliquant deux puiſſances égales quelconques B, D, aux deux cordons AB, AD ; & deux autres auſſi quelconques égales C, E, aux deux autres cordons AC, AE : ces quatre puiſſances demeureroient ici en équilibre entr'elles, quelque fut le rapport de chacune des deux premieres B, D, à chacune des deux dernieres C, E. *Ce qui eſt tout ce qui reſtoit ici à faire voir.* Fig. 351.

Donc (*art.* 1. 2. 3.) quelques ſoient les directions données de quatre cordons AB, AC, AD, AE, en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit ſur ce plan, d'un centre qui ſeroit le nœud commun A de ces quatre cordons ; le Problême propoſé ſera toujours poſſible & reſolu, comme dans ces art. 1. 2. 3. *Ce qui eſt* Fig. 348. 349. 350. 351.

tout ce qu'il falloit faire & démontrer dans cette part. 1. *des cas* 2.

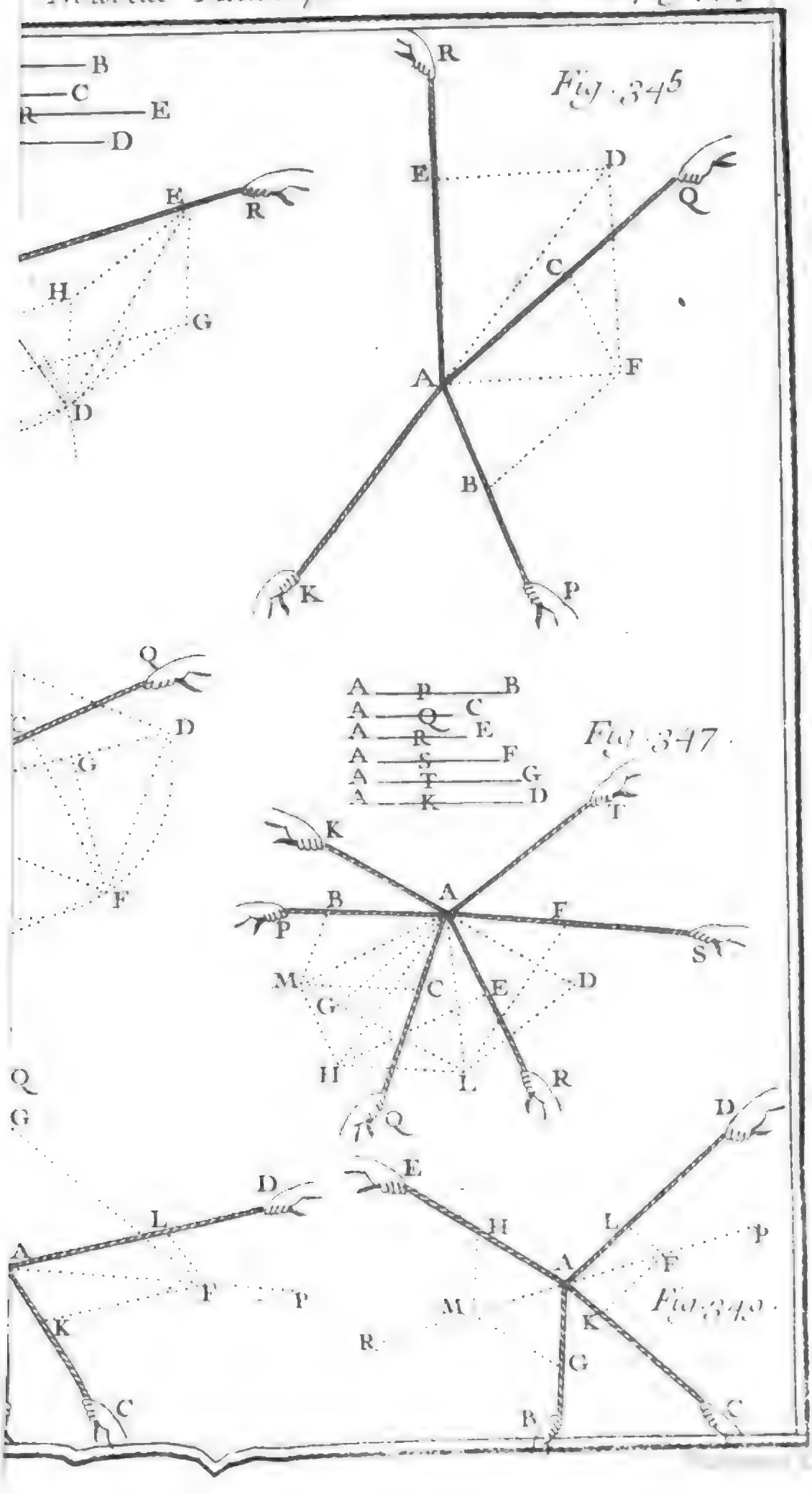
PART. II. Il s'agit preſentement de faire voir que ce Problême de quatre cordons de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit ſur ce plan, de leur nœud commun comme centre, eſt toûjours indéterminé. Pour cela il eſt à conſiderer que,

1°. La liberté qu'on a eue dans l'art. 1. de la part. 1. Fig. 348. 349. de mener à volonté par le nœud A, ſur le plan de ces quatre cordons AB, AC, AD, AE, la ligne droite RAP à travers de leurs angles BAE, CAD, pouvant diverſifier à l'infini les rapports entr'elles des quatre droites AG, AK, AL, AH; & conſequemment auſſi ceux des quatre puiſſances B, C, D, E, qu'on vient de voir (*part.* 1. *art.* 1.) devoir toûjours demeurer en équilibre entr'elles ſuivant ces directions, tant que ces quatre puiſſances ſont entr'elles en raiſon de ces quatre lignes correſpondantes: il ſuit de-là qu'une infinité de puiſſances quatre à quatre, dans des rapports tout differens & variez à l'infini, pourront ici faire équilibre entr'elles ſuivant les mêmes directions données: & conſequemment que le cas 2. de la queſtion propoſée, eſt ici un Problême indéterminé. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Fig. 348. 349.

2°. Quoique dans l'art. 2. de la part. 1. Fig. 350. le rapport de AG à AL ſoit déterminé par les poſitions données de AB, AD, & de la droite CAE en même plan; cependant la liberté qu'on a eue d'y prendre KH, & conſequemment auſſi AH à volonté, pouvant diverſifier à l'infini non ſeulement le rapport de AH à KH, mais encore les rapports de ces deux parties du cordon AC aux deux AG, AL, des cordons AB, AD; il ſuit de-là que les rapports entr'elles des quatre parties AG, KH, AL, AH, de ces cordons ſont variables à l'infini: & conſequemment auſſi les rapports des quatre puiſſances B, C, D, E, qu'on vient de voir (*part.* 1. *art.* 2.) devoir toûjours ici demeurer en équilibre entr'elles, tant qu'elles y ſeront entr'elles comme ces quatre parties correſpondantes des

Fig. 350.


B
C
R
E
D
R
E
R
H
G
D
Fig. 345
E
D
Q
C
A
F
B
K
P
Q
C
D
G
F
A
P
B
A
Q
C
A
R
E
A
S
F
A
T
G
A
K
D
Fig. 347
I
K
A
B
F
P
S
M
C
E
D
G
H
L
R
Q
G
Q
D
E
D
L
H
L
P
A
A
F
F
P
M
K
K
R
G
C
B
C
Fig. 348

cordons AB, AC, AD. Donc une infinité de puiſſances quatre à quatre, pourront encore ici faire équilibre entr'elles ſuivant les mêmes directions AB, AC, AD, AE, qui y ſont données en même plan, & de quatre cordons répandus en plus d'un demi-cercle. Par conſequent le cas 2. de la queſtion propoſée, eſt encore ici un Problême indéterminé. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

3°. Dans l'art. 3. de la part. 1. Fig. 351. quoiqu'il y ſoit requis pour l'équilibre entr'elles des quatre puiſſances B, C, D, E, ſuivant les directions qui y ſont données (*Hyp.*) en lignes droites deux à deux, que les deux directement oppoſées de ces puiſſances, telles qui y ſont (*Hyp.*) B à D, & C à E, ſoient ainſi deux à deux égales entr'elles : ſçavoir, B=D, & C=E ; cependant chacun de ces deux couples de puiſſances égales y étant à volonté, le rapport de chacune du premier couple à chacune du ſecond, y eſt encore variable à l'infini. Par conſequent une infinité de puiſſances quatre à quatre, en des rapports differens à l'infini, pourront encore ici faire équilibre entr'elles ſuivant les quatre directions qui y ſont données. Donc le cas 2. de la queſtion propoſée, eſt encore ici un Problême indéterminé. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.* Fig. 351.

Donc (*art.* 1. 2. 3.) quelques ſoient les directions données de quatre cordons AB, AC, AD, AE, en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit ſur ce plan, d'un centre qui ſeroit le nœud commun A de ces quatre cordons ; le Problême propoſé ſera toûjours indéterminé. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer dans cette part.* 2. *du cas* 2.

PART. III. Cette partie 3. eſt que lorſque les quatre cordons de directions données toutes en même plan, ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême eſt impoſſible. Cela ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4.

CONCLUSION DES CAS I. II.

Donc quelques ſoient les directions données de quatre

cordons attachez enſemble par un ſeul & même nœud, auſquels il s'agit d'appliquer quatre puiſſances (une à chacun (qui faſſent équilibre entr'elles ſuivant les directions données ; le Problême peut être tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impoſſible : ſçavoir,

1°. Déterminé (*part.* 1. 2. *du cas* 1.) lorſque les quatre cordons de directions données ſont en des plans differens, & répandus en plus d'une demi-ſphere.

2°. Indeterminé (*part.* 1. 2. *du cas* 2.) lorſque ces quatre cordons ſont tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle.

3°. Enfin impoſſible (*part.* 3. *des cas* 1. 2.) lorſque ces quatre cordons de directions données, ſont en des plans differens ſans être répandus en plus d'une demi-ſphere, ou tous en même plan, ſans être répandus en plus d'un demi-cercle.

C'eſt-là tout ce qu'il s'agiſſoit de trouver & de démontrer dans le Probléme propoſé.

PROBLEME XV.

Fig. 352. 353. 354. *Soient à volonté les directions données de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, attachez tous enſemble par un ſeul & méme nœud A : on demande cinq puiſſances, qui appliquées à ces cinq cordons, une à chacun, faſſent toutes enſemble équilibre entr'elles.*

SOLUTION.

Je dis que ce Problême eſt toûjours indeterminé ou impoſſible, ſoit que les directions données ſoient en plans differens, ou toutes en même plan.

CAS I.

Lorſque les cinq directions données ſont en plans differens, le Probleme eſt toûjours indéterminé ou impoſſible.

Voici la démonſtration de cette propoſition en trois parties, dans leſquelles je vas faire voir,

I. Que lorſque les cinq cordons de directions données en plans differens, ſont répandus en plus d'une demi-ſphere, dont leur nœud commun ſoit le centre; le problème eſt toûjours poſſible.

II. Qu'alors il eſt toûjours indéterminé.

III. Que lorſque ces cinq cordons de directions données en plans differens, ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere, le Problême eſt toûjours impoſſible.

PART. I. Puiſque (*Hyp.*) les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, ſont ici en plans differens, & répandus en plus d'une demi-ſphere, il n'y en peut avoir en même plan, d'un ſeul côté duquel tous les autres ſe trouvent: autrement ils ne ſeroient tous répandus que dans une demi-ſphere terminée par ce plan; ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc de ces cinq cordons il y en aura toûjours deux ſeuls en même plan, & les trois autres de part & d'autre de ce plan, qui prolongé paſſera entr'eux. Soient AB, AE, les deux ſe trouvent ſeuls dans un plan BAE: la part. 3. du Lem. 5. fait voir que quelque ſoit ici la diſpoſition des trois autres cordons AC, AD, AF, ce plan BAE prolongé par de-là le nœud commun A de tous, paſſera toûjours à travers ces trois-ci, par exemple, ſuivant AO; & que ce plan BEAO aura toûjours d'un côté de lui (que j'appelle le *deſſus*) deux AD, AF, de ces trois autres cordons, & de l'autre côté (que j'appelle le *deſſous*) le troiſiéme AC: & ſoit que ce cordon AC ſoit, ou non, en ligne droite avec un des deux autres AD, AF; ils feront toûjours entr'eux pour le moins deux angles DAF, CAF, ou DAF, CAD. Cela poſé,

SOLUTION.

Sur le plan DAF dans l'angle de ce nom, ſoit la droite AS de grandeur & de poſition arbitraires, laquelle faſſe un angle quelconque SAC avec le cordon AC ; ce qui ne pourra être autrement, ſi les trois AC, AD, AF, ſont en plans differens ; & ce qui ſera toûjours poſſible, s'ils ſont tous trois en même plan, puiſque (*Hyp.*) AD ou AF fait un angle avec AC. Autour de cette diagonale AS ſoit le parallelogramme LM, de côtez AL, AM, pris ſur les cordons AD, AF, ſuppoſez au-deſſus du plan BEAO, au deſſus duquel cette diagonale AS ſera conſequemment auſſi. Ayant ainſi AS au-deſſus de ce plan, & (*Hyp.*) AC au-deſſous ; il eſt viſible que le plan SAC coupera celui-là en quelque ſection AP qui ſera ainſi dans ces deux plans BEAO, SAC. Donc ST parallele à AC, rencontrera cette ſection commune AP en quelque point T, duquel ſi l'on mene TK parallele à AS, elle rencontrera auſſi le cordon AC en quelque point K, & achevera ainſi ſur le plan SACP le parallelogramme SK, dont la diagonale AT ſera auſſi dans le plan BEAOP des deux cordons AB, AE: deſquels le cordon BA prolongé vers Q, ſera conſequemment rencontré en quelque point G par TG parallele à AE : de ſorte que AE devant auſſi être rencontrée en quelque point H par GH parallele à AP ; l'on aura enfin dans ce plan BEAOP le parallelogramme HT, dont la diagonale AG ſera (*Hyp.*) en ligne droite avec AB.

Cela fait, je dis que ſi aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données en plans differens, l'on applique autant de puiſſances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui ſoient entr'elles comme les parties correſpondantes AG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions : ces cinq puiſſances demeureront ici toutes en équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions données.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*Hyp.*) F. D :: AL. AM. le Lem. 1. fait voir

que du concours d'action de ces deux puiſſances F, D, il reſultera au nœud A une impreſſion ou force (que j'appelle S) ſuivant AS, équivalente à l'effort commun de ces deux puiſſances F, D, ſur ce nœud A : laquelle force S ſera à chacune d'elles comme cette diagonale AS du parallelogramme ML ſera à chacun de ſes côtez correſpondans AM, AL ; de ſorte que l'on aura ici S. C :: AS. AK. Par conſequent (*Lem.* 2.) du concours d'action de ces deux forces S, C, ſur ce nœud A, il lui en reſultera une (que j'appelle T) ſuivant AT, équivalente à l'effort commun des trois F, D, C, ſur ce nœud A : laquelle force T ſera à la puiſſance C, comme cette diagonale AT du parallelogramme SK ſera à ſon côté correſpondant AK ; c'eſt-à-dire, T. C :: AT. AK. Or (*Hyp.*) C. E :: AK. AH. Donc T. E :: AT. AH. Par conſequent (*Lem.* 2.) du concours d'action de ces deux forces T, E, ſur le nœud A, il lui en reſultera une (que j'appelle G, ſuivant AG, équivalente à l'effort commun des quatre puiſſances F, D, C, E, ſur ce nœud A ; laquelle force G ſera à la puiſſance E, comme cette diagonale AG du parallelogramme TH ſera à ſon côté correſpondant AH ; c'eſt-à-dire, G. E :: AG. AH. Or on a auſſi (*Hyp.*) B. E :: AG. AH. Donc G = B. Par conſequent ces deux forces égales G, B, étant (*Hyp.*) directement oppoſées, il y aura ici équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la premiere G eſt équivalente à tout l'effort que les quatre puiſſances C, D, E, F, font enſemble de A vers G ſuivant AG ou AQ ſur le nœud A. Donc ces quatre puiſſances feront ici équilibre avec la cinquiéme B. *Ce qu'il falloit* 1°. *trouver & démontrer.*

PART. II. Si l'on conſidere que dans la precedente ſolut. part. 1. la diagonale AS du parallelogramme LM, a été priſe de grandeur & de poſition indéterminées, on verra que les côtez AL, AM, de ce parallelogramme ſont auſſi indéterminez de grandeur & de rapport non ſeulement entr'eux, mais encore avec AK, AH, AG. Donc les rapports entr'elles de ces cinq lignes AG, AK,

AL, AH, AM, ſont variables à l'infini. Cependant on vient de démontrer (*part.* 1.) que cinq puiſſances B, C, D, E, F, en raiſon de ces cinq lignes, & appliquées chacune à chacun des cinq cordons correſpondans AB, AC, AD, AE, AF, ainſi dirigez, feroient toujours équilibre entr'elles ſuivant ces directions données. Donc une infinité de puiſſances, cinq à cinq, en des rapports differens à l'infini, feroient ainſi équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions. Par conſequent le Problême eſt ici indéterminé. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Si un des deux cordons AF, AD, ſuppoſez au-deſſus du plan BAE, eſt dans ce plan, on ſe ſervira encore d'eux comme l'on vient de faire dans la part. 1. *pour prouver comme là que le Probléme eſt ici poſſible; & un raiſonnement ſemblable à celui de la part.* 2. *prouvera auſſi comme là qu'il eſt encore ici indéterminé.*

PART. III. C'eſt ainſi (*part.* 1. 2.) que le Problême de cinq cordons de directions données en plans differens, eſt toûjours indéterminé tant que ces cinq cordons ſe trouvent répandus en plus d'une demi-ſphere dont leur nœud commun ſoit le centre. Il s'agit preſentement de faire voir que ce Problême eſt toûjours impoſſible, lorſque ces cinq cordons de directions données en plans differens, ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere. C'eſt ce qui ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4. & *ce qu'il falloit ici* 3°. *faire voir.*

CAS II.

Lorſque les cinq directions données ſont toutes en meſme plan, le Probleme eſt encore toujours indéterminé ou impoſſible.

Voici auſſi la démonſtration de cette propoſition en trois parties, dans leſquelles je vas faire voir,

I. Que lorſque les cinq cordons de directions données toutes en même plan, ſont répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême eſt toûjours poſſible.

II.

II. Qu'alors il eſt toûjours indéterminé.

III. Que lorſque les cinq cordons de directions données en même plan, ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême eſt toûjours impoſſible.

PART. I. Suppoſons preſentement que les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, des Fig. 352. 353. 354. regardez ci-deſſus (*cas* 1.) comme en plans differens, ſont ici tous de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, dont leur nœud commun A ſoit le centre; ſoit que ces cinq cordons ayent autant de directions differentes ſur le plan commun, ou qu'il s'y en trouve en lignes droites les uns avec les autres. Dans cette hypotheſe, où il n'y a plus de ſections AO, AP, de plans differens, comme dans la part. 1. du cas 1. ſoient ſeulement les ſimples droites AS, AP, qui en faiſant entr'elles un angle quelconque SAP ſur le plan de ces cordons, en diviſent les angles FAD, DAC, dans les Fig. 352. 353. ou FAD, FAC, dans la Fig. 354. en tels rapports qu'on voudra, & dont AS ſoit auſſi priſe de grandeur arbitraire.

SOLUTION I.

Si dans la preſente hypotheſe l'on fait en même plan les parallelogrammes LM, SK, TH, de la maniere qu'on les a faits en plans differens dans la part. 1. du cas 1. & qu'on applique ici comme là aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions encore ici données, autant de puiſſances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui ſoient entr'elles comme les parties correſpondantes AG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions: on démontrera ici que ces cinq puiſſances y demeureront en équilibre entr'elles ſuivant ces directions ici données en même plan, & de cordons répandus en plus d'un demi-cercle; comme on a démontré là que les cinq puiſſances qu'on y a aſſignées, y devoient demeurer en équilibre ſuivant les directions qui y étoient données en plans differens, & de cordons répandus en plus d'une demi-ſphere. Donc le Problême eſt toûjours poſſible ici comme là. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

SOLUTION II.

Fig. 355. Quelques ſoient les cinq directions ici données en même plan, des cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, répandus en plus d'un demi-cercle, ſoit qu'il s'en trouve en lignes droites entr'eux, ou non; il eſt viſible que des cinq il y en aura toûjours quelqu'un qui ne ſera en ligne droite avec aucun autre, & qui prolongé par de-là leur nœud comme A, en aura toûjours deux de chaque côté de lui comme dans la Fig. 355. ou trois d'un côté, & un de l'autre comme dans la Fig. 356. Soit dans la Fig. 355. BA ce cordon qui prolongé vers Q ait ainſi AC avec AD d'un côté, & AE avec AF de l'autre, ſoit que ceux d'un côté ſoient en lignes droites, ou non, avec ceux de l'autre. Sur cette droite BAQ ſoient priſes depuis A de part & d'autre, deux parties égales quelconques AG. AV: ſur AV, & ſur une partie quelconque AN de AG, comme diagonales, ſoient les parallelogrammes HL, MK, dont les côtez ſoient ſur les cordons qui forment les angles que la droite BAQ diviſe en quelques rapports que ce ſoient.

Cela fait, je dis que ſi aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données, l'on applique autant de puiſſances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui ſoient entr'elles comme les parties correſpondantes NG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions; ces cinq puiſſances demeureront ici en équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*Hyp.*) D. E :: AL. AH. Et C. F :: AK. AM. Le Lem. 2. fait voir que du concours d'action des deux premieres puiſſances D, E, ſur le nœud A, il lui reſultera une force ou impreſſion (que j'appelle V) de A vers Q ſuivant AV ou AQ, laquelle force V ſera à chacune de ces deux puiſſances D, E, comme cette diagonale AV du parallelogramme HL ſera à chacun de ſes côtez correſpondans AL, AH; & que du concours d'action des deux

Digitized by Google

autres puiſſances C, F, ſur le même nœud A, il lui reſultera pareillement une autre force ou impreſſion directement contraire (que j'appelle N) de A vers B ſuivant AB ou AN, laquelle force N ſera auſſi à chacune de ces deux autres puiſſances C, F, comme cette diagonale AN du parallelogramme MK ſera à chacun de ſes côtez correſpondans AK, AM: de ſorte que l'on aura ici V. D :: AV. AL. Et C. N :: AK. AN. Donc ayant (*Hyp.*) D. C :: AL. AK. l'on aura auſſi V. N :: AV. AN. Or venant de trouver N. C :: AN. AK. Et ayant (*Hyp.*) C. B :: AK. NG. l'on aura de même N. B :: AN. NG. Et conſequemment N. N+B :: AN. AN+NG. (AG) Donc V. N+B :: AV. AG. De ſorte qu'ayant ici (*Hyp.*) AV=AG, l'on y aura auſſi V=N+B. Donc N+B étant (ci-deſſus) l'effort total de A vers B ſuivant AB, reſultant du concours d'action des trois puiſſances C, F, B, ſur le nœud A; & V un effort directement contraire de A vers Q ſuivant AQ ſur le même nœud A, reſultant du concours d'action des deux autres puiſſances D, E, contre ces trois-là; ces cinq puiſſances demeureront ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions qu'on y ſuppoſe données. *Ce qu'il falloit auſſi démontrer.*

SOLUTION III.

Ce Problême de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions données toutes en même plan, & répandues en plus d'un demi-cercle, ſe peut encore reſoudre autrement, en menant au hazard ſur le plan de ces cordons, & par leur nœud commun A, les droites RAP, AS, dont la premiere RP diviſe deux DAE, BAC, de leurs angles en quelques rapports que ce ſoient, & la ſeconde AS diviſe un EAF de leurs autres angles en quelque rapport que ce ſoit auſſi. Autour de AS (comme diagonale) priſe de grandeur auſſi arbitraire que ſa poſition l'eſt dans l'angle EAF, ſoit le parallelogramme HM des côtez AH, AM, pris ſur ceux AE, AF, de cet angle. Du point S parallelement à AD, ſoit menée SQ qui rencontre AR en Q; FIG. 356.

duquel point Q ſoit auſſi menée parallelement à AS, la droite QL, qui rencontre AD en L, & acheve ainſi le parallelogramme SL, dont AQ eſt la diagonale. Enſuite de l'autre côté de A ſur la droite RAP, ſoit priſe AN=AQ, & ſur cette diagonale AN ſoit fait le parallelogramme GK de côtez AG, AK, pris ſur AB, AC.

Cela fait, je dis que ſi aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données toutes en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit ſur ce plan, de leur nœud commun A comme centre, l'on applique autant de puiſſances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui ſoient entr'elles commme les parties AG, AK, AL, AH, AM, de leurs cordons ainſi dirigez; ces cinq puiſſances feront encore ici équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions données.

DEMONSTRATION.

Puiſque (*Hyp.*) E. F :: AH. AM. le Lem. 2. fait encore voir ici qu'en appellant S la force reſultante du concours d'action de ces deux puiſſances E, F, au nœud A ſuivant AS; l'on aura ici S. E :: AS. AH. Ainſi ayant (*Hyp.*) E. D :: AH. AL. l'on aura pareillement ici S. D :: AS. AL. Par conſequent (*Lem.* 2.) du concours de ces deux forces S, D, c'eſt-à-dire, des trois puiſſances F, E, D, il reſultera au nœud A une impreſſion ou force de A vers R ſuivant AR, laquelle étant appellée Q, l'on aura ici Q. D :: AQ. AL. Il reſultera de même (*Lem.* 2.) du concours des deux autres puiſſances B, C, à ce nœud A une force de A vers P ſuivant AP en ſens directement contraire, laquelle force étant appellée N, l'on aura auſſi C. N :: AK. AN. Donc ayant (*Hyp.*) D. C :: AL. AK. l'on aura enfin Q. N :: AQ. AN. De ſorte qu'ayant (*Hyp.*) AQ=AN, l'on aura pareillement ici Q=N. Ainſi ces deux forces égales Q, N, ſuivant AQ, AN, étant (comme l'on voit) directement contraires, feront ici équilibre entr'elles; & par conſequent auſſi les cinq puiſſances B, C, D, E, F, du concours deſquelles on voit que

ces deux forces Q, N, reſultent. *Ce qu'il falloit encore ici démontrer.*

PART. II. 1°. Si l'on conſidere que dans la ſolut. 1. de la part. 1. Fig. 352. 353. 354. La diagonale AS du parallelogramme LM a été priſe de grandeur & de poſition indéterminées, comme dans la part. 1. du cas 1. Cette raiſon, qui dans ce cas 1. a fait voir (*part.* 2.) que le Problême de cinq cordons de directions données en plans differens, & répandus en plus d'une demi-ſphere, y étoit indéterminé, fera voir de même que celui-ci de cinq cordons de directions ici données toutes en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, y eſt auſſi indéterminé, & ce d'autant plus que la poſition de AP y eſt de plus indéterminée. FIG. 352. 353. 354.

2°. Quant à la ſolut. 2. de la part. 1. Fig. 355. la liberté qu'on y a eue auſſi de diviſer AG en N, en tel rapport qu'on a voulu, rendant arbitraires non ſeulement les rapports de NG à AK, AL, AH, AM, mais auſſi ceux de AK, AM à AH, AL, rend les rapports entr'elles de ces cinq lignes variables à l'infini, quoique ceux de AK à AM, & de AH à AL, ſoient conſtans, & qu'ils puiſſent quelquefois être les mêmes, comme lorſque CAE & DAF ſont deux lignes droites. Donc auſſi les rapports entr'elles de cinq puiſſances B, C, D, E, F, proportionnelles (*part.* 1. *ſolut.* 2.) à ces cinq lignes NG, AK, AL, AH, AM, ſeroient ici variables à l'infini. Cependant on vient de voir (*part.* 1. *ſolut.* 2.) que cinq telles puiſſances ſeroient toûjours équilibre entr'elles ſuivant les directions ici données, deſquelles ces cinq lignes ſont autant de parties. Donc une infinité de puiſſances, cinq à cinq, en des rapports differens à l'infini, ſeroient ici équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions données de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle Par conſequent ce Problême eſt encore ici indéterminé. FIG. 355.

3°. De ce que dans la ſolut. 3. part. 1. Fig. 356. les deux droites RAP, AS, ſont encore indeterminées de poſition, FIG. 356.

& AS de grandeur, le tout comme dans la ſolut. 1. Fig. 352. 353. 354. de la même part. 1. Cette raiſon, qui dans l'art. 1. de la preſente part. 2. vient de faire voir que le Problême dont il s'agit ici, y étoit indéterminé, fait voir de même qu'il l'eſt pareillement ici.

FIG. 352. 353. 354. 355. 356. 4°. Mais ce qui prouve cela tout d'un coup & à la fois pour toutes les ſolut. 1. 2. 3. de la part. 1. Fig. 352. 353. 354. 355. 356. c'eſt que les deux puiſſances D, F, qui ſe reduiſent à une S dirigée ſuivant AS dans les Fig. 352. 353. 354. part. 1. ſolut. 1. comme font les deux puiſſances E, F, dans la Fig. 356. de cette part. 1. ſolut. 3. & que les deux puiſſances D, E, qui ſe reduiſent auſſi à une V dirigée ſuivant AV dans la Fig. 355. de la même part. 1. ſolut. 2. reduiſant ainſi à quatre en même plan, & en plus d'un demi-cercle, les cinq cordons de cette part. 1. Le cas 2. du Problême 1. fait voir par cela ſeul que le Problême dont il s'agit ici, y eſt toûjours indéterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. C'eſt ainſi (*part.* 1. 2.) que le Problême de cinq cordons de directions données toutes en même plan, eſt toûjours indéterminé tant que ces cinq cordons ſe trouvent répandus en plus d'un demi-cercle, dont leur nœud commun ſoit le centre. Il s'agit preſentement de faire voir que ce Problême eſt toûjours impoſſible, lorſque ces cinq cordons de directions données en même plan, ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle: c'eſt ce qui ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4. & *ce qu'il falloit ici 3°. faire voir.*

CONCLUSION DES CAS I. II.

Donc quelques ſoient les directions données de cinq cordons attachez enſemble par un ſeul & même nœud, auſquels il s'agit d'appliquer autant de puiſſances (une à chacun) qui faſſent équilibre entr'elles ſuivant les directions données; le Problême eſt toûjours indéterminé ou impoſſible: ſçavoir,

1°. Toûjours indéterminé (*part.* 1. 2. *des cas* 1. 2.) tant

que les cinq cordons de directions données, ſont en plans differens, & répandus en plus d'une demi-ſphere, ou lorſqu'ils ſont tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle.

2°. Et toûjours impoſſible (*part.* 3. *des cas* 1. 2.) tant que ces cinq cordons de directions données, ſont en plans differens, ſans être répandus en plus d'une demi-ſphere, ou tous en même plan, ſans être répandus en plus d'un demi-cercle.

C'eſt-là tout ce qu'il s'agiſſoit de trouver & de démontrer dans le preſent Probl. 15.

REMARQUE GENERALE.

I. La ſolution du preſent Probl. 15. de cinq cordons attachez enſemble par un ſeul nœud, & de directions données à volonté, fait aſſez voir comment on pourroit reſoudre de même tout autre Problême de tant de cordons qu'on voudra, attachez ainſi enſemble, & de directions données à volonté. Mais il n'eſt pas beſoin d'entrer ſur cela dans un plus grand détail pour voir ce que j'ai dit d'abord, que lorſque le nombre des cordons de directions ainſi données, eſt au-deſſus de quatre, le Problême eſt toûjours indéterminé ou impoſſible; puiſque tel eſt (*cas* 1. 2. *du Probl.* 15.) celui de cinq cordons, & que par la méthode précedente qui le fait voir, on reduira toujours à ce nombre de cinq tel autre plus grand nombre de cordons qu'on voudra, préciſement de la même maniere que dans la part. 1. des cas 1. 2. de la ſolut. du Probl. 15. les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, ont été reduits à quatre AB, AC, AD, AS, dans les Fig. 352. 353. 354. deſquels AS pris ainſi pour un cordon tiré par une puiſſance S, qui ſeroit à chacune des deux D, F, comme cette diagonale AS à chacun des côtez correſpondans AL, AM, du parallelogramme LM, équivaudroit (*Lem.* 2.) aux deux cordons AD, AF, tirez par ces deux puiſſances D, F. Et comme ç'a été l'indétermination de poſition de ce nouveau cordon AS ſubſtitué au lieu des deux AD, Fig. 352. 353. 354.

AF, avec une telle puiſſance S, au lieu des deux D, F, qui a cauſé l'indétermination de ce Probl. 15. dans les part. 1. 2. de ſon cas 1. & l'a augmentée dans les part. 1. 2. de ſon cas 2. On voit que plus il y aura de cordons de directions données au-deſſus de cinq, plus il y aura auſſi de nouvelles raiſons d'indétermination dans tous les autres Problêmes; leſquels, comme les deux précedens, ſeront toûjours poſſibles tant que les cordons y ſeront répandus en plus d'une demi-ſphere, ou en plus d'un demi-cercle, & toûjours impoſſibles (*Lem.* 2. *Corol.* 2.) dans tous les autres cas.

FIG. 355. 356. Ce qu'on vient de dire des cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, reduits à quatre AB, AC, AE, AS, dans les Fig. 352. 353. 354. part. 1. des cas 1. 2. de la ſolut. du Probl. 15. ſe dira pareillement des cinq cordons qui y ont été reduits de même à quatre AB, AC, AD, AS, dans la Fig. 356. & auſſi à quatre AB, AC, AF, AV, dans la Fig. 355. pour faire encore voir que tel nombre de cordons qu'on voudra au-deſſus de cinq, pourra toûjours ſe reduire de même à cinq; & de cette maniere reduire au Probl. 15. chacun de tous ces autres Problêmes, qui par-là ſeront (comme lui) toûjours indéterminez ou impoſſibles.

II. Quant aux Problêmes de deux ou de trois cordons ainſi attachez enſemble par un ſeul nœud, & de directions auſſi données à volonté, on voit aſſez,

1°. Que lorſqu'il n'y a que deux cordons de directions données, le Problême eſt toûjours déterminé à deux puiſſances égales entr'elles, lorſque ces cordons ſont en ligne droite; & toûjours impoſſible, lorſqu'ils font quelqu'angle entr'eux: ce cas eſt celui d'une ſimple corde, aux extrêmitez de laquelle il faudroit appliquer deux puiſſances propres à faire équilibre entr'elles, leſquelles la rendroient toûjours en ligne droite.

2°. Que lorſqu'il n'y a que trois cordons de directions données, le Problême eſt toûjours auſſi déterminé ou impoſſible.

Il

Digitized by Google

Il eſt toûjours déterminé, lorſque les trois cordons AB, AC, AD, en ſont donnez en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Car alors le prolongement de chacun d'eux; par exemple, le prolongement AQ du cordon AB diviſant toûjours l'angle CAD des deux autres AC, AD, en raiſon déterminée, le parallelogramme KL d'une diagonale quelconque AG, priſe à volonté ſur AQ, & de côtez AK, AL, ainſi déterminez ſur AC, AD, aura toûjours cette diagonale en raiſon déterminée à chacun de ces côtez; & conſequemment les trois puiſſances B, C, D, requiſes aux trois cordons AB, AC, AD, pour faire équilibre entr'elles ſuivant ces directions ici données, devant être entr'elles comme les parties correſpondantes AG, AK, AL, de ces directions, chacune de ces trois puiſſances ſera toûjours ici en raiſon déterminée à chacune des deux autres; & conſequemment auſſi le Problême y ſera toûjours déterminé. FIG. 357.

Au contraire il ſera impoſſible (*Lem.* 4. *Corol.* 2.) en tout autre cas; ſçavoir, lorſque les trois cordons en même plan, n'y ſeront pas répandus en plus d'un demi-cercle; & auſſi lorſqu'ils ſeront en plans differens, n'y pouvant être répandus en plus d'une demi-ſphere.

III. Joignons preſentement ces deux articles avec les ſolutions des deux Problêmes précedens; & l'on verra pour tous les Problêmes imaginables où il s'agira d'aſſigner des puiſſances, qui appliquées chacune à chacun de tant de cordons qu'on voudra, attachez enſemble par un ſeul nœud, & de directions données à volonté, feroient équilibre entr'elles ſuivant ces directions: on verra, dis-je,

1°. Que (*art.* 2.) le Problême de deux ou de trois cordons, ſera toûjours déterminé ou impoſſible.

2°. Que (*ſolut. du Probl.* 14.) le Problême de quatre cordons ſera tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impoſſible.

3°. Qu'enfin (*ſolut. du Probl.* 15. *& art.* 1. *d'ici*) tous les autres Problêmes de plus de quatre cordons à l'infini, ſeront toûjours indéterminez ou impoſſibles.

IV. Cela étant de tous les Problêmes de directions données de tel nombre de cordons qu'on voudra, attachez tous enſemble par un ſeul & même nœud, & auſquels on demanderoit d'appliquer autant de puiſſances (une à chacun) propres à faire équilibre entr'elles ſuivant ces directions données : Cela, dis-je, étant ainſi (*art.* 3.) de tous ces Problêmes, il eſt aiſé de voir que ceux de directions données de differentes branches de corde, iſſues de differens nœuds, ſe rapportant à quelqu'un de ceux-là en chaque nœud, ſont auſſi tous déterminez, ou indéterminez, ou impoſſibles, ſelon le nombre des branches ou cordons de chaque nœud ; ſçavoir,

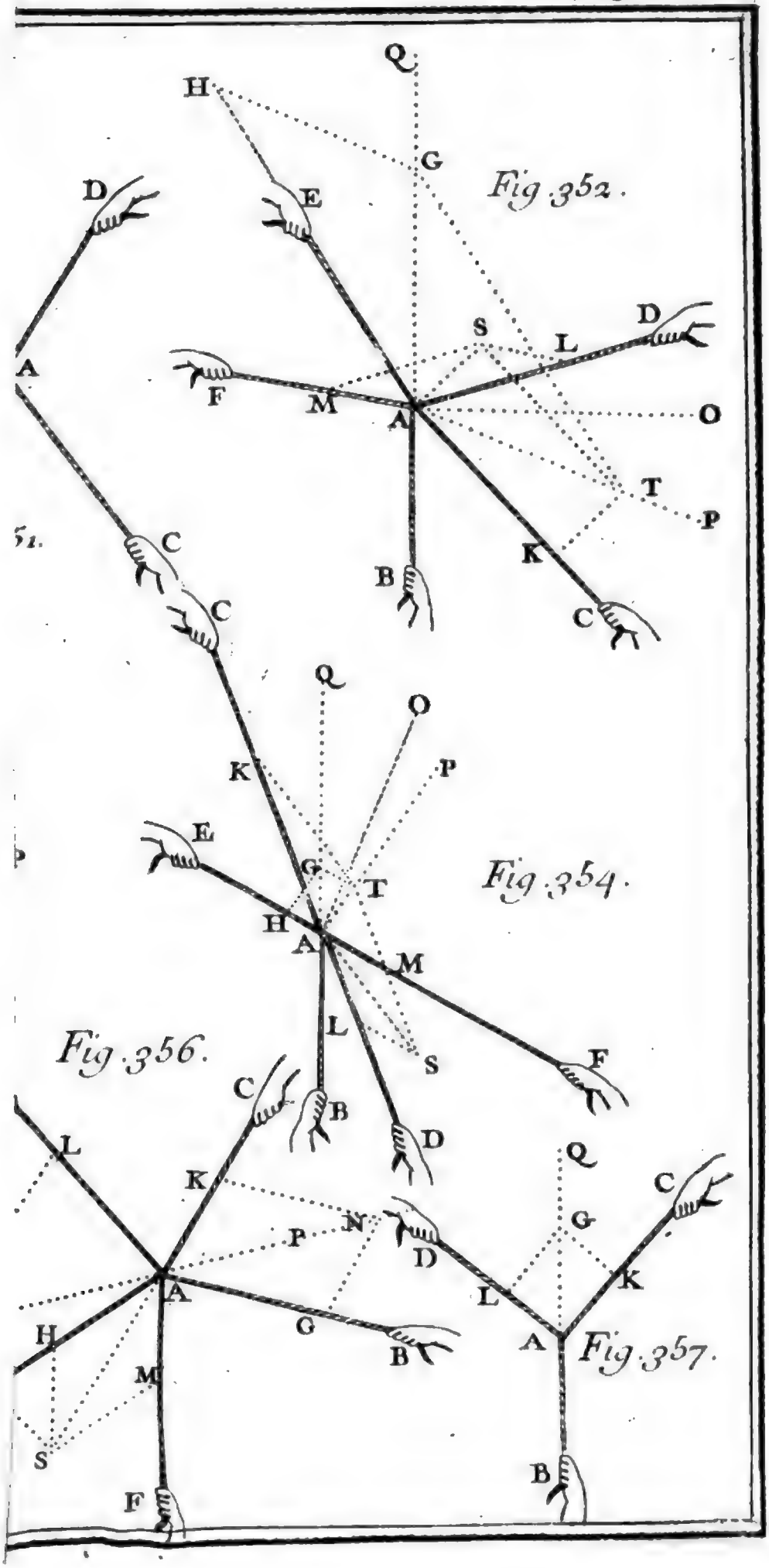
1° Déterminez ou impoſſibles (*art.* 3. *nomb.* 1.) s'il ne part que trois cordons de chaque nœud ; ce qui eſt le moins qu'il en puiſſe partir : deux cordons ſeuls ne faiſant qu'une ſimple corde ; outre qu'ils ne rendroient encore (*art.* 3. *nomb.* 1.) le Problême que déterminé ou impoſſible.

2°. Il ſera (*art.* 3. *nomb.* 2.) déterminé, ou indéterminé, ou impoſſible, s'il y a des nœuds de quatre cordons, & aucun de davantage.

3°. Enfin le Problême ſera (*art.* 3. *nomb.* 3.) indéterminé, ou impoſſible, s'il y a des nœuds de plus de quatre cordons.

C'eſt-là tout ce que j'avois avancé ſur ce ſujet, & ce qui comprend tous les Problêmes qu'on peut faire à l'infini par rapport à tel nombre de cordons qu'on voudra, attachez enſemble par un ſeul ou pluſieurs nœuds, & auſquels il faudroit appliquer autant de puiſſances (une à chacun) propres à faire équilibre entr'elles ſuivant les directions données de ces cordons : les ſolutions de tous ces Problêmes ſe trouveront préciſement comme les précedentes des Probl. 14. 15. *& du nomb.* 2. *de l'art.* 2. *de la Remarque qui les ſuit ; il n'y aura de difficulté nouvelle que pour l'imagination à ſe démêler de l'embarras des lignes & des plans que la multiplicité des cordons & de leurs directions données à volonté, y exigera pour tous les parallelogrammes qui y ſeront neceſſaires, ſur*

Digitized by Google


Q
H
G
Fig. 352.
D
E
S
L
D
A
F
M
A
O
T
P
C
K
B
C
C
Q
O
K
P
E
G
T
Fig. 354.
H
A
M
L
Fig. 356.
S
F
C
B
D
L
K
Q
C
N
G
P
D
K
A
L
H
G
B
A
Fig. 357.
M
S
B
F

Digitized by Google

tout lorſque les cordons y ſeront donnez de poſition en differens plans. C'eſt ce qui m'a empéché d'entrer ici dans un plus grand détail de ces Problémes, vû la facilité de la méthode qu'on y a ſuivie, laquelle fait aſſez voir que ſi au lieu de directions données, c'étoient ſeulement autant de points donnez par où ces directions dûſſent paſſer, ces ſortes de Problémes ſeroient ſuſceptibles d'un nombre infiniment plus grand de ſolutions que lorſque ces directions ſont données; puiſqu'alors ces puiſſances cherchées auroient leurs directions arbitraires, qui priſes à volonté par les points donnez, détermineroient ces puiſſances comme elles le viennent d'être par leurs directions données: ces Problémes, dis-je, ſeroient tous alors indéterminez, excepté le ſeul de deux cordons ſeulement, ou d'une ſimple corde, qui pour l'équilibre entre deux puiſſances appliquées à ces extrêmitez, les exige toûjours égales entr'elles; au lieu que dans les Problémes de trois cordons toûjours en même plan, ou de quatre en plans differens, les rapports des puiſſances ſeroient auſſi variables que leurs directions, & encore plus qu'elles dans le Problême de quatre cordons en même plan, & dans les autres d'un plus grand nombre de cordons attachez enſemble par un ſeul & même nœud: variabilité des rapports des puiſſances requiſes pour l'équilibre, laquelle augmenteroit avec le nombre de ces cordons.

PROBLEME XVI.

Dix puiſſances Φ, A, E, D, B, F, G, H, I, K, appliquées à pluſieurs nœuds de cordes, étant données avec les angles que toutes ces cordes ſont entr'elles; trouver la valeur du poids T, que toutes ces puiſſances ainſi appliquées ſoûtiennent enſemble. FIG. 338.

SOLUTION.

Soit la valeur de chaque puiſſance, & de chaque angle donné dans la Table ſuivante.

Puiſſance.	Livres.		Angle.	Deg.	M.
Φ	5.		θCT	45.	30.
A	4.	¼	MCT	150.	20.
E	7.	¼	LZC	58.	30.
D	12.	½	RZC	112.	15.
B	14.		VOZ	151.	
F	11.	½	SOZ	110.	
G	17.		QZC	143.	
H	7.	½	NCT	145.	
I	16.		βXC	131.	30.
K	13.	½	hXC	123.	30.
			PCT	64.	40.
			∂YC	62.	
			zYC	107.	20.
			eYC	151.	40.

Cela ſuppoſé, ſur les branches des cordes auſquelles les puiſſances φ, A, E, D, B, F, G, H, I, K, ſont immediatement appliquées, ſoient priſes depuis leurs nœuds des parties θC, LZ, VO, SO, QZ, βX, hX, ∂Y, zY, εY, qui ſoient entr'elles comme les forces de ces mêmes puiſſances, c'eſt-à-dire, comme les chifres qui leur répondent dans la Table précedente.

Preſentement ſi l'on regarde chacune de ces proportionnelles comme un ſinus total, le ſinus de la difference d'un angle droit à l'angle d'application de la puiſſance qui répond à cette proportionnelle, ſera la ſublimité ou la profondeur de cette même puiſſance : par exemple, ſi l'on prend la proportionnelle Cθ de la puiſſance φ pour un ſinus total, ſa profondeur Cλ ſera le ſinus de l'angle Cθλ, qui eſt la difference de θCλ, angle d'application de cette puiſſance à un angle droit. De même en prenant la proportionnelle VO de la puiſſance E, pour un ſinus total, ſa ſublimité Oω ſera le ſinus de l'angle OVω, qui eſt la difference d'un angle droit à ſon angle d'application VOZ : de cette façon nous aurons les ſublimitez & les profondeurs de toutes ces puiſſances par les analogies ſuivantes.

Comme	au				Ainſi		à	
Le ſinus total	Sinus	de l'angle	de Deg. M. difference de 90 deg. à l'angle d'aplication.	de la puiſſance	La proportionnelle de cette même puiſſance	de	Sa ſublimité, ou ſa profondeur	de
	7009093.	C θ λ	44.30.	Φ	C θ	5.	C λ	3. $\frac{10\,1\,5\,0\,0\,1}{2\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.
	5224986.	Z L *l*	31.30.	A	Z L	4. $\frac{1}{4}$	Z *l*	2. $\frac{6\,4\,1\,5\,5\,8\,1}{8\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.
	8746197.	O V *u*	61.	E	O V	7. $\frac{1}{4}$	O *u*	6. $\frac{1\,3\,6\,1\,9\,7\,1\,3}{4\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.
10000000.	3420202.	O S *ſ*	20.	D	O S	12. $\frac{1}{2}$	O *ſ*	4. $\frac{1\,1\,0\,1\,0\,1}{4\,0\,0\,0\,0\,0}$.
	7986355.	Z Q *q*	53.	B	Z Q	14.	Z *q*	11. $\frac{1\,8\,0\,8\,9\,7}{1\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.
	6626201.	X β *f*	41.30.	F	X β	11. $\frac{1}{2}$	X *f*	7. $\frac{6\,4\,1\,9\,0\,4\,1}{1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.
	5519370.	X *h b*	33.30.	G	X *h*	17.	X *b*	9. $\frac{3\,8\,2\,9\,2\,9}{1\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.
	4694716.	Y *ſ d*	28.	H	Y *ſ*	7. $\frac{1}{2}$	Y *d*	3. $\frac{5\,2\,1\,0\,1\,7}{1\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.
	2979303.	Y *z x*	17.20.	I	Y *z*	16.	Y *x*	4. $\frac{6\,7\,9\,1\,0\,2}{6\,1\,5\,0\,0\,0}$.
	8802014.	Y *e g*	61.40.	K	Y *e*	13. $\frac{1}{2}$	Y *g*	11. $\frac{8\,8\,2\,7\,1\,8\,9}{1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$.

Après avoir ainſi trouvé la valeur de chacune des ſublimitez & des profondeurs de toutes les puiſſances qui ſoûtiennent le poids T ; ſoit priſe ZR égale à O*u* plus O*ſ* ; c'eſt-à-dire, ſuivant les analogies précedentes, égale à 6. $\frac{1\,3\,6\,1\,9\,7\,1\,3}{4\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0}$ plus 4. $\frac{1\,1\,0\,1\,0\,1}{4\,0\,0\,0\,0\,0}$; ou bien en reduiſant ces deux

fractions à une même dénomination égale à 10. $\frac{24649811}{40000000}$.

Après cela OV étant à ZR, comme la puiſſance E à la force dont le point Z eſt tiré ſuivant ZO par le concours d'action des puiſſances D & E; ZR ſera la proportionnelle de cette force, & l'angle RZC étant (*Hyp.*) de 112. degrez 15. minutes, ſa difference à un angle droit; c'eſt-à-dire, l'angle ZR*r* ſera de 22. degrez 15. minutes. Ce qui donnera par une analogie ſemblable aux précedentes, 3. $\frac{17426528590165590}{20000000000000000}$. pour la valeur de Z*r*, ſublimité de cette force; puiſque ZR de 10. $\frac{24649811}{40000000}$. eſt à 3. $\frac{17426528590165590}{20000000000000000}$. comme le ſinus total 10000000. à 3786486. ſinus de l'angle ZR*r* de 22. deg. 15. min.

Soit enſuite 1°. CM égale à Z*q* plus Z*r* moins Z*l*, c'eſt-à-dire, ſuivant les analogies que nous venons de trouver, égale à 11. $\frac{18082997}{10000000}$. plus 3. $\frac{17426528590165590}{20000000000000000}$. moins 2. $\frac{44123851}{20000000}$. ou bien en reduiſant ces trois fractions à une même dénomination, égale à 12. $\frac{16631208759165590}{20000000000000000}$. Ce qui donnera par une analogie ſemblable aux précedentes, 11. $\frac{74566272432665199141}{50000000000000000000}$. pour la valeur de la ſublimité C*m*; puiſque 12. $\frac{16631208759165590}{20000000000000000}$. eſt à 11. $\frac{74566272432665199141}{50000000000000000000}$. comme le ſinus total 10000000. à 8689196. ſinus de l'angle CM*m* de 60. deg. 20. min. qui eſt la difference d'un angle droit à l'angle MCT de (*Hyp.*) 150. deg. 20. min.

2°. Faites de même CN égale à X*b* plus X*f*; c'eſt-à-dire, ſuivant les analogies de la Table précedente, égale à 9. $\frac{18219219}{10000000}$ plus 7. $\frac{74390441}{100000000}$; ou bien en reduiſant ces deux fractions à une même dénomination égale à 16. $\frac{24097623}{20000000}$. Ce qui donnera par une analogie ſemblable aux précedentes, 13. $\frac{51675918543583}{100000000000000}$ pour la valeur de la ſublimité C*n*; puiſque 16. $\frac{24097623}{20000000}$ eſt à 13. $\frac{13167676958141483}{20000000000000000}$

comme le ſinus total 10000000. à 8191521. ſinus de l'angle CN*n* de 55. deg. qui eſt la difference d'un angle droit à l'angle NCT de (*Hyp.*) 145. deg.

3°. Enfin ſoit encore CP égale à Y*g* plus Y*x* moins Y*d*; c'eſt-à-dire, ſuivant les analogies de la Table précedente, égale à 11. $\frac{82871869}{100000000}$ plus 4. $\frac{4791093}{62500000}$ moins 3. $\frac{5210317}{100000000}$; ou bien en reduiſant ces trois fractions à une même dénomination égale à 12. $\frac{2321416855}{2820000000}$. Ce qui donnera par une analogie encore ſemblable aux précedentes, 5. $\frac{6864422133021777}{14100000000000000}$ pour la valeur de la profondeur C*p*; puiſque 12. $\frac{2321416855}{2820000000}$. eſt à 5. $\frac{6864422133021777}{14100000000000000}$, comme le ſinus total 10000000. à 4278838. ſinus de l'angle CP*p* de 25. deg. 20. min. qui eſt la difference d'un angle droit à l'angle PCT de (*Hyp.*) 64. deg. 40. min.

De tout cela on voit preſentement que

la { Subl. C*m*, Subl. C*n*, Prof. Cλ, Prof. C*p* } eſt égale à { 11. $\frac{7416627243166531991410000000000000000000000}{}$, 13. $\frac{1367676948543188}{2000000000000000}$, 3. $\frac{10130935}{200000000}$, 5. $\frac{6864422133021777}{14100000000000000}$. }

De ſorte qu'en reduiſant toutes ces fractions à une même dénomination, on aura C*m*+C*n*−Cλ−C*p*= 15. $\frac{2919081693141374505788811}{7050000000000000000000000000}$. Or ayant pris, comme nous venons de faire, 1°. CR=O*ſ*+O*u*. 2°. CM=Z*q*+Z*r*−Z*l*. 3°. CN=X*f*+X*b*. 4°. CP=Y*g*+Y*x*−Y*d*, chacune des puiſſances qui ſoûtiennent ainſi le poids T; par exemple, la puiſſance E eſt (*prop.* 4. *Cor.* 1.) à ce poids comme ſa proportionnelle OV de (*Hyp.*) 7 $\frac{1}{4}$ à C*m*+C*n*−Cλ−C*p*. Donc cette même puiſſance E eſt à ce poids comme 7 $\frac{1}{4}$ à 15. $\frac{2919081693141374505788811}{7050000000000000000000000000}$; par conſequent

quent la valeur de cette puiſſance étant (*Hyp.*) de $7\frac{1}{4}$ liv. ce même poids eſt auſſi juſtement de 15. $\frac{121212121693411745078\ 11}{70,000000\ 03\ 00000\ 0}$ liv. c'eſt-à-dire, de 15. livres, & un peu plus de cinq ſeptiémes de livres. *Ce qu'il falloit trouver.*

PROBLEME XVII.

Deux puiſſances F, H, étant données avec leurs points Q, V, d'application à un Levier quelconque QV, & avec leurs directions QF, VH; trouver l'appui de ce Levier, avec la charge & la direction de cet appui, ſur lequel ces deux puiſſances doivent faire équilibre entr'elles. FIG. 359. & ſuivantes juſqu'à 365.

CAS I.

Dans lequel les directions données QF, VH, des puiſſances auſſi données F, H, ſont paralleles entr'elles. FIG. 359. 360. 361.

SOLUTION.

Du point donné V ſoit menée VS perpendiculaire en S ſur la direction donnée QF de la puiſſance F. Sur cette perpendiculaire VS prolongée ſoient priſes VT. TS :: F. H. Après quoi ſoit menée TB parallele à QF, & qui rencontre en quelque point B le Levier VQ prolongé en ligne droite ou courbe à volonté.

Je dis que ce point B de ce Levier de figure quelconque, & d'eſpece auſſi quelconque, ſera celui de ſon appui ſur lequel les deux puiſſances données F, H, feront équilibre entr'elles ſuivant leurs directions données QF, VH; & que la charge qui en reſultera à cet appui B ſera ſuivant une direction parallele à celles des puiſſances F, H, & égale à la ſomme de ces mêmes puiſſances, lorſqu'elles agiſſent en même ſens, comme dans la Fig. 359. ou égale à leur difference, lorſqu'elles agiſſent en ſens contraires, comme dans les Fig. 360. 361. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit 1°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Par ce point B ſoit la droite BR parallele à VT ; & conſequemment perpendiculaire comme elle (*ſolut.*) à BT, QF, VH, paralleles auſſi (*ſolution*) entr'elles, dont cette droite BR prolongée rencontre en P, R, les deux dernieres QF, VH, de qui BP, BR, ſont conſequemment les diſtances au point B. Or les parallelogrammes rectangles TP, TR, qui reſultent des paralleles BR, VT, ainſi perpendiculaires aux trois autres BT, QF, VH, rendent BR. BP :: VT. TS (*ſolut.*) :: F. H. Donc ces deux puiſſances F, H, ſont ici entr'elles en raiſon reciproque des diſtances BP, BR, de leurs directions QF, VH, au point B du Levier QV, auquel elles ſont appliquées ſuivant ces directions. Par conſequent ces deux puiſſances données F, H, feront ici (*Th.* 21. *Corol.* 13.) équilibre entr'elles ſuivant ces directions ſur un appui placé en ce point B de ce Levier de figure & d'eſpece quelconques ; & que la charge qui en reſultera à cet appui, ſera (*Th.* 21. *part.* 1.) telle, & de direction telle qu'on les vient d'énoncer dans la ſolution précedente. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

CAS II.

FIG 362. 363. 364. 365. *Dans lequel les directions données QF, VH, des puiſſances auſſi données F, H, ſe rencontrent (étant prolongées) en quelque point C.*

SOLUTION.

De ce point C de rencontre entr'elles de ces deux directions données QF, VH, prolongées, ſoient priſes ſur elles vers les puiſſances F, H, ainſi dirigées, des parties CD. CE :: F. H. Deſquelles parties ſoit fait le parallelogramme CDAE, dont elles ſoient les côtez, & dont la diagonale CA prolongée rencontre en B le Levier QV auſſi prolongé. La partie 6. du Th. 21. fait voir que ce point B

ſera celui ou ce Levier de figure & d'eſpece quelconques, étant appuyé, les deux puiſſances données F, H, qui lui ſont appliquées ſuivant les directions auſſi données QF, VH, feront équilibre entr'elles; & que la charge qui en reſultera a cet appui B, ſera (*Th.* 21. *part.* 2.) de C vers A ſuivant CA, & à chacune de ces puiſſances F, H, comme cette diagonale CA eſt à chacun des côtez correſpondans CD, CE, du parallelogramme CDAE. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici* 2°. *trouver & démontrer.*

PROBLEME XVIII.

Deux puiſſances quelconques F, H, étant données avec la direction QF de la premiere F, & ſon point d'application Q à un Levier QB d'appui donné B: on demande le point d'application de la ſeconde puiſſance H à ce Levier prolongé (s'il eſt neceſſaire) en ligne quelconque, & la direction que cette puiſſance H doit avoir pour faire équilibre avec l'autre puiſſance F ſur l'appui donné B de ce même Levier de figure & d'eſpece quelconques. FIG. 359. & ſuivantes juſqu'à 372

CAS I.

Dans lequel on veut que la direction cherchée de la puiſſance H, ſoit parallele à la direction donnée QF de l'autre puiſſance F pareillement donnée. FIG. 359. 360. 361.

SOLUTION.

Du point d'appui donné B ſoit menée BP perpendiculaire en quelque point P à la direction QF prolongée de la puiſſance F. Sur cette droite BP auſſi prolongée, s'il eſt neceſſaire, ſoit priſe BR. BP :: F. H. Après quoi par le point R ſoit menée RV parallele à QF, & qui rencontre en V le Levier BQ prolongé de figure & d'eſpece quelconques.

Cela fait, je dis que la puiſſance donnée H, appliquée à ce Levier en ce point V ſuivant VR, fera équilibre ſur l'appui donné B de ce même Levier avec l'autre puiſſance

donnée F, qu'on lui ſuppoſe appliquée en Q ſuivant QF. *Ce qu'il falloit 1°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Puiſque (*ſolut.*) VH eſt parallele à QF, & qu'elle eſt rencontrée en R par BR perpendiculaire en P ſur QF; cette droite BR, où PBR eſt auſſi perpendiculaire en R ſur VH: & conſequemment BP, BR, ſont les diſtances de l'appui B à ces directions QF, VH, des puiſſances F, H. Donc ayant (*ſolut.*) BR. BP :: F. H. Ces deux puiſſances données F, H, ſeront ici (*Th.* 21. *Corol.* 13.) en équilibre entr'elles ſur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

CAS II.

FIG. 362. & ſuivantes juſqu'à 372.

Dans lequel on veut que la direction demandée de la puiſſance donnée H, rencontre quelque part la direction donnée QF de la puiſſance F pareillement donnée.

SOLUTION I.

FIG. 362. 363. 364. 365.

Sur la direction donnée QF de la puiſſance donnée F, ſoit priſe QG à volonté; & de ſon point G ſoit menée en angle quelconque QGL avec elle, la droite GL qui ſoit à GQ comme la puiſſance donnée H eſt à la donnée F, c'eſt-à-dire, GL telle qu'on ait ici GL. QG :: H. F. Après cela du point d'appui donné B ſoit menée BC parallele à QL, & qui rencontre en C la direction QF prolongée de la puiſſance F. Enfin de ce point C ſoit menée CH parallele à GL, & qui prolongée rencontre en V ce Levier auſſi prolongé (s'il eſt neceſſaire) en ligne quelconque.

Je dis que ce point V ſera le point requis d'application de la puiſſance donnée H à ce Levier, & VH la direction qu'elle doit avoir pour faire équilibre ſur l'appui donné B avec l'autre puiſſance donnée F de direction CF ou QF pareillement donné. *Ce qu'il falloit 2°. trouver.*

Digitized by Google

g 358

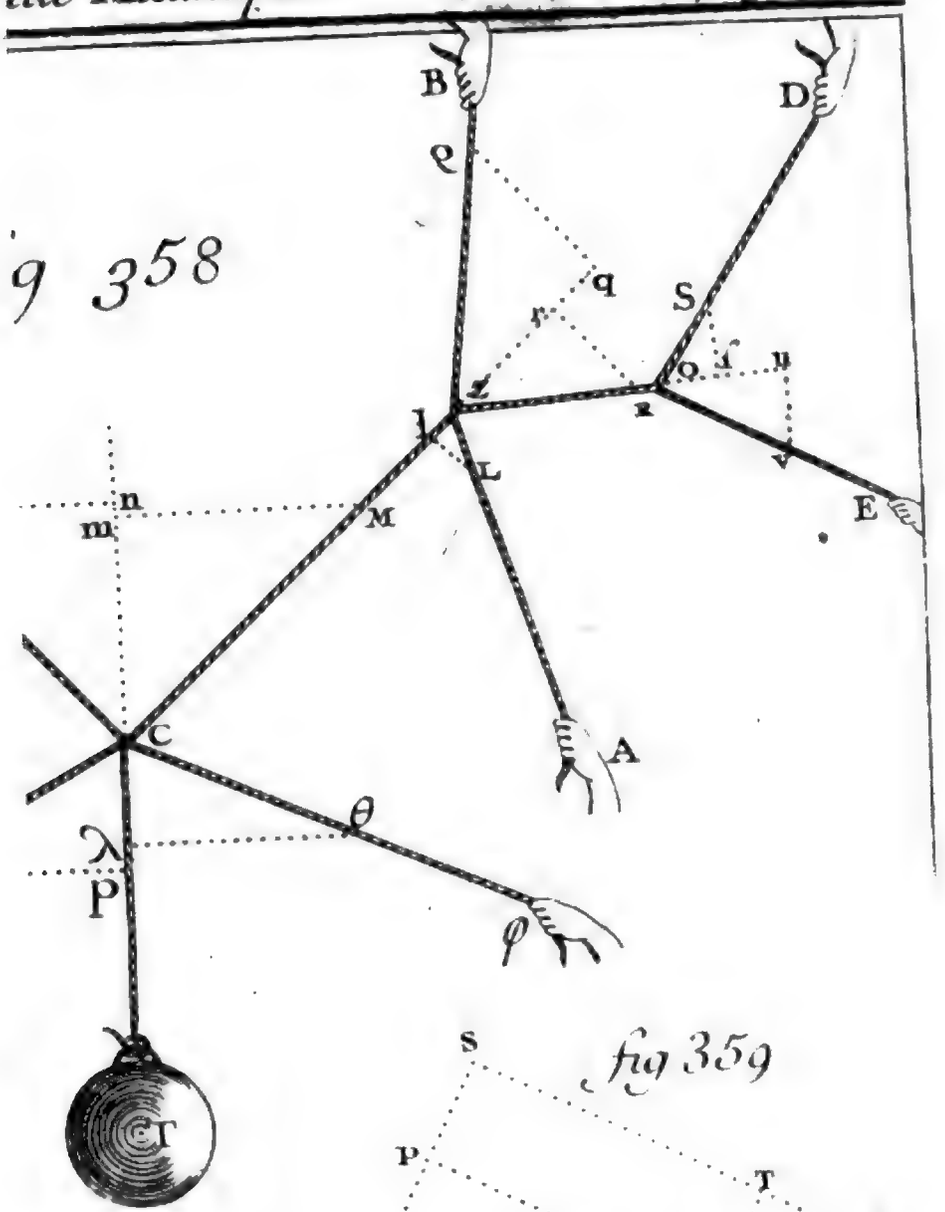


fig 359

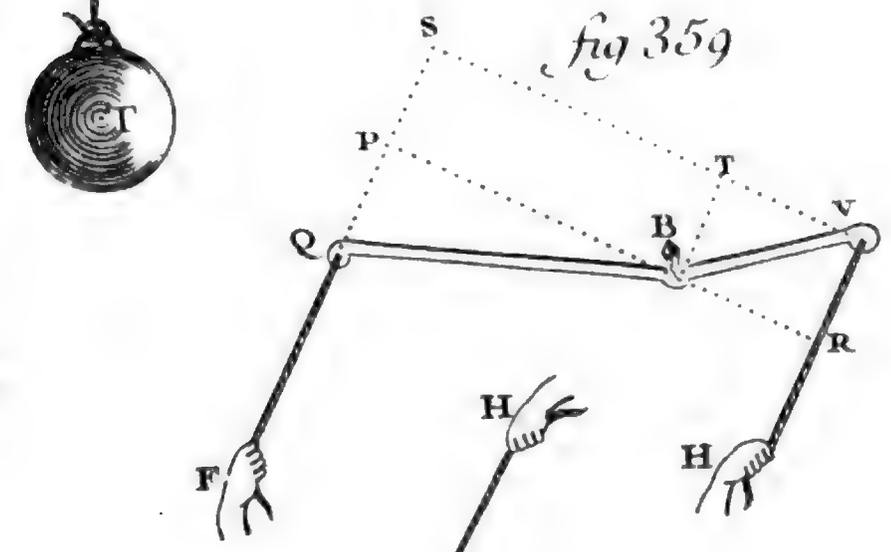
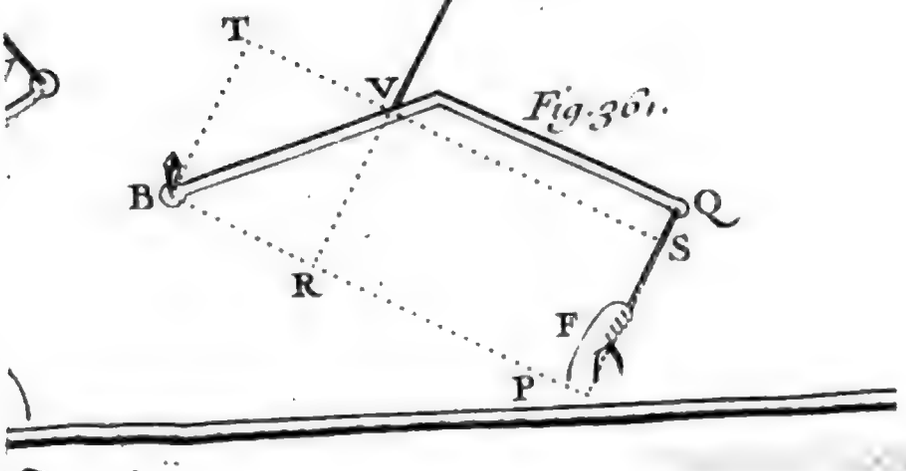


Fig. 361.



DEMONSTRATION.

D'un point D quelconque de CF, pris depuis C vers F, ſoit menée DA parallele à GL, & qui rencontre en A la droite BC prolongée, comme ſa parallele QL (*ſolut.*) eſt rencontrée en L par GL. Ce paralleliſme de DA à GL, & de CA à QL, joint à ce que CD & QG ſont ſur la même droite CF, rend les deux triangles CDA, QGL, ſemblables entr'eux; & en conſequence DA. CD:: GL. QG (*ſolut.*):: H. F. Soit preſentement menée AE parallele à CD, & qui rencontre en E la droite VH parallele (*ſolut.*) à GL, à laquelle DA vient auſſi d'être faite parallele. L'on aura ici le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſera ſur BC prolongée (s'il eſt neceſſaire) & les côtez CD, CE, ſur les directions CF, VH, des puiſſances F, H; & ce parallelogramme rendant CE = DA, l'on aura ici CE. CD:: DA. CD. Mais on vient de trouver DA. CD:: H. F. Donc on aura pareillement ici CE. CD:: H. F. Par conſequent (*Th.* 21. *part.* 6.) ces deux puiſſances données H, F, dirigées ſuivant la direction trouvée CH, & la donnée CF, ſeront ici en équilibre entre elles ſur l'appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SOLUTION II.

Du point d'appui donné B ſoit BP perpendiculaire en quelque point P à la direction donnée & prolongée QF de la puiſſance F. Sur cette perpendiculaire BP auſſi prolongée, ſoit priſe BD. BP:: F. H. Du point B ſoit menée la droite BV égale à BD, ou plus grande qu'elle en raiſon quelconque pour plus de generalité; laquelle droite BV rencontre quelque part en V le Levier QB prolongé, s'il eſt neceſſaire. Autour de cette droite BV, comme diametre, ſoit décrit le cercle BRVR, qui rencontre en R, R, l'arc circulaire RDR ou RRD décrit du centre B & du rayon BD. FIG. 366. & ſuivantes, juſqu'à 378.

Cela fait, je dis que la puiſſance donnée H, appliquée au point V du Levier BQ prolongé de ce côté-là, & di-

rigée de V vers H ſuivant celle qu'on voudra des deux droites VR, VR, ſera équilibre ſur l'appui donné B de ce Levier, avec l'autre puiſſance donnée H, qu'on lui ſuppoſe appliquée en F ſuivant QF. *Ce qu'il falloit encore 2°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Chaque demi-cercle BRV rendant la droite BR perpendiculaire en R ſur RV ou VH, comme la droite BP l'eſt (*ſolut.*) en P ſur PF ou QF; ces deux droites BR, BP, ſont les diſtances de l'appui B à ces deux directions VH, QF, des puiſſances H, F. Mais l'arc de cercle RDR ou RRD décrit du centre B par D, R, rendant BR=BD, rend auſſi BR. BP :: BD. BP (*ſolut.*) :: F. H. Donc ces deux puiſſances F, H, ſont ici entr'elles en raiſon reciproque des diſtances BP, BR, de leurs directions QF, VH, à l'appui B du Levier auquel elles ſont appliquées ſuivant ces directions. Par conſequent (*Th.* 21. *Corol.* 3.) ces deux puiſſances données F, H, ſeront ici en équilibre entr'elles ſur l'appui donné B de ce Levier quelconque. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 362. 363. 364. 365. Suivant la ſolut. 1. & la démonſtr. du cas 2. l'angle CDA des Fig. 362. 363. 364. 365. étant égal à l'arbitraire QGL, & pouvant ainſi varier à l'infini, ſans détruire l'équilibre démontré en conſequence de cette ſolut. 1. peut conſequemment changer en une infinité d'autres la direction demandée CE ou VH de la puiſſance donnée H, pendant que la direction donnée CF de l'autre puiſſance donnée F, demeure toujours la même, ſans que (*démonſtr. de la ſolut.* 1.) ces deux puiſſances données ceſſent de faire équilibre entr'elles ſur l'appui donné B. D'où l'on voit que le Problême ici propoſé, y eſt ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, à la maniere de la ſolut. 1.

COROLLAIRE II.

La ſolut. 2. & la dém. du cas 2. convenant également à chacune des deux directions RVH, VRH, de la puiſſance donnée H, determinées par le point V, & par chacune des deux coupes R, R, reſultantes de BV plus grande que BD en quelque rapport que ce ſoit, c'eſt-à-dire, (*ſolut.*) de BV en plus grande raiſon quelconque à BP que la puiſſance donnée F n'eſt à la puiſſance H; cette ſolution & cette demonſtration du cas 2. font voir enſemble que cette puiſſance H fera également ici équilibre ſuivant chacune de ces deux directions VH, VH, ſur l'appui donné B, avec la puiſſance F de direction donnée, & toûjours la même. Ce qui pour chaque rapport de majorité de BV à BD, ou à ſon égale BG, donne deux ſolutions du Problême: de ſorte que ce rapport pouvant varier à l'infini, ce Problême pourra ainſi avoir une infinité de ſolutions, double de l'infinité de ces rapports, à la maniere de la ſolut. 2. comme il en peut avoir auſſi une infinité (*Corol.* 1.) à la maniere de la ſolut. 1.

FIG. 366. & ſuivantes juſqu'à 372.

COROLLAIRE III.

Si preſentement, dans la même ſolut. 2. du cas 2. l'on ſuppoſe que le point V eſt au point E, où le Levier eſt rencontré par DE tangente en D de l'arc RDR ou DRR, & qu'ainſi BV ſoit en BE; le cercle BRVR, qui ſe trouve alors de ce diametre BE, rencontre (l'angle BDE étant droit) l'arc RDR ou DRR en D, & en un autre point également diſtant de E de l'autre côté de ce diametre BE: ce qui fait alors paſſer les points R, R, en ces deux-là, & les deux droites égales VR en deux touchantes ED en ces points de l'arc RDR ou DRR, égales auſſi entr'elles, leſquelles ſe trouvent ainſi pour lors les directions de la puiſſance donnée H, non ſeulement propres l'une & l'autre à la mettre en équilibre ſur l'appui donné B avec l'autre puiſſance donnée F de direction donnée, & toujours la même QF; mais encore dont celle qui eſt ſuivant la tou-

chante ici marquée ED ou DE de l'arc RDR ou DRR du centre B, ſe trouve comme (*ſolut.* 2.) QF ou PF, perpendiculaire à la droite DBP, & conſequemment parallele à QF, de même que dans le premier cas, lequel ſe trouve encore ainſi reſolu en conſequence de la ſolution du ſecond.

COROLLAIRE IV.

Si enfin dans la même ſolut. 2. du cas 2. le Levier paſſoit par le point D, en qui ſoit ainſi le point V, & le diametre BV ſur le rayon BD auquel il ſe trouveroit ainſi reduit. Le cercle BRVR n'ayant alors pour diametre que ce rayon BD de l'arc RDR ou DRR, ne rencontreroit cet arc qu'au ſeul point D, où il le toucheroit, & où leurs deux ſections R, R, ſe réuniroient en un ſeul attouchement en ce point D, où les deux droites VR, VR, ſe confondroient en une ſeule ED ou DE touchante commune de ces deux cercles en ce point D. Ce qui ne donneroit alors que cette ſeule direction de la puiſſance donnée H, propre à la mettre en équilibre ſur l'appui donné B, avec l'autre puiſſance donnée F de direction donnée QF; & ne fourniroit ainſi qu'une ſeule ſolution du Problème, dont BV plus grande que BD en quelque rapport que ce ſoit, en fournit deux (*Corol.* 2. 3.) pour chacun de ces rapports. Mais cette direction ED ou DE touchante commune en D des deux cercles qui s'y toucheroient auſſi, BD étant ici le rayon de l'un & le diametre de l'autre; perpendiculaire qu'elle ſeroit en ce point D à la droite DBP ou DPB comme QF lui eſt (*ſolut. 2. du cas 2.*) perpendiculaire en P, ſeroit encore ici parallele à QF comme dans le Corol. 2. Donc les puiſſances données H, F, ici dirigées ſuivant ces paralleles ED ou DE, & QF y étant entr'elles (*ſolut. du cas 2.*) en raiſon reciproque des diſtances BD, BP, de ces directions à l'appui donné B, ſeroient ici (*Th.* 21. *Cor.* 13.) équilibre entr'elles ſur cet appui B, comme dans la ſolut. du cas 1. qui ſe trouve encore ici reſolu, ainſi que dans le Corol. 2. en conſequence de la ſolution du cas 2.

SCHOLIE.

Digitized by Google

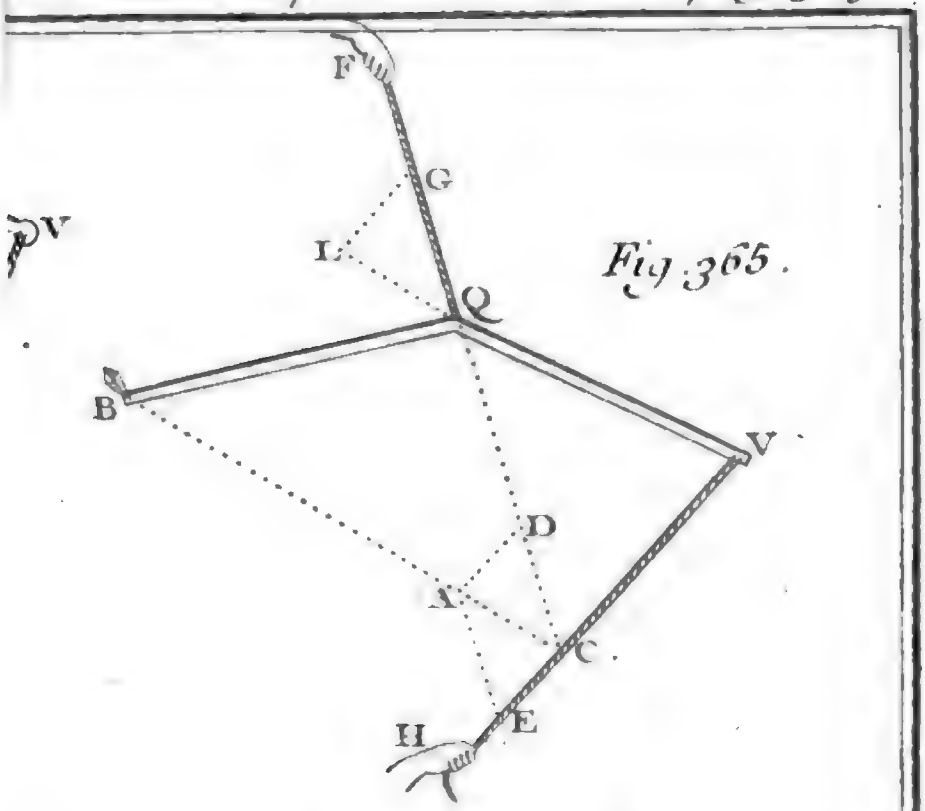
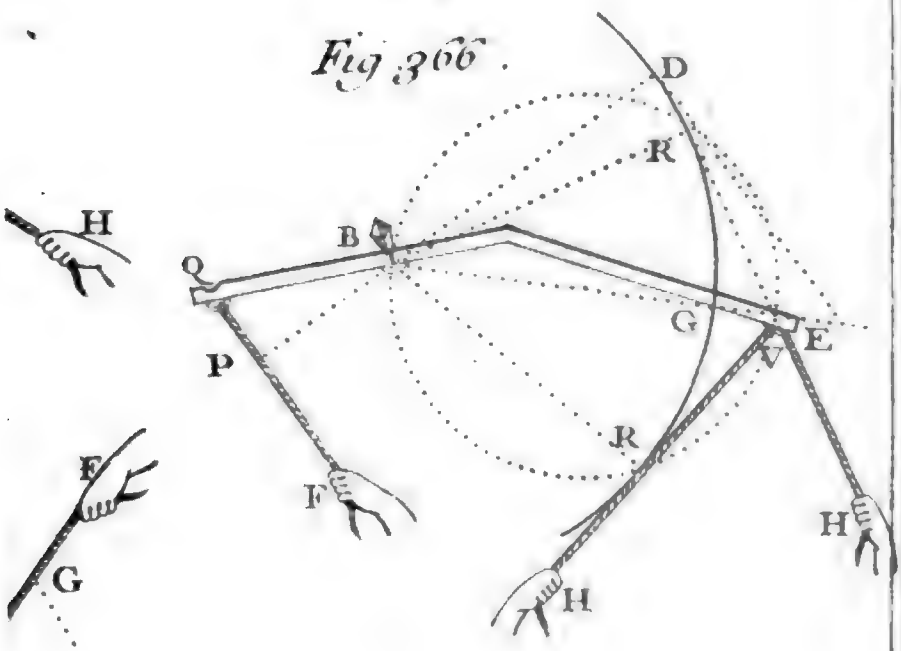


Fig 365.

Fig 366.



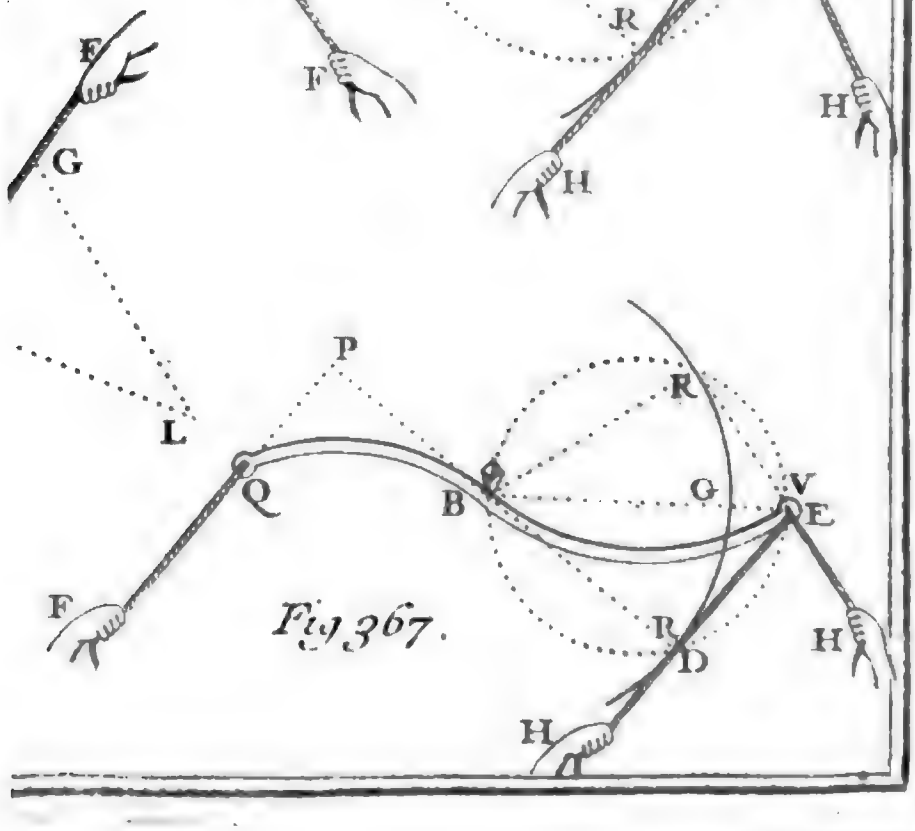


Fig 367.

Digitized by Google

SCHOLIE.

La raiſon pour laquelle j'ai dit dans la ſolut. 2. du cas 2. que BV doit être égale à BD, ou plus grande qu'elle en quelque rapport que ce ſoit ; c'eſt que ſi BV étoit moindre que BD, le cercle BR, VR decrit de ce diametre BV, ne rencontreroit nulle part l'autre RDR ou DRR decrit du rayon BD & du centre B ; & que faute de cela il ne determineroit aucune direction de la puiſſance H, bien loin de lui en determiner une ſuivant laquelle elle fît équilibre ſur l'appui donné B avec l'autre puiſſance donnée F, & de direction donnée QF, ainſi que l'exige le Problême.

PROBLEME XIX.

Deux puiſſances F, H, étant données avec leurs points Q, V, d'application à un Levier quelconque QV d'appui donné B, trouver les directions requiſes à ces deux puiſſances, pour faire équilibre entr'elles ſur cet appui B. Fig. 373. 374. 375. 376.

SOLUTION.

De ce point donné B, aux deux points auſſi donnez Q, V, d'application des puiſſances données F, H, au Levier quelconque QV, ſoient menées les droites BQ, BV, deſquelles, comme diametres, ſoient decrits les cercles BPQP, BRVR, dans leſquels de leur point commun B ſoient inſcrites des droites ou cordes BP, BR, en raiſon reciproque des puiſſances données F, H, en ſorte qu'on ait ici BP. BR :: H. F. Après cela du centre B, & de ces rayons BP, BR, ſoient decrits les arcs de cercles PP, RR, dont le premier rencontre le cercle BPQP en P, P ; & le ſecond, le cercle BRVR en R, R.

Cela fait, je dis que ſi du point Q par les points P, P, l'on mene les deux droites QP, QP ; & que du point V par les points R, R, l'on mene de même les deux droites VR, VR ; la puiſſance F dirigée ſuivant celle qu'on voudra des deux premieres QF, QF, de ces quatre droites, fera

équilibre ſur l'appui donné B, avec l'autre puiſſance H, dirigée ſuivant celle qu'on voudra auſſi des deux autres droites VH, VH. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Les demi-cercles BPQ, BRV, rendant droits les angles de ces noms qu'ils contiennent, les droites BP, BR, ſeront les diſtances de l'appui donné B aux directions QF, VH, des puiſſances données F, H. Ainſi ayant (*ſolut.*) BP. BR :: H. F. Ces deux puiſſances H, F, ſont ici entr'elles en raiſon reciproque des diſtances de leurs directions à cet appui B. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 3.) elles demeureront ici en équilibre entr'elles ſur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

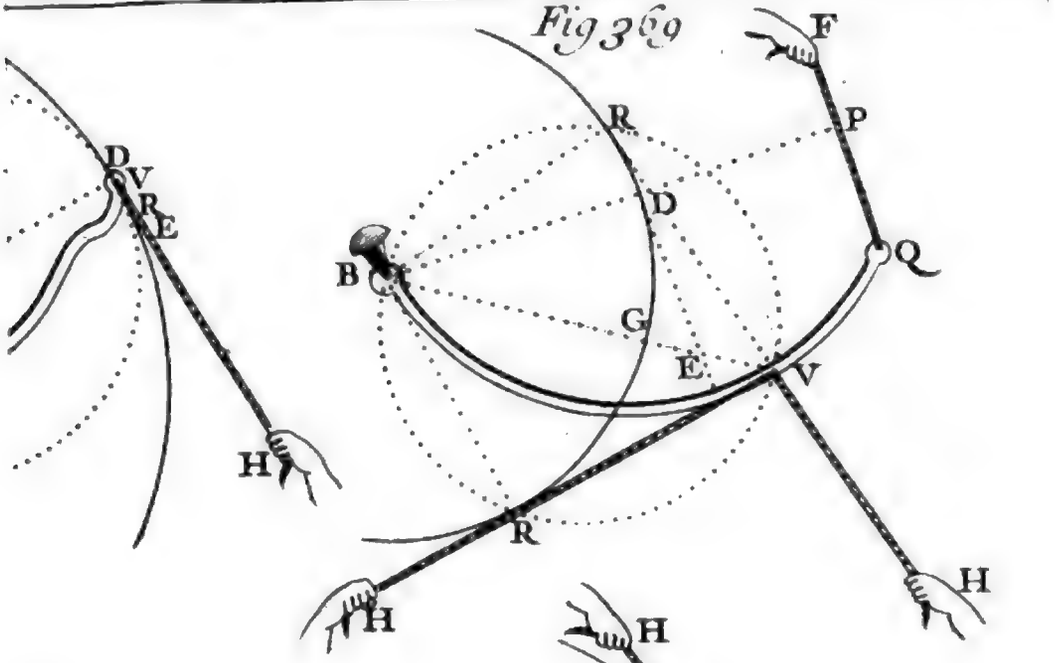
La ſolution & la demonſtration convenant également à chacune des deux directions PF, PF, de la puiſſance F, & à chacune des deux VH, VH, de l'autre puiſſance H, tant que les cordes BP, BR, des cercles BPQP, BRVR, ſeront entr'elles en raiſon reciproque de ces puiſſances F, H; l'on voit que chaque cas des grandeurs que ces cordes auroient en ce rapport, fournira deux ſolutions du Problême dont il s'agit ici. Donc ces grandeurs des cordes BP, BR, pouvant varier à l'infini, ſans ceſſer d'être entr'elles en ce rapport, excepté dans le cas du Scholie ſuivant; ce Problême pourra ainſi avoir une infinité de ſolutions, double de l'infinité des cas où ces grandeurs des cordes BP, BR, peuvent ainſi varier ſans ceſſer d'être entr'elles en raiſon reciproque des puiſſances données F, H, qui, à cauſe des angles (*ſolut.*) toûjours droits BPQ, BRV, auront toûjours ces cordes BP, BR, des cercles BPQP, BRVR, pour diſtances de l'appui B à leurs directions PF, VH.

SCHOLIE.

Il eſt à remarquer que ſi la poſition de la direction QF de la puiſſance F étoit donnée telle que BR priſe à BP en

Digitized by

Fig 369



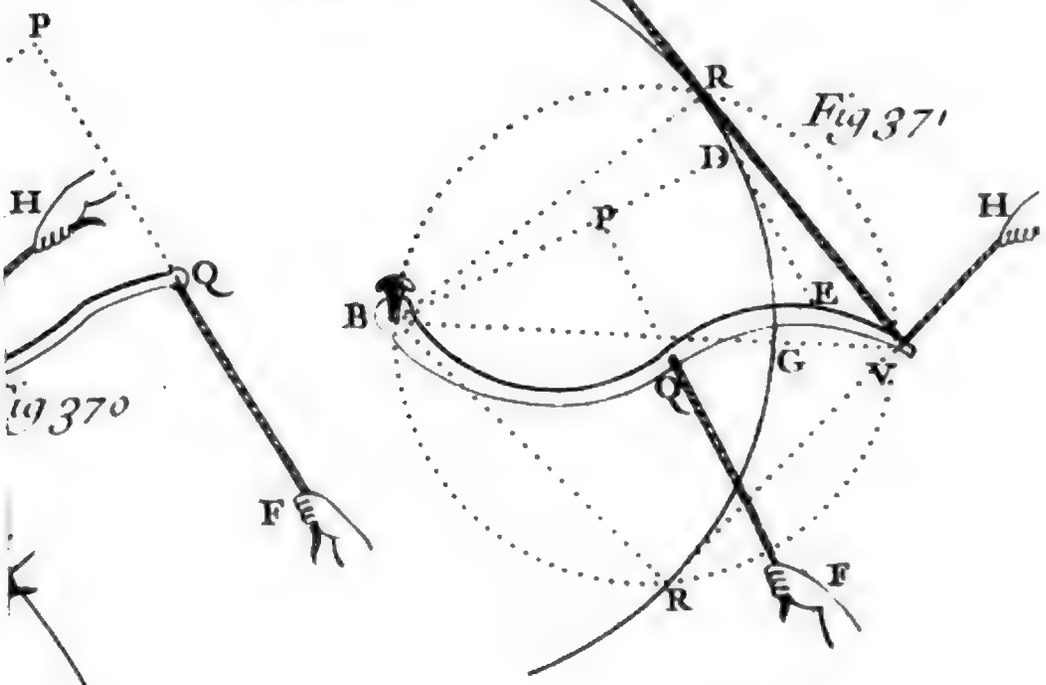


Fig 370

Fig 371

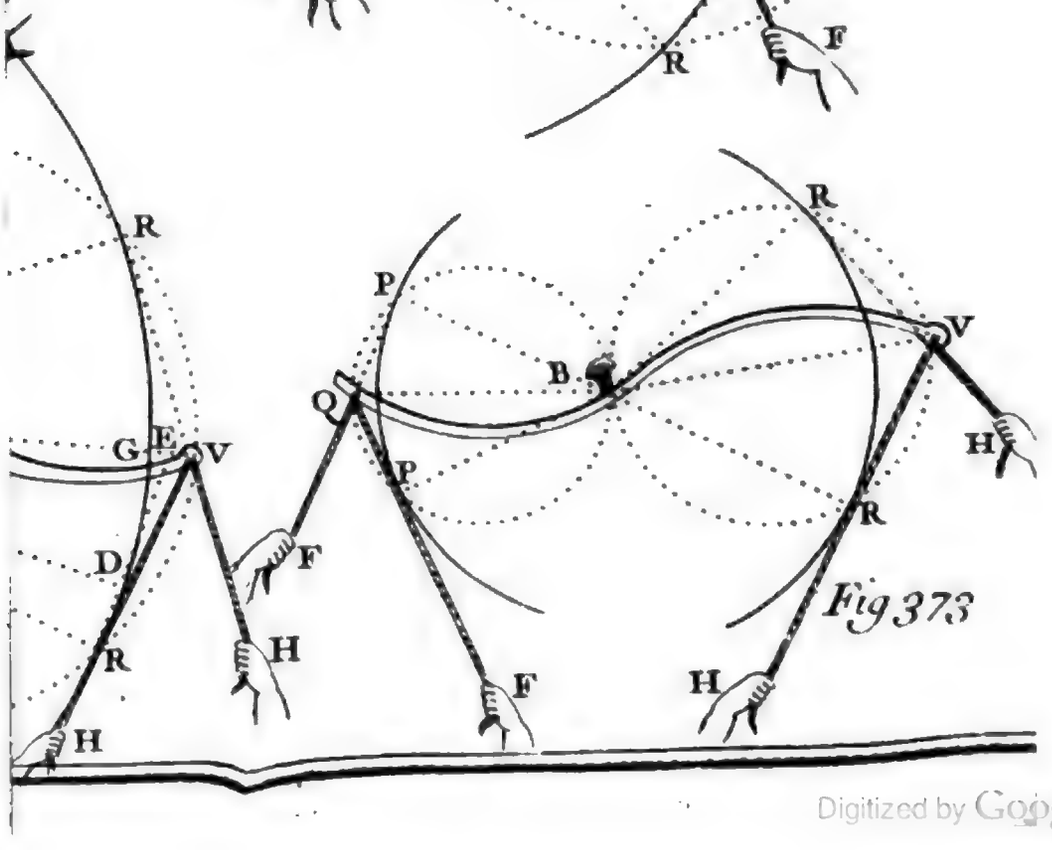


Fig 373

Digitized by Google

raiſon de F à H, ſe trouvât plus grande que BV diametre du cercle BRVR ; le Problême dont il s'agit ici ſeroit impoſſible : puiſque cette droite BR ne pourroit plus être inſcrite dans ce cercle, ni conſequemment être la diſtance de l'appui B à la direction requiſe par V à la puiſſance H.

PROBLEME XX.

Deux puiſſances F, H, étant données à volonté avec les points Q, V, de leurs applications à un Levier quelconque QBV ou BQV d'appui B donné auſſi à volonté ; diriger ces deux puiſſances de maniere qu'elles faſſent équilibre entr'elles ſur cet appui B ; & que la charge (que j'appelle P) qui lui reſultera de leur concours d'action ſur lui, ſoit à chacune de ces deux puiſſances F, H, en raiſon d'une grandeur donnée quelconque A à chacune des deux autres D, E, pareillement données, c'eſt-à-dire, en ſorte qu'on ait ici P. F. H :: A. D. E. Fig. 377. 378 379. 380.

REMARQUE.

On ſçait (*Th.* 21. *part.* 3. *joint au Th.* 1. *Cor.* 6. *art.* 1.) que pour rendre ce Problême poſſible, cette charge P de l'appui B, doit être telle par rapport aux puiſſances F, H, du concours deſquelles elle doit reſulter, que de ces trois grandeurs P, F, H, & en conſequence (*Hyp.*) des trois A, D, E, la ſomme de deux quelconques ſoit plus grande que la troiſiéme. Cela poſé, voici la ſolution du Problême dans les deux cas, dans le premier deſquels l'appui donné B ſe trouve entre les puiſſances F, H, comme dans les Fig. 377. 378. & dans le ſecond ces puiſſances ſont toutes deux d'un même côté de cet appui B, comme dans les Fig. 379. 380. Ces deux cas pourroient ſe reſoudre à la fois par la methode qu'on va voir leur convenir à tous deux : mais le different arrangement des trois points donnez Q, B, V, & B, Q, V, y cauſeroit de doubles repetitions en lettres differentes, & par conſequent quelque confuſion dans la ſolution & dans la démonſtration generales qu'on pourroit donner de ces deux cas à la fois :

c'eſt pour plus de netteté que nous les allons reſoudre & démontrer l'un après l'autre, quoique par la même methode.

CAS I.

Fig. 377. 378. *Dans lequel l'appui B eſt donné entre les points donnez Q, V, d'application des puiſſances F, H, au Levier QBV des Fig. 377. 378.*

SOLUTION.

Par les extrêmitez Q, V, du Levier donné QBV dans les Fig. 377. 378. ſoit menée la droite QV, ſur laquelle ſoit fait un triangle QKV, dont les côtez KV, KQ, ſoient à cette baſe QV, comme les grandeurs données D, E, ſont à la donnée A; c'eſt-à-dire, un triangle QKV, tel qu'il ait ſes côtez QV. KV. KQ::A. D. E. lequel triangle ſera toûjours poſſible; puiſque de ces trois dernieres grandeurs données A, D, E, la ſomme de deux quelconques eſt (*Hyp.*) plus grande que la troiſiéme. Autour de ce triangle QKV ſoit circonſcrit un cercle QKVC rencontré auſſi en C par la droite KBC, menée de ſon point K par l'appui donné du Levier donné QBV, droit ou courbe, il n'importe. Enfin de ce point C par les extrêmitez Q, V de ce Levier ſoient menées les droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378.

Cela fait, je dis que ces droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378. ſont les directions requiſes aux puiſſances F, H, pour demeurer en équilibre entr'elles ſur l'appui donné B, ainſi qu'on l'exige; & pour cauſer à cet appui par leur concours la charge qu'on lui exige auſſi; c'eſt-à-dire, que ces deux puiſſances F, H, appliquées ſuivant ces directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier de figure quelconque QBV, & d'appui donné entr'eux, non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B; mais encore qu'elles lui cauſeront alors par leur

Digitized by Google

concours d'action ſur lui, une charge qui ſera à chacune de ces puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres données D, E. *Ce qu'il falloit 1°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit fait le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſoit ſur KC prolongée, s'il eſt neceſſaire, & dont les côtez CD, CE, ſoient de même ſur les directions QF, VH, (auſſi prolongées s'il eſt neceſſaire) des puiſſances F, H: l'on aura (*ſolut.*) les angles QVK=KCQ=ACD, & VQK=KCV=ACE=CAD. Donc le triangle QKV a deux angles QVK, VQK, égaux chacun à chacun des deux angles ACD, CAD, du triangle ADC; & conſequemment ces deux triangles QKV, ADC, ſont ſemblables entr'eux. Donc QV. KV. KQ :: CA. CD. DA :: CA. CD. CE. Mais (*ſolut.*) QV. KV. KQ :: A. D. E (*Hyp.*) :: P. F. H. Donc CA. CD. CE :: P. F. H.

Or en conſequence de CD. CE :: F. H. (*Th.* 21. *part.* 6.) on voit qu'il y aura ici équilibre entre ces deux puiſſances F, H, ſur l'appui donné B, par où paſſe (*ſolut.*) la diagonale CA du parallelogramme CDAE, dont les côtez CD, CE, ſont ſur les directions de ces puiſſances F, H.

De plus en ce cas d'équilibre (*Th.* 21. *part.* 3.) on voit auſſi que la charge de cet appui (que j'appelle auſſi B comme lui) reſultante du concours de ces deux puiſſances F, H, eſt à ces mêmes puiſſances, comme cette diagonale CA eſt à ces deux côtez CD, CE, de ce parallelogramme CDAE: c'eſt-à-dire, B. F. H :: CA. CD. CE. De ſorte que venant de trouver auſſi P. F. H :: CA. CD. CE. L'on aura ici B=P. Ainſi ayant (*Hyp.*) P. F. H :: A. D. E. L'on aura pareillement ici B. F. H :: A. D. E.

Donc les deux puiſſances données F, H, étant appliquées ſuivant les directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier QBV d'appui B donné entr'eux dans les Fig. 377. 378. non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B, mais

encore qu'elles lui cauſeront par leur concours d'action ſur lui, une charge B=P, laquelle ſera à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, pareillement données. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici* 1°. *démontrer.*

CAS II.

FIG. 379. 380. ***Dans lequel les deux puiſſances données F, H, ſont d'un meſme côté de l'appui donné B, comme dans les Fig. 379. 380.***

SOLUTION.

Ce ſecond cas ſe reſoudra de même que le premier, à à la difference des lettres près. Pour le voir, par les extrêmitez B, V du Levier BQV donné de figure quelconque dans les Fig. 379. 380. ſoit menée la droite BV, ſur laquelle ſoit fait un triangle BKV, dont les côtez KV, KB, ſoient à cette baſe BV, comme les grandeurs données A, E, ſont à la donnée D: c'eſt-à-dire, un triangle tel qu'il ait ſes côtez KV. KB. BV :: A. E. D. Et en conſequence KV. BV. KB :: A. D. E. Lequel triangle ſera toûjours poſſible, à cauſe que de ces trois grandeurs A, D, E, la ſomme de deux quelconques eſt (*Hyp.*) plus grande que la troiſiéme. Autour de ce triangle BKV ſoit circonſcrit un cercle BKVC rencontré auſſi en C par la droite KQC menée de ſon point K par celui du milieu des trois points donnez B, Q, K, lequel eſt ici celui Q d'application de la puiſſance F au Levier donné BQV; laquelle droite KQC ſoit prolongée vers F dans l'une & dans l'autre de ces deux Figures. Enfin de ſon point C par les extrêmitez B, V, de ce Levier, ſoient menées les droites BAC, VCH.

Cela fait, je dis que les droites CQF, VCH, ſont les directions requiſes aux deux puiſſances données F, H, pour demeurer en équilibre entr'elles ſur l'appui donné B, ainſi qu'on l'exige; & pour cauſer a cet appui par leur

concours d'action ſur lui, la charge qu'on lui exige auſſi: c'eſt-à-dire, que ces deux puiſſances F, H, appliquées ſuivant ces directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier donné de figure quelconque BQV, & d'appui B donné, d'un ſeul côté duquel ſont ces deux points Q, V, non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B, mais encore qu'elles lui cauſeront par leur concours d'action ſur lui, une charge qui ſera à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, pareillement données. *Ce qu'il falloit 2°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit fait le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſoit ſur BC prolongée, s'il eſt neceſſaire; & dont les côtez CD, CE, ſoient ſur les directions QF, VH auſſi prolongées des puiſſances F, H; l'on aura (*ſolut.*) les angles BVK=KCB=DCA, & VBK=KCV=AEC=CDA. Donc le triangle BKV a deux angles BVK, VBK, égaux chacun à chacun des deux angles DCA, CDA, du triangle DAC; & conſequemment ces deux triangles BKV, DAC, ſont ſemblables entr'eux. Donc KV. BV. KB:: CA. CD. DA:: CA. CD. CE. Mais (*ſolut.*) KV. BV. KB:: A. D. E (*Hyp.*):: P. F. H. Donc CA. CD. DE:: P. F. H. ainſi que dans la démonſtration de la ſolut. du cas 1. de ſorte qu'en continuant cette démonſtration-ci comme celle-là, l'on trouvera ici comme là, que les deux puiſſances données F, H, étant appliquées ſuivant les directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier donné QBV d'appui donné B d'un même côté de ces deux points dans les Fig. 379. 380. non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B, mais encore qu'elles lui cauſeront par leur concours d'action ſur lui, une charge qui ſera à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, pareillement données. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici 2°. démontrer.*

Si dans les Fig. 379. 380. on tranſpoſe les points donnez Q, V, en ſorte que le Levier BQV y devienne BVQ encore du cas 2. de pareille tranſpoſition, des puiſſances F, H, & des lettres D, E, rendront ces deux Figures propres à ce nouveau Levier BVQ, auſſi-bien que la ſolution & la démonſtration du cas 2. en y changeant Q, F, D, en V, H, E; & reciproquement. Tout cela eſt ſi viſible, qu'il auroit été fort inutile d'y repeter ces deux Fig. 379. 380. auſſi peu changées avec la ſolution & la démonſtration du cas 2. qui ne differe point ici de ce qu'elles ſont là, qu'en ces ſix lettres ainſi tranſpoſées.

COROLLAIRE I.

Fig. 377. 378. I. Dans le cas 1. de la Fig. 377. 378. le Levier QBV déterminant la longueur de la droite QV, & le triangle QKV ayant (*ſolut.*) ſes côtez QV. KV. KQ :: A. D. E. qui ſont (*Hyp.*) trois grandeurs données; ſon point K eſt déterminé, auſſi-bien que ſes deux autres points Q, V, & que l'appui donné B du Levier donné QBV. Donc tant que ces deux points K, B, ſont differens, la poſition de la droite KBC, qui paſſe (*ſolut.*) par ces deux points déterminez K, B, eſt auſſi déterminé avec le point C, où elle rencontre la circonference du cercle QKVC déterminé de poſition & de grandeur par la détermination de ſes trois points Q, K, V. Ainſi les directions QF, VH, des puiſſances F, H, devant (*ſolut.*) des points donnez Q, V, paſſer par ce point déterminé C, en les prolongeant vers lui, elles ſont auſſi de poſitions déterminées; & conſequemment les ſeules qui puiſſent ſatisfaire ici (*Fig.* 377. 378.) au premier cas du Problême, tant que les points K, B, y ſont differens. Donc ce cas 1. de ce Problême n'eſt alors ſuſceptible que d'une ſeule ſolution.

Fig. 379. 380. II. De même dans le cas 2. (*Fig.* 379. 380.) le Levier donné BQV déterminant la longueur de la droite BV, & le triangle BKV ayant (*ſolution*) ſes côtez KV. KB. BV :: A. E. D. qui (*Hyp.*) ſont trois grandeurs données; ſon point K eſt déterminé, auſſi-bien que ſes points donnez B, V, & que ſon point d'appui donné Q

du

du Levier BQV. Donc tant que ces deux points K, Q, ſont differens comme ici, la poſition de la droite KQC, qui (*ſolut.*) paſſe par ces deux points determinez K, Q, eſt auſſi determinée avec le point C, où elle rencontre la circonference du cercle BKVC determiné de poſition & de grandeur par la determination de ſes trois points B, K, V. Ainſi les directions QF, VH, des puiſſances F, H, devant (*ſolut.*) des points donnez Q, V, paſſer par ce point determiné C, en les prolongeant vers lui; elles ſont auſſi de poſitions determinées, & conſequemment les ſeules qui puiſſent ſatisfaire ici (*Fig.* 379. 380.) au ſecond cas du Problême, tant que les points K, Q, y ſont differens. Donc ce cas 2. de ce Problême ici propoſé, n'eſt alors ſuſceptible que d'une ſeule ſolution.

III. Donc en general (*art.* 1. 2.) tant que le point K eſt different de celui du milieu des trois points donnez Q, B, V, du Levier donné quelconque QBV, ou BQV, ou BVQ; le Problême dont il s'agit ici, n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution dans celui qu'on voudra des deux cas auſquels on le vient de reduire. FIG. 377. 378. 379. 380.

IV. Mais ſi le Levier eſt de telle figure que le point K ſe confonde avec celui quelconque de ſes trois points donnez Q, B, V, qui s'y trouve entre les deux autres; alors la poſition de la droite, qui ſuivant les ſolutions des cas 1. 2. doit paſſer par ce point moyen & par le point K, ſe trouvant indeterminé, le point C, dans lequel elle doit rencontrer le cercle qui paſſe par les deux extrêmes des trois points donnez, & par le point K, pourra ſe trouver en une infinité de la circonference de ce cercle : ce qui variant à l'infini les directions CF, CH, CB, des puiſſances F, H, de l'appui B, rendra pour lors le Problême dont il s'agit ici ſuſceptible d'une infinité de ſolutions differentes par les ſeules differences de ces directions.

COROLLAIRE II.

Si la droite QV dans les Fig. 377. 378. du cas 1. & BV dans les Fig. 379. 380. du cas 2. y étoit le Levier donné,

dont l'appui donné fût en *b* dans les Fig. 377. 378. & que le point donné d'application de la puiſſance F au Levier BV des Fig. 379. 380. fût en *q*: la ſolution & la démonſtration de chacun des deux cas precedens, ſeroient les mêmes ici que là, en ſubſtituant ſeulement *b* au lieu de B dans celles du cas 1. & *q* au lieu de Q dans celles du cas 2. Ce qui reſoudroit ici le Problême pour des Leviers droits, comme là pour des Leviers courbes quelconques.

Mais chacun de ces deux nouveaux points donnez, un ſur chacun de ces Leviers droits, ſçavoir, *b* au lieu de B dans les Fig. 377. 378. & *q* au lieu de Q dans les Fig. 379. 380. s'y trouvant differens chacun du point K de ſa Figure; il ſuit de l'art. 3. du precedent Corol. 1. que le Problême dont il s'agit n'y ſeroit ſuſceptible que d'une ſeule ſolution pour chacun de ces Leviers droits.

PROBLEME XXI.

Fig 377. 378. 381. 383. 384.

Toutes choſes demeurant ici les mêmes que dans le précedent Probl. 20. excepté que le point d'appui du Levier, n'eſt plus ici donné comme il l'etoit là; & qu'au lieu de lui, c'eſt l'angle (là indifferent) de la direction de ſa charge avec la droite compriſe entre les extrémitez du Levier, qui eſt ici donnée, par exemple, égal au donné M de la Fig. 381. & de la Fig. 382. On demande preſentement ici l'appui de ce Levier avec les directions requiſes aux deux puiſſances données F, H, pour faire équilibre entr'elles ſur cet appui, de maniere que la charge qui lui doit reſulter de leur concours d'action ſur lui, ſoit ſuivant la direction qu'on lui exige ici, & encore à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune de deux autres pareillement données D, E, ainſi que dans le précedent Probl. 20.

CAS I.

Dans lequel l'appui du Levier QBV des Fig. 377. 378. eſt demandé entre les points donnez Q, V, d'application des puiſſances F, H, à ce Levier. FIG. 377. 378. 381.

SOLUTION.

Soit encore ici (Fig. 377. 378. comme dans la ſolut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) la droite QV compriſe entre les extrêmitez données Q, V, du Levier propoſé QBV; ſur laquelle ſoit le triangle rectiligne QKV fait de côtez QV. KV. KQ :: A. D. E. auquel ſoit circonſcrit le cercle QKVC: le tout (dis-je) comme dans le cas 1. du precedent Probl. 20. Après cela (ſpecialement pour ici) ſoit menée la droite KC, de maniere qu'elle faſſe avec la droite QV un angle C*b*V égal au donné M de la Fig. 381. ce qui eſt facile à faire: laquelle droite KC rencontre en B le Levier propoſé QBV, & en C le cercle QKVC. De ce point C par les données Q, V, ſoient menées les droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378. ſoit auſſi fait (comme dans la ſolut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſoit ſur la droite CBK prolongée par de-là C dans la Fig. 378. & les côtez CD, CE, ſur les droites CF, CH, auſſi prolongées par de-là C dans la Fig. 378.

Cela fait, on trouvera, comme dans la ſolut. du cas 1. du precedent Probl. 20. que les deux puiſſances données F, H, dirigées ſuivant les droites QF, QH, qui prolongées paſſent des points donnez Q, H, par le trouvé C, doivent ici (*Fig.* 377. 378.) faire équilibre entr'elles ſur un appui placé au point trouvé B du Levier propoſé QBV; & que CB ou BC eſt la direction de la charge de cet appui B, reſultante alors du concours d'action de ces deux puiſſances ſur lui; & que cette charge eſt à chacune de ces deux mêmes puiſſances données F, H, comme

la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, données avec elle. Donc l'angle C*b*V dans les Figures 377. 378. dont il s'agit ici, étant (*conſtr.*) égal au donné M de la Fig. 381. le point B ſera ici celui de l'appui qu'on y demandoit; & CB ou BC la direction demandée de ſa charge reſultante du concours d'action des deux puiſſances F, H, ſur cet appui; deſquelles puiſſances données F, H, les droites QF, VH, ſont auſſi les directions demandées: & enfin cette charge de l'appui trouvé B, ſera ici (comme dans la ſolut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, données avec elle. *C'eſt tout ce qu'il falloit ici* 1°. *trouver & démontrer.*

CAS II.

Fig. 381. 383. 384. *Dans lequel l'appui demandé doit avoir d'un ſeul côté de lui les deux puiſſances F, H, comme dans les Fig.* 379. 380. *& dans les Fig.* 383. 384.

SOLUTION.

Soit dans chacune des Fig. 383. 384. une ligne VPQRS, droite ou courbe quelconque, indefinie du côté de S, une partie de laquelle commencée en V vers S, doit être le Levier dont on demande l'appui du côté de S par rapport à deux points Q, V, qui en ſoient donnez tous deux de l'autre côté de cet appui, & auſquels on veut que les puiſſances F, H, ſoient appliquées à ce Levier d'appui demandé depuis Q vers S. Sur la droite VQ compriſe entre les deux points donnez Q, V, ſoit un triangle rectiligne VQB, dont les côtez VQ, VB, BQ, ſoient entr'eux comme les grandeurs A, D, E, telles que la ſomme de deux quelconques d'entrelles ſoit ici, comme dans le cas 1. plus grande que la troiſiéme, pour rendre ici, comme là, le Problème poſſible; c'eſt-à-dire, un triangle rectiligne VQB, dont les côtez ſoient VQ. VB. BQ :: A. D. E.

Digitized by Google

Autour de ce triangle VBQ ſoit circonſcrit un cercle VTQXBCG ; & après avoir pris (de grandeur quelconque) M*u*=M*d* dans la Fig. 382. & y avoir mené la droite *ud*, ſoit fait ſur la droite BV des Fig. 383. 384. un triangle iſoſcelle V*m*B, ſemblable à l'iſoſcelle *u*M*d*, qui eſt ſur *du* dans la Fig. 382. & qui conſequemment ait ſon angle *m* égal à l'angle M de celui-ci. Autour de cet autre triangle V*m*B ſoit auſſi circonſcrit un cercle VO*mb*B*n*, lequel rencontre en *b* la ligne propoſée quelconque VPQR*b*S, ſur laquelle on veut que depuis Q vers S ſoit le Levier d'appui demandé du côté de S par rapport au point donné Q. De ce point *b* par B ſoit menée la droite *b*BZ, qui rencontre en C le cercle VPQXBCG. Enfin de ce point C par les donnez Q, V, d'application des puiſſances F, H, au Levier qu'on veut depuis V vers S ſur la ligne quelconque VPQR*b*S, ſoient menées les droites CQ, CV.

Cela fait, je dis que ſi l'on dirige les puiſſances F, H, ſuivant QF, VH, en lignes droites avec CQ, CV ; ces deux puiſſances données F, H, feront équilibre entre-elles ſur un appui placé au point *b* du Levier VRQR*b*, auquel elles ſeront ainſi appliquées ; que la charge de cet appui *b*, reſultante alors de leur concours d'action ſur lui, ſera pour lors à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux, D, E, données avec elle ; que la direction de cette charge ſera ſuivant C*b* ou *b*C ; & qu'enfin cette direction fera avec la droite V*b* (compriſe entre les extrêmitez V, *b*, du Levier trouvé VPQR*b*) un angle C*b*V égal au donné M. *C'eſt tout ce qu'il falloit ici* 2°. *trouver.*

DEMONSTRATION.

Si dans les Fig. 383. 384. l'on fait un parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſoit en ligne droite avec CB, & ſes côtez CD, CE, en lignes droites auſſi CQ, CV ; & que dans ces deux Fig. 383. 384. l'on ajoûte K au point Q ; la démonſtration de la ſolution du cas 2. du

precedent Probl. 20. employée ici, y fera voir comme là, que les deux puiſſances F, H, dirigées ſuivant QF, VH, doivent faire équilibre entr'elles ſur un appui placé au point *b* (c'étoit-là en B) du Levier trouvé VPQR*b*; que C*b* ou *b*C (ayant ſur elle la diagonale CA du parallelogramme CDAE) eſt la direction de la charge de cet appui *b*, reſultante alors du concours d'action de ces deux puiſſances ſur lui; & que cette charge eſt à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux D, E. données avec elle. Donc le cercle VO*mb*B*n* rendant dans les mêmes Fig. 383. 384. l'angle B*b*V (compris entre les droites B*b*, V*b*) égal à l'angle B*m*V qu'on vient de faire (*ſolut.*) égal au donné M de la Fig. 382. le point *b* ſera ici dans les Fig. 383. 384. celui de l'appui qu'on y demandoit; la droite CB*b* (*Fig.* 383.) & *b*BC (*Fig.* 384.) ſera la direction demandée de la charge de cet appui *b*, reſultante du concours d'action des puiſſances F, H, ſur lui; les droites QF, VH, dirigées ſuivant CQ, CV, ſeront auſſi les directions requiſes des puiſſances F, H, pour les mettre en équilibre entr'elles ſur cet appui trouvé *b*: & enfin la charge de ce même appui *b*, ſera ici (de même que dans la ſolut. du cas 2. du precedent Probl. 20.) à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, données avec elle. *C'eſt tout ce qu'il falloit ici* 3°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

FIG. 377. 378. 381.

I. Dans les Fig. 377. 378. les rapports donnez (*ſolut. du cas* 1.) des côtez KQ, KV, du triangle rectiligne QKV, à la baſe Q, V, donnée de poſition & de grandeur par les points Q, V, déterminent la poſition du point K par rapport à cette droite QV de poſition donnée; & conſequemment la droite KC ne peut faire avec elle qu'un ſeul angle V*b*C égal au donné M dans la Fig. 381. tel qu'il eſt requis dans le Problème. Ainſi le point *b* de cet angle eſt auſſi determiné que le point K; & conſequemment

Digitized by Google

la poſition de la droite K*b*C eſt determinée par ces deux points determinez K, *b*, de même que la poſition & la grandeur du cercle QKVC le ſont par les trois points déterminez Q, K, V, par leſquels il paſſe. Donc le point C, dans lequel la droite K*b*C rencontre ce cercle, eſt auſſi determiné que les points donnez Q, V, & que le point B où elle rencontre le Levier QBV de poſition donnée. Par conſequent les directions CQ, CV, des puiſſances F, H, ſont ici déterminées de même que la direction CB ou BC de l'appui B, laquelle l'eſt encore d'ailleurs en conſequence de ces deux-là. Donc le cas 1. du Problême dont il s'agit ici; n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution.

II. Dans les Fig. 383. 384. les rapports donnez (*ſolut. du cas* 2.) des côtez VB, QB, du triangle rectiligne VQB, à ſon côté QV donné de poſition & de grandeur en conſequence de ſes points donnez Q, V, determinent de poſition & de grandeur le premier BV de ces trois côtez, lequel a ainſi ſon extrêmité B auſſi determinée que l'autre donnée V. Donc non ſeulement le cercle VTQXBG, qui (*ſolut. du cas* 2.) paſſe par ces trois points determinez B, Q, V, eſt determiné de poſition & de grandeur, mais encore le triangle V*mb* ſemblable (*ſolut. du cas* 2.) à l'iſoſcelle *u*M*d* (*Fig.* 382.) d'angles donnez; ayant ainſi tous ſes angles donnez avec ſon côté BV determiné de grandeur & de poſition, aura en conſequence ſa pointe *m* auſſi determinée qu'on vient de trouver ſes deux autres points B, V: c'eſt-à-dire, que ces trois points *m*, B, V, ſont ici determinez de poſition, chacun par rapport aux deux autres. Donc le cercle VO*m*B*n*, qui paſſe (*ſolut. du cas* 2.) par ces trois points determinez *m*, B, V, eſt determiné de grandeur & de poſition; & conſequemment il ne peut rencontrer qu'en un ſeul *b* de ſes points, autre que ſon point V, la ligne quelconque VPQRS donnée de poſition ſans retour ſur elle-même. Ainſi ce point *b* eſt encore déterminé: par conſequent venant de trouver que l'autre B l'eſt de même, la poſition de la droite *b*BZ eſt pareillement

FIG. 382. 383. 384.

determinée. Donc venant de trouver auſſi que le cercle VTQXBG eſt determiné de grandeur & de poſition, le point C où cette droite *b*BZ rencontre ce cercle ailleurs qu'en B, eſt auſſi determiné que ce point B. Par conſequent les directions CQ, CV, des puiſſances F, H, ſont ici determinées de même que la direction de l'appui *b*. Donc le cas 2. dont il s'agit ici, n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution.

COROLLAIRE II.

FIG. 377. 378. Dans le cas 1. ſi le Levier droit, par exemple, ſi la droite QV étoit ce Levier, aux extrêmitez Q, V, duquel on voulut que les puiſſances données F, H, fuſſent appliquées: le point *b*, dans lequel la droite KC rencontreroit ce Levier droit Q*b*V, ſeroit le point où il faudroit placer l'appui de ce Levier, & les droites QF, VH, qui continuées paſſent enſemble par le point C trouvé comme dans la ſolut. du cas 1. ſeroient les directions requiſes aux puiſſances E, F, pour faire équilibre entr'elles ſur cet appui *b* du Levier droit Q*b* V, d'une maniere qui ſatisferoit pour un tel Levier à toutes les conditions du Problême dont il s'agit dans le cas 1. Tout cela ſe demontrera comme la ſolution de ce cas 1.

COROLLAIRE III.

FIG. 383. 384. Dans le cas 2. ſi la ligne ſur laquelle on propoſe à trouver le Levier de ce cas, étoit auſſi la droite menée (ſi l'on veut) de V par Q indefiniment vers λ; & que ſes deux points V, Q fuſſent donnez pour ceux auſquels l'on voudroit que les puiſſances données F, H, fuſſent appliquées au Levier droit demandé: le point β où cette droite VQλ rencontreroit le cercle VO*mb*βB*n*, ſeroit le point où il faudroit placer l'appui qui doit terminer le Levier cherché, qui ſeroit le droit VQβ; & ſi du point ſ, dans lequel l'autre cercle VTQXBCſG ſeroit rencontré par la droite βBſ prolongée au travers de lui, l'on menoit par les deux points

fig. 375.

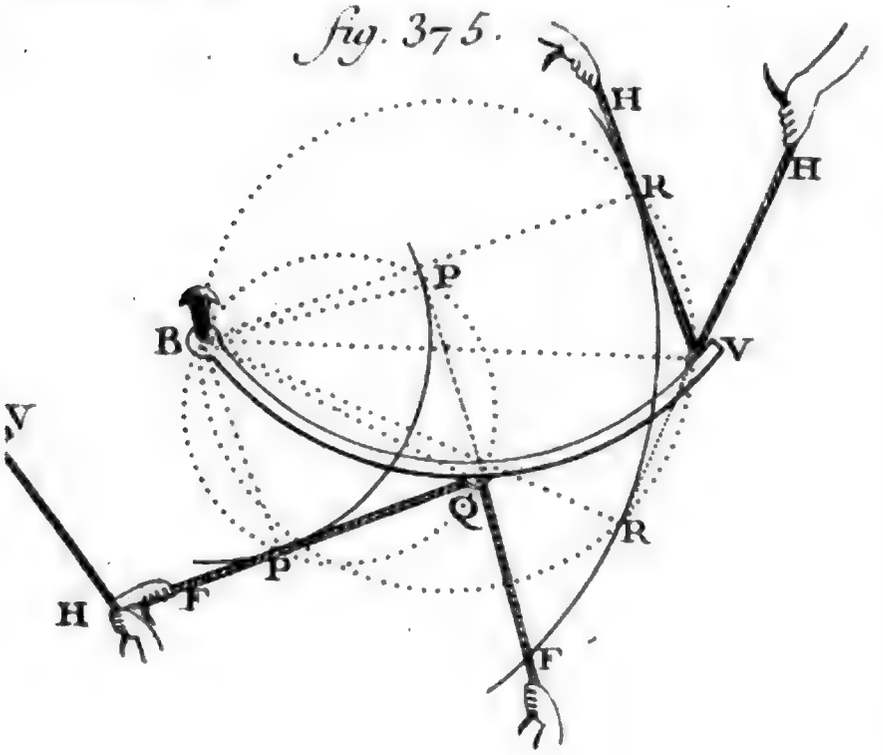
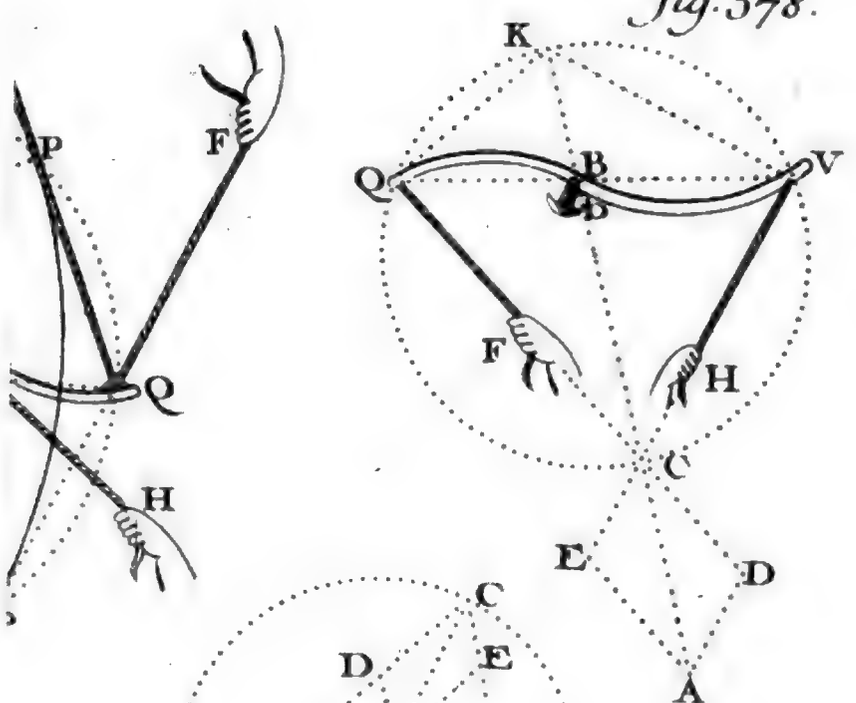


fig. 378.



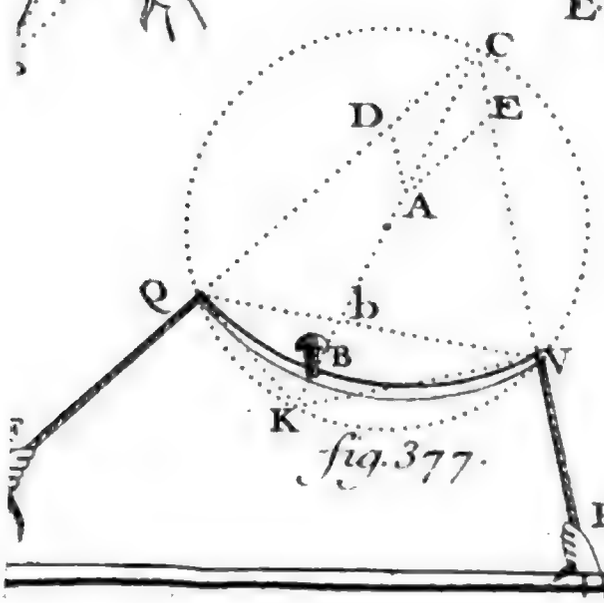


fig. 377.

points donnez Q, V, du Levier droit VQβ, deux droites qu'il eſt aiſé d'imaginer : elles ſeroient les directions requiſes aux puiſſances F, H, pour les mettre en équilibre entr'elles ſur cet appui β du Levier droit VQβ, d'une maniere qui ſatisferoit pour un tel Levier à toutes les conditions du Problême dont il s'agit ici dans le cas 2. Tout cela ſe demontrera encore comme la ſolution de ce cas 2.

SCHOLIE.

Le precedent Corol. 3. fait voir qu'au lieu des figures generales qu'on y vient d'employer, on pourroit en employer une beaucoup plus ſimple pour reſoudre le Problême qu'on y reſout par le moyen de ces figures generales pour un Levier droit à determiner depuis V vers λ, ſur une droite Vλ commencée en V, & indefiniment prolongée vers λ; ſur laquelle droite Vλ ſoient donnez les deux points V, Q, où l'on voudra que deux puiſſances données quelconques H, F, ſoient appliquées au Levier droit qui du côté de λ doit ſe terminer au point d'appui qu'on en demande avec les directions requiſes aux puiſſances données F, H, pour faire équilibre entr'elles ſur cet appui, d'une maniere qui ſatisfaſſe à toutes les conditions du cas 2. FIG. 385.

Pour reſoudre cette queſtion particuliere ſur une figure qui lui ſoit auſſi particuliere, & conſequemment plus ſimple; ſoit ſur la partie donnée VQ de la droite Vλ, un triangle VQB, dont les deux autres côtez VB, QB, ſoient à ce donné VQ comme les puiſſances données F, H, ſont à la charge qu'on veut qui en reſulte à l'appui demandé, moindre que la ſomme, & plus grande que la difference de ces deux puiſſances, ſi l'on veut que le Problême ſoit poſſible. Autour de ce triangle VQB ſoit circonſcrit le cercle VQBnG; & ſur ſa corde BV un triangle iſoſcelle B*m*V, dont l'angle *m* ſoit égal au donné M de la Fig. 382. qu'on veut que faſſe le Levier droit avec la direction de la charge preſcrite de ſon appui demandé. Autour de ce triangle B*m*V ſoit circonſcrit auſſi un autre cercle V*m*B*n*,

qui rencontre en β la droite Vλ. De ce point β par B ſoit menée la droite βBδ, qui rencontre en δ le cercle VQBδG ; duquel point δ par les points donnez Q, V, ſoient menées les droites CQF, CHV.

Cela fait, on trouvera, comme dans la ſolution & démonſtration du cas 2. que le point β eſt celui où doit être placé l'appui du Levier qu'on demande, lequel en conſequence eſt le droit Vβ ; & que les puiſſances F, H, appliquées à ce Levier ſuivant les directions QF, VH, demeureront en équilibre entr'elles ſur ſon appui β, d'une maniere qui ſatisfera à toutes les conditions du Problême dont il s'agit ici.

PROBLEME XXII.

Fig 386. & ſuivantes juſqu'à 390.

La longueur AC d'un Levier droit, ou d'une partie d'un Levier droit, étant donnée dans les Fig. 387. 388. 389. *portant à ſes extrémitez A, C, deux baſſins D, E, de balances, leſquels ſoient de peſanteurs ou de poids connus, que j'appelle de leurs noms D, E ; & étant auſſi donnez trois autres poids F, G, H, dans la Fig.* 386. *on demande un point d'appui de ce Levier, ſur lequel appui (dans l'hypotheſe des directions des poids paralleles entr'elles, tant les naturelles, que les détournées Aa des poids F, G, aux points A des Fig.* 389. 390.) *un de ces trois poids F, G, H, par exemple, le poids G étant ſucceſſivement mis dans chacun des baſſins D, E, feroit équilibre avec chacun des deux autres F, H, mis chacun dans chacun des baſſins que le poids G n'occupe point: ſçavoir, F en D pendant que G ſera en E dans les Fig.* 387. 389. *& H en E pendant que G ſera en D dans les Fig.* 388. 390.

SOLUTION.

I. Pour trouver l'appui qu'on demande ici, ſuppoſons pour un moment qu'il eſt en B, & que ſur lui fixement placé là, il y auroit équilibre entre les poids F, G, dans les Fig. 387. 389. & entre les poids G, H, dans les Fig. 388. 390. le Levier AC étant le même dans les Fig. 387.

388. & le Levier BC étant auſſi le même, & ſes points A, C, les mêmes dans les Fig. 389. 390. En ce cas d'équilibre le Th. 21. Corol. 13. donneroit (*Fig.* 387. 389.) F+D. G+E :: BC. AB (*Fig.* 388. 390.) :: G+D. H+E. Donc on auroit alors F+D. G+E :: G+D. H+E (I).

II. Pour abreger nos expreſſions, ſoient preſentement M=F+D, N=G+E, P=G+D, Q=H+E. Ces nouveaux noms étant ainſi ſuppoſez,

1°. Dans les Fig. 387. 389. nous aurons M. N :: F+D. G+E (*art.* 1.) :: BC. AB :: BC. $\pm$AC$\mp$BC. dont les ſuperieurs des doubles ſignes ſont pour la Fig. 387. & les inferieurs pour la Fig. 389. Ce qui donnera $\pm$M×AC$\mp$M×BC=N×BC; & en conſequence (en multipliant le tout par $\pm$1) M×AC=M×BC$\pm$N×BC=$\overline{M \pm N}$×BC, c'eſt-à-dire, M×AC=$\overline{M \pm N}$×BC (K). Fig. 387. 389.

2°. Dans les Fig. 388. 390. nous aurons de même P. Q :: G+D. H+E (*art.* 1.) :: BC. AB :: BC. $\pm$AC$\mp$BC. dont les ſuperieurs des doubles ſignes ſeront auſſi pour la Fig. 388. & les inferieurs pour la Fig. 390. Ce qui donnera de même $\pm$P×AC$\mp$P×BC=Q×BC; & en conſequence (en multipliant le tout par $\pm$1) P×AC=P×BC$\pm$Q×BC=$\overline{P \pm Q}$×BC, c'eſt-à-dire, P×AC=$\overline{P \pm Q}$×BC (L). Fig. 388. 390.

III. Si l'on ajoûte preſentement enſemble les deux équations K, L, des nomb. 1. 2. du precedent art. 2. ſçavoir, leurs premiers membres enſemble, & leurs ſeconds auſſi enſemble, l'on aura M×AC+P×AC=$\overline{M \pm N}$×BC+$\overline{P \pm Q}$×BC, c'eſt-à-dire, $\overline{M+P}$×AC=$\overline{M \pm N+P \pm Q}$×BC, & en conſequence BC=$\frac{M+P}{\overline{M \pm N+P \pm Q}}$×AC (R), dont (*art.* 2. *nomb.* 1. 2.) les ſuperieurs des doubles ſignes ſont pour les Fig. 387. 388. & les inferieures pour les Figures 389. 390. Par conſequent en Fig. 387. & ſuivantes juſqu'à 390.

reſtituant ici les valeurs de M, N, P, Q, ſuppoſées dans le precedent article 2. l'on aura enfin ici $BC = \frac{F + D + G + D}{F + D + G + D \pm G \pm E \pm H \pm E} \times AC =$

$\frac{F + G + 2D}{F + G + 2D \pm G \pm H \pm 2E} \times AC$ (S), dont les ſuperieurs des doubles ſignes ſont encore ici pour les Fig. 387. 388. & les inferieurs pour les Figures 389. 390. Ce qui donne

$BC = \frac{F + G + 2D}{F + H + 2D + 2E + 2G} \times AC$ (T) dans les Figures 387. 388. & $BC = \frac{F + G + 2D}{F - H + 2D - 2E} \times AC$ (V) dans les Fig. 389. 390. Donc tout étant (*Hyp.*) donné dans ces deux dernieres égalitez T, V, excepté BC; elles donneront auſſi la valeur de BC en conſequence des valeurs qu'on aura données de tout le reſte qu'on ſuppoſe ici connu. Donc BC ſera ainſi par tout ici comme avec AC, qui eſt (*Hyp.*) donnée; & en conſequence le point d'appui B, d'abord (*art.* 1.) indéterminé, ſera ici déterminé & connu pour l'effectif, ſur lequel ſe doit faire l'équilibre demandé. *Ce qu'il falloit trouver & démonter.*

EXEMPLE.

Fig. 387. 388. I. Soient donnez en livres les poids F = 8, G = 6, H = 3; & les baſſins D, E, égaux en peſanteur = 1. En ce cas,

1°. L'équation T du precedent art. 3. deviendra $BC = \frac{8 + 6 + 2}{8 + 3 + 2 + 2 + 12} AC = \frac{16}{27} \times AC$ dans les Fig. 387. 388. Ce qui fait voir qu'en y diviſant en 27 parties égales la longueur donnée du Levier droit AC, & qu'en y prenant depuis C vers A, une partie CB égale à 16. de celles-là; le point B où cette partie CB ſe déterminera du côté de A, ſera le point d'appui que les valeurs ici don-

Digitized by Google

nées, exigent dans les Fig. 387. 388. pour y produire l'équilibre demandé.

2°. L'équation V du même article 3. deviendra BC= $\frac{8+6+2}{8+2-3-2}\times AC=\frac{16}{5}\times AC$ dans les Fig. 389. 390. Fig. 389. 390.

Ce qui fait voir qu'en y diviſant en cinq parties égales la longueur donnée de la portion CA du Levier droit BC, & qu'en la prolongeant par de-là A juſqu'à ce qu'on ait CB égale à 16. de ces cinquiémes parties de AC, ſon terme B ſera le point d'appui que les valeurs ici données exigent dans les Fig. 389. 390. pour y produire auſſi l'équilibre demandé.

II. N'y ayant rien de negatif dans la formule T, qui eſt dans l'art. 3. de la ſolution pour les Fig. 387. 388. quelques autres valeurs qu'on donne des precedens poids F, G, H, D, E; cette formule T donnera toûjours de cette maniere l'appui demandé dans ces Fig. 387. 388. Fig. 387. 388.

III. Mais il n'en eſt pas de même de la formule V qui eſt dans le même art. 3. de la ſolution pour les Fig. 389. 390. car la fraction de cette formule V, dont le numerateur eſt tout poſitif, ayant des grandeurs negatives avec des poſitives dans ſon denominateur; il y faut que les valeurs en ſoient données ou priſes telles que la ſomme des poſitives ſoit plus grande en quelque raiſon que ce ſoit, que la ſomme des negatives: autrement la valeur de cette fraction, & en conſequence la valeur de BC dans la formule V, deviendroit infinie ou negative, ſelon que ces deux ſommes ſeroient égales entr'elles, ou que la poſitive ſeroit moindre que la negative. Par conſequent ſi l'on donne, ou qu'on prenne (comme dans l'art. 1.) D=E dans cette formule V, il y faudra le poids F plus grand que le poids H en quelque rapport que ce ſoit; ou ſi l'on y prend F plus petit que H, il faudra que D y ſurpaſſe E d'une difference plus grande en quelque rapport que ce ſoit, que celle dont H y ſurpaſſera F. Fig. 389. 390.

En obſervant cette condition, quelques valeurs qu'on

donne aux poids F, G, H, D, E, les formules T, V, de l'art. 3. de la ſolut. donneront toûjours l'appui demandé, ainſi qu'elles viennent de le donner dans le preced. art. 1.

COROLLAIRE I.

Dans la même hypotheſe des directions des poids paralleles entr'elles, un raiſonnement ſemblable à celui qui vient de donner dans les Fig. 387. 388. 389. 390. le point d'appui B d'un Levier droit AC ou BC, ſur lequel appui trois poids donnez F, H, G, feroient équilibre entr'eux deux à deux, placé un à un (comme ci-deſſus) dans chacun des baſſins D, E, de peſanteurs données, que ce Levier porte à ſes points donnez A, C: un raiſonnement (dis-je) ſemblable à celui-là, donnera de même le point d'appui (que j'appelle encore ici B) du même Levier droit quelconque, ſur lequel tant de poids donnez qu'on voudra, F, G, H, K, L, &c. feroient équilibre entr'eux deux à deux, placez de ſuite (comme ci-deſſus) un à un dans chacun des baſſins de ce Levier AC ou BC, repeté dans chacune des Fig. 391. 392. ſans ces baſſins D, E, qu'on lui ſuppoſe cependant encore en ſes points donnez quelconques A, C; ſçavoir, F en D, en équilibre avec G en E; G en D, en équilibre auec H en E; H en D, en équilibre aveé K en E; K en D, en équilibre avec L en E, &c. en ſorte qu'en prenant encore ici D, E, pour les peſanteurs ou poids des baſſins de ces noms, le poids total en A, ſera fait de celui D de ſon baſſin de ce nom, & de celui des autres F, G, H, K, L, &c. qui ſera dans ce baſſin; & ainſi du poids total en C: le tout comme on le voit exprimé dans la premiere Table que voici; leſquels

FIG. 387. 388 389. 390.

FIG. 391. 392.

Poids totaux ſuſpendus au Levier AC ou BC, en A, en C.

TABLE I.

F+D.	G+E	
G+D.	H+E	
H+D.	K+E	:: BC. AB :: BC. ±AC∓BC.
K+D.	L+E	
&c.	&c.	

poids totaux, en cas d'équilibre deux à deux (marquez en même ligne) ſur l'appui indéterminement ſuppoſé B de chaque Levier droit AC, BC, ſeront entr'eux (*Th.* 21. *Corol.* 13.) dans la raiſon commune qu'on leur voit ici marquée, le ſuperieur des doubles ſignes qu'on y voit, y étant pour la Fig. 391. & l'inferieur pour la Fig. 392. de ſorte qu'en prenant ici, pour abreger, $M=F+D$, $N=G+E$, $P=G+D$, $Q=H+E$, $R=H+D$, $S=K+E$, $T=K+D$, $V=L+E$, &c. l'on y aura les mêmes analogies que voici dans la ſeconde Table, leſquelles donne-

TABLE 2.

M. N
P. Q
R. S
T. V
&c.

$:: BC. \pm AC \mp BC.$

ront $\overline{M+P+R+T} \times \pm \overline{AC \mp BC} = \overline{N+Q+S+V} \times BC$; ce qui (en multipliant le tout par ± 1) devient $\overline{M+P+R+T} \times \overline{AC-BC} = \overline{\pm N \pm Q \pm S \pm V} \times BC$: d'où reſulte $\overline{M+P+R+T} \times AC = \overline{M+P+R+T} \times BC$ $\overline{\pm N \pm Q \pm S \pm V} \times BC = \overline{M+P+R+T \pm N \pm Q \pm S \pm V} \times BC$; ce qui donne $BC = \frac{M+P+R+T}{M+P+R+T \pm N \pm Q \pm S \pm V} \times AC$; d'où reſulte auſſi (en reſtituant les valeurs precedentes de M, P, R, T, N, Q, S, V,) $LC = \frac{F+D+G+D+H+D+K+D}{F+D+G+D+H+D+K+D \pm G \pm E \pm H \pm E \pm K \pm E \pm L \pm E} \times AC = \frac{F+G+H+K+4D}{F+G+H+K+4D \pm G \pm H \pm K \pm L \pm 4E} \times AC$ (β)

dont les ſuperieurs des doubles ſignes ſont encore pour la Figure 391. & les inferieurs pour la Figure 392. Par

conſequent l'on aura enfin ici premierement $BC = \frac{F+G+H+K+4D}{F+L+2G+2H+2K+4D+4E} \times AC$ (♪) pour le cas de la Fig. 391. & ſecondement $BC = \frac{F+G+H+K+4D}{F-L+4D-4E} \times AC$ (λ) pour le cas de la Fig. 392. Donc tout étant (*Hyp.*) donné dans les deux valeurs de BC compriſes dans ces deux dernieres équations ♪, λ; BC y eſt auſſi connue que AC: & conſequemment le point B d'appui ici demandé de chacun des Leviers AB, BC, des Fig. 391. 992. y eſt connu de même. *Ce qu'il falloit ainſi trouver & démontrer par la methode de la ſolution precedente.*

COROLLAIRE II.

Ce qu'on voit dans le precedent Corol. 1. pour les cinq poids donnez F, G, H, K, L, ſe trouvera de même pour tel nombre *n* des poids donnez qu'on voudra : de ſorte que quelque ſoit ce nombre *n* de poids donnez quelconques, pour trouver l'appui B du Levier donné AC dans la Fig. 391. ou BC de partie donnée AC dans la Fig. 392. ſur lequel appui tous ces poids feroient équilibre deux à deux, placez de ſuite (comme ci-deſſus) un à un dans chacun des baſſins D, E, ſuſpendus aux points donnez A, C, de chacun de ces Leviers;

1°. L'équation ♪ de ce Corol. 1. fait voir que la valeur de BC dans le cas de la Fig. 391. doit être égale à une fraction d'un numerateur égal au produit du Levier donné AC, multiplié par la ſomme (que j'appelle Z) faite de tous les poids donnez, moins le dernier, & du poids du baſſin D multiplié par $n-1$; & dont le dénominateur doit être la ſomme faite du premier & du dernier des poids donnez, du double de tous les autres, & de la ſomme des poids des deux baſſins D, E, multipliée par $n-1$.

2°. L'équation λ du même Corol. 1. fait voir de même que la valeur de BC dans le cas de la Fig. 392. doit être une fraction d'un numerateur égal au produit de la partie

tie donnée AC du Levier BC, multipliée par la précedente ſomme Z, & dont le dénominateur doit être égal à la ſomme faite du premier, moins le dernier des poids donnez, & du produit de $n-1$ par le poids de D—E.

SCHOLIE.

Si l'on ſuppoſoit les Leviers AC, BC, des Fig. 387. 388. 389. 390. 391. 392. ſans baſſins, & que les poids donnez F, G, H, &c. y fuſſent ſuſpendus ſeuls aux points donnez A, C, dans l'ordre où ils étoient dans ces baſſins; cette hypotheſe rendant par tout ici D=o, E=o, feroit que

Fig. 387. & ſuivantes juſqu'à 392.

Dans la ſolution.

1°. L'analogie 1. de l'art. 1. de cette ſolution deviendroit F. G :: G. H. ce qui fait voir que pour la poſſibilité du Problême dans l'un & l'autre cas des Fig. 387. 388. 389. 390. il faudroit ici que les poids donnez F, G, H, fuſſent en progreſſion géométrique.

2°. L'équation T de l'art. 3. de la même ſolution deviendroit $BC=\frac{F+G}{F+H+2G}\times AC$ pour le cas des Fig. 387. 388.

3°. L'équation V du même art. 3. deviendroit $BC=\frac{F+G}{F-H}\times AC$ pour le cas des Fig. 389. 390.

Dans le Corol. 1.

4°. La Table 1. de ce Corol. 1. donneroit F. G :: G. H :: H. K :: K. L :: &c. c'eſt-à-dire, que pour la poſſibilité du Problême dans l'un & l'autre cas des Fig. 391. 392. il faudroit dans la preſente hypotheſe que les poids donnez F, G, H, K, L, &c. fuſſent en progreſſion géométrique, de même que dans le nomb. 1.

5°. L'équation ♪ de ce Corollaire 1. deviendroit $BC=\frac{F+G+H+K}{F+L+2G+2H+2K}\times AC$ pour le cas de la Fig. 391.

6°. L'équation λ du même Corol. 1. deviendroit $BC = \frac{F+G+H+K}{F-L} \times AC$ pour le cas de la Fig. 392.

PROBLEME XXIII.

Fig. 393. & ſuivantes juſqu'à 396.

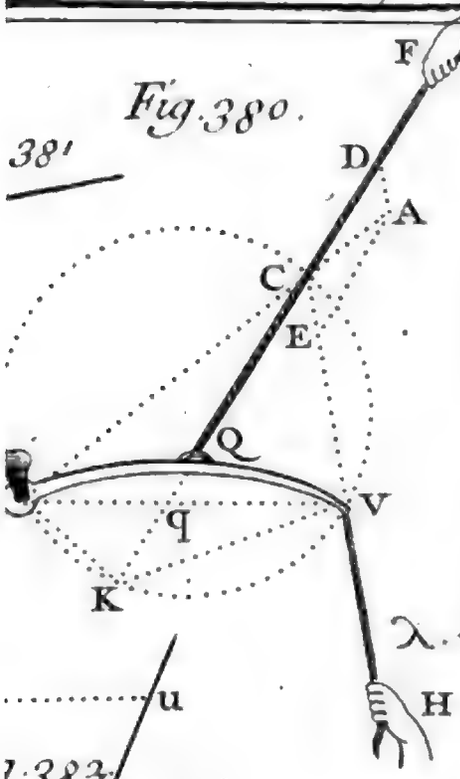
Trois puiſſances F, H, K, étant données en raiſon quelconque des trois lignes Ff, Hh, Kk, de la Fig. 393. deſquelles puiſſances une quelconque F ait auſſi ſa direction donnée QF avec ſon point d'application à un Levier quelconque BQ d'appui donné B: on demande le point d'application à ce Levier, requis aux deux autres puiſſances H, K, avec les directions qu'elles doivent avoir pour faire équilibre avec la troiſieme F ſur l'appui donné B de ce meme Levier.

SOLUTION.

Sur la direction donnée QF de la puiſſance donnée F, ſoit priſe QG=F*f*, premiere des proportionnelles données: de ſon point G (en angle quelconque avec cette partie QG de QF) ſoit menée GT=K*k*, derniere de ces trois proportionnelles; & de ſon point T (en angle auſſi quelconque avec elle) ſoit TL=H*h*, ſeconde des mêmes proportionnelles. Soient enſuite menées GL, QL; & du point d'appui donné B, la droite BC parallele à QL, & qui rencontre en C la direction donnée QF prolongée de ce côté-là; ſur laquelle direction ſoit priſe CD=QG; & de ſon point D ſoit menée DA parallele à GL, laquelle rencontrant BC en A comme GL rencontre en L la droite QL parallele à CB, acheve le triangle CDA ſemblable à QGL; & qui ayant (*Hyp.*) CD=QG=F*f*, aura auſſi DA=GL, & AC=QL. Après avoir achevé le parallelogramme CDAE, qui rend CE=DA, ſoient menées CM parallele à GT, & EM parallele à LT; leſquelles CM, EM, ſe rencontrant en M comme leurs paralleles GT, LT, ſe rencontrent en T, forment avec CE le triangle CME ſemblable à GTL: de ſorte que venant de trouver CE=DA, l'on aura pareillement ici EM=TL=H*h*, & CM=

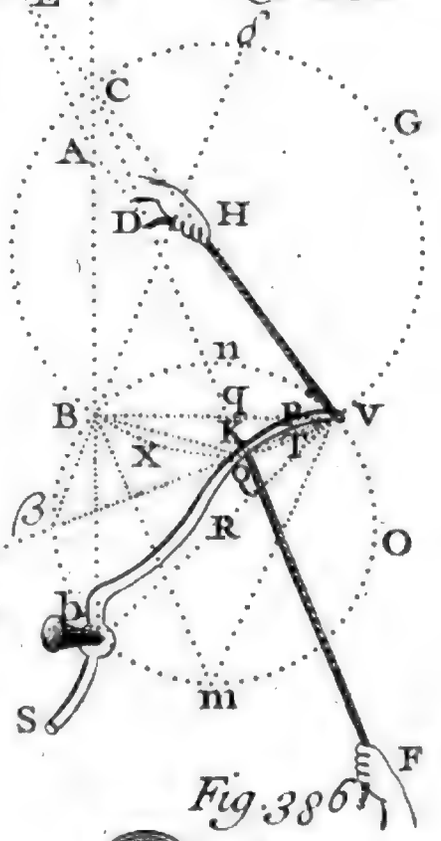
Digitized by Google

Fig. 380.



381

Fig. 383.



382

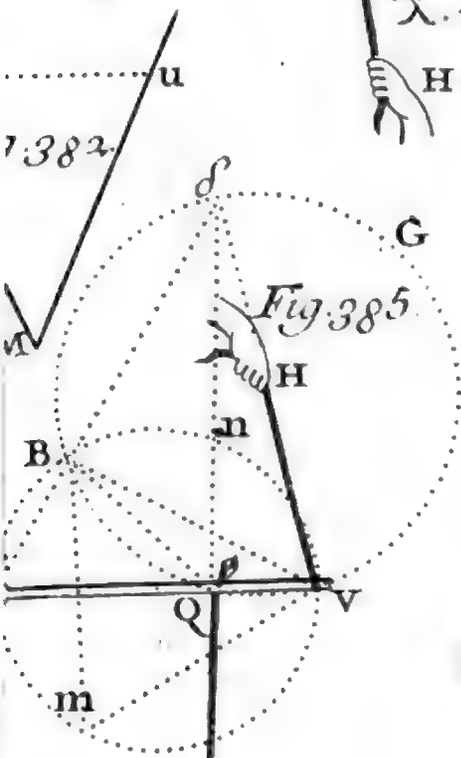
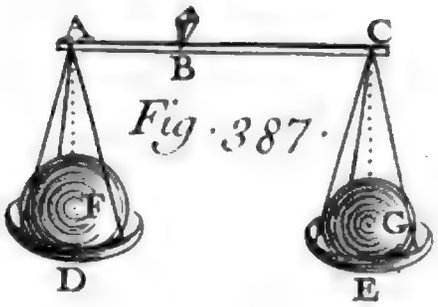


Fig. 385

Fig. 386

Fig. 387.



389

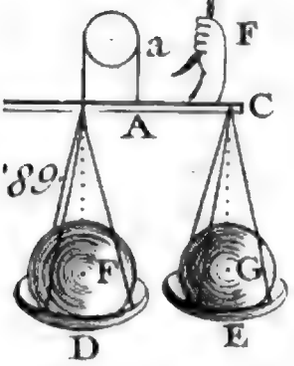
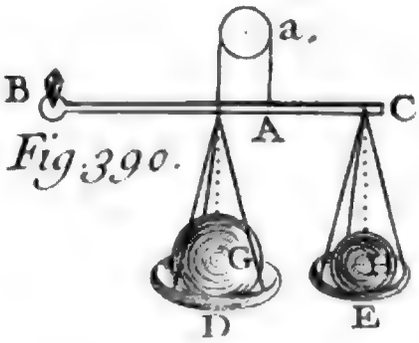


Fig. 390.



392

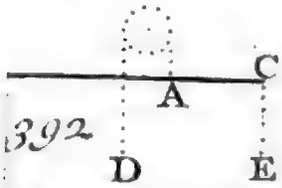
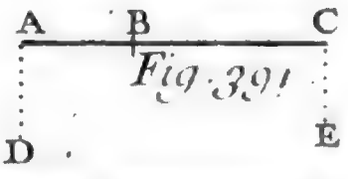


Fig. 391



GT=K*k*. Enfin après avoir auſſi achevé le parallelogramme CMEN, ſoient ſes côtez CN, CM, prolongez du côté de E vers H, K, & juſqu'à la rencontre en V, R, du Levier BQ auſſi prolongé en ligne quelconque juſqu'à ces deux points V, R.

Cela fait, je dis que les deux puiſſances données H, K, étant appliquées à ce Levier en deux points V, R, & dirigées ſuivant ces lignes VH, RK, feront enſemble équilibre ſur ſon appui donné B, avec la troiſiéme puiſſance donnée F de direction donnée QF.

DEMONSTRATION.

Le parallelogramme CMEN rendant CN=EM (*ſolut.*) =H*h*, la ſolution donnant CM=K*k*, & ayant (*Hyp.*) H*h*. K*k*:: H. K. l'on aura pareillement ici CN. CM:: H. K. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *part.* 1.) l'effort ou la force (que j'appelle E) reſultante du concours d'action de ces deux puiſſances H, K, ſera de C vers E ſuivant CE, & à la puiſſance H comme cette diagonale CE eſt au côté CN du parallelogramme CMEN, c'eſt-à-dire, E. H:: CE. CN. Mais (*Hyp.*) H. F:: H*h*. F*f* (*ſolut.*) :: CN. CD. Donc (en raiſon ordonnée) E. F:: CD. CE. Donc auſſi (*Th.* 21. *part.* 4.) l'effort ou la force reſultante du concours de la premiere E, & de la puiſſance F, c'eſt-à-dire, du concours des trois puiſſances données K, H, F, ſera ici de C vers E ſuivant la diagonale CA du parallelogramme CDAE, laquelle prolongée vers l'appui donné B, paſſe (*ſolut.*) par cet appui. Donc enfin (*Th.* 21. *part.* 5.) il y aura ici équilibre entre ces trois puiſſances données F, H, K, ſur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puiſque le parallelogramme CDAE rend CE parallele à DA, qui l'eſt (*ſolut.*) à GL, & que les triangles EMC, GTL, ſont (*ſolut.*) ſemblables entr'eux; & que la ſolution rendant auſſi leurs autres côtez EM, ou (à cauſe de l'autre parallelogramme EMCN) CN parallele à GT, &

CM parallele à LT. D'où l'on voit que les directions demandées CH, GK, des puiſſances H, K, étant ici (*ſolut.*) ſuivant CN, CM, ſont auſſi paralleles à GT, LT : ſçavoir, CN à GT, & CM à LT. De ſorte qu'en les faiſant telles par le point C dès que les deux triangles GTL, QGL, ont été faits, on les auroit eues ſans le ſecours d'aucun parallelogramme. Mais pour ſçavoir de quels côtez du Levier BQ prolongé ces deux puiſſances H, K, doivent être placées dans ces directions CH, CK, le parallelogramme CMEN étoit neceſſaire, le point E de ſa diagonale CE, étant (par rapport à C) du côté vers lequel ces deux puiſſances ainſi dirigées doivent agir ; & pour avoir la poſition de ce point E par rapport à C, c'eſt-à-dire, la poſition de cette diagonale CE, qui eſt un des côtez de l'autre parallelogramme CDAE, cet autre parallelogramme étoit pareillement neceſſaire.

COROLLAIRE II.

De ce que (*ſolut.*) les angles QGT, GTL, ſont tous deux arbitraires ou variables à la fois ; & de ce que (*Corol.* 1.) les directions CH, CK, des puiſſances données H, K, ſont toûjours paralleles aux côtez GT, TL, de ces deux angles, & conſequemment variables comme les poſitions de ces deux côtez le ſont pendant que la direction donnée CF de la troiſiéme puiſſance donnée F, demeure conſtante & toujours la même : il reſulte que le Problème dont il s'agit ici, eſt ſuſceptible d'une infinité d'infinité de ſolutions, en prenant ici pour differentes ſolutions de ce Problème, celles qui, quoiqu'iſſues d'une même méthode & d'une même direction donnée d'une même puiſſance donnée, différent dans les directions demandées des autres puiſſances pareillement données ; laquelle infinité d'infinité de ſolutions eſt le produit du nombre infini d'angles poſſibles QGT, multiplié par le nombre pareillement infini d'angles poſſibles GTL, c'eſt-à-dire, eſt le quarré d'un quelconque de ces deux nombres infinis, que ces

deux angles également variables rendent égaux. En effet la liberté que la ſolution précedente donne de faire à la fois les angles QGT, GTL, tels qu'on voudra, permettant de faire chacun d'eux conſtant & toûjours le même pendant qu'on variera l'autre à volonté;

1°. Si l'on ſuppoſe le ſecond GTL conſtant pendant que le premier QGT variera à l'infini, la ſeule varieté infinie de celui-ci changera à l'infini les poſitions de leurs côtez conſtans GT, TL, & des variables GL, QL. Ainſi BC menée de l'appui donné B juſqu'à la direction donnée QF prolongée de la puiſſance donnée F, étant toûjours (*ſolut.*) parallele à QL, & les directions CH, CK, des deux autres puiſſances données H, K, étant toûjours auſſi (*Corol.* 1.) paralleles aux côtez (*ſolut.*) conſtans GT, TL, de l'angle GTL ici ſuppoſé pareillement conſtant: la ſeule variabilité à l'infini de l'angle QGT, rend auſſi variables à l'infini les directions CB, CH, CK, de l'appui donné B, & des puiſſances données H, K. Donc trois ſimultanées quelconques de ces directions iſſues d'un même angle quelconque QGT, fourniſſant (*ſolut.*) une ſolution du Problême; la ſeule variabilité à l'infini de cet angle, qu'on voit les rendre auſſi variables à l'infini, doit fournir ainſi autant de ſolutions differentes de ce Problême que d'angles QGT, c'eſt-à-dire, une infinité; & conſequemment cette ſeule variabilité à l'infini de l'angle QGT, rend ce Problême ſuſceptible d'une infinité de ſolutions differentes.

2°. Si preſentement on ſuppoſe cet angle QGT conſtant pendant que GTL variable (*ſolut.*) comme lui, variera à l'infini; on démontrera ici, comme l'on a fait dans le nomb. 1. par rapport à la ſeule variabilité à l'infini qu'on y ſuppoſoit de cet autre angle QGT: on démontrera, dis-je, ici (comme là pour la ſeule variabilité de l'angle QGT) que la ſeule variabilité qu'on y ſuppoſe à l'infini de l'angle GTL, doit y varier de même à l'infini les directions CB, CH, CK, de l'appui donné B, & des puiſſances pareillement données H, K. Donc cette ſeule variabilité ici

ſuppoſée de cet angle GTL, y fournira (comme la ſeule variabilité de l'angle QGT dans le nomb. 1.) autant de ſolutions differentes du Problême dont il s'agit ici, qu'elle peut fournir d'angles GTL differens; & conſequemment rendra pareillement ici ſeule ce Problême ſuſceptible d'une infinité de ſolutions differentes.

3°. Puiſque (*nomb.* 1.) pour chaque angle GTL la ſeule variabilité de l'angle QGT fournit autant de ſolutions differentes du Problême dont il s'agit ici, qu'elle peut fournir d'angles QGT differens; & que (*nomb.* 2.) pour chaque angle QGT la ſeule variabilité de l'angle GTL en fournit de même autant de ſolutions differentes qu'elle peut fournir d'angles GTL differens: ces deux variabilitez permiſes à la fois par la ſolution precedente, fourniront enſemble de ce Problême un nombre de ſolutions égal au produit entr'elles des deux infinitez d'angles QGT & GTL, fournies chacune par chacune de ces variabilitez des deux indéterminez (*ſolut.*) de ces noms. Donc ſuivant la ſolution precedente, le Problême dont il s'agit ici, y eſt ſuſceptible d'une infinité d'infinité de ſolutions; laquelle infinité d'infinité eſt le produit du nombre infini d'angles poſſibles QGT, multiplié par le nombre pareillement infini d'angles poſſibles GTL, c'eſt-à-dire, eſt le quarré d'un quelconque de ces deux nombres infinis, que ces deux angles également variables rendent égaux: le tout ainſi qu'on le vient d'avancer au commencement de ce Corollaire-ci.

COROLLAIRE III.

Un raiſonnement ſemblable à celui qui vient de faire voir dans le precedent Cor. 2. que les variabilitez à l'infini des angles QGT, GTL, que la ſolution permet arbitraires à la fois entre des côtez dont l'un eſt conſtant QG, GT, TL, rendent enſemble le Problême ſuſceptible d'une infinité d'infinité de ſolutions, fera voir de même que ces deux variabilitez enſemble des angles QGT, GTL, doivent rendre auſſi la charge de l'appui donné B (reſultante du

concours d'action des trois puiſſances ici données F, H, K,) ſuſceptible d'une infinité d'infinité de grandeurs, & d'autant de directions differentes.

En effet ces deux variabilitez à l'infini de ces angles QGT, GTL, fourniſſant autant de poſitions de la droite QL, qu'elles fourniſſent de directions CH, CK, aux deux puiſſances données H, K, c'eſt-à-dire (*Corol.* 2.) une infinité d'infinité ; la droite BC toûjours parallele (*ſolut.*) à QL, en devient auſſi ſuſceptible d'une infinité d'infinité de poſitions, qui ſeront autant de directions d'autant de charges de l'appui B, reſultante du concours d'action des trois puiſſances données F, H, K, en conſequence d'autant (*Corol.* 2.) de variabilitez à l'infini de chacune des directions CH, CK, des deux dernieres H, K, de ces trois puiſſances, dont la premiere F eſt la ſeule qui ſoit de direction donnée QF ou CF ; leſquelles directions CH, CK, variant la poſition de la diagonale CF du parallelogramme CMEN, & en conſequence l'angle DCE de l'autre parallelogramme CDAE, en autant de manieres qu'elles varient elles-mêmes, en rendent la diagonale CA variable auſſi en une infinité d'infinité de grandeurs differentes, leſquelles exprimeront (*Th.* 21. *part.* 4.) autant de charges de l'appui B, reſultantes du concours d'action des trois puiſſances données F, H, K, toûjours exprimées (*ſolut.*) par les côtez conſtans CD, CN, CM, des deux parallelogrammes CDAE, CMEN, d'angles ainſi variables en une infinité d'infinité d'autres. Donc les variabilitez à l'infini des deux angles QGT, GTL, que la ſolution permet arbitraires à la fois, rendent enſemble ici la charge de l'appui donné B (reſultante du concours d'action des trois puiſſances données F, H, K,) ſuſceptible d'une infinité d'infinité de grandeurs par rapport à ces puiſſances toûjours les mêmes, & cette charge ſuſceptible auſſi d'une infinité d'infinité de directions differentes.

SCHOLIE.

De la maniere dont vient d'être reſolu le précedent

Probl. 23. où l'on demandoit de mettre en équilibre entr'elles ſur un appui donné d'un Levier quelconque, trois puiſſances données à volonté, d'une ſeule deſquelles le point d'application à ce Levier, étoit donné avec ſa direction quelconque : de cette maniere, dis-je, on peut auſſi reſoudre en general le Problême où l'on demandoit de mettre de même en équilibre entr'elles ſur un appui donné d'un Levier quelconque, tant de puiſſances qu'on voudra, données auſſi à volonté, d'une ſeule auſſi deſquelles le point d'application à ce Levier ſeroit donné avec la direction quelconque de cette puiſſance, ſans rien avoir non plus des autres que leurs valeurs ou leurs rapports à celle-ci.

PROBLEME XXIV.

Fig. 397. 398. 399. *Tant de puiſſances F, H, K, P, S, &c. qu'on voudra, étant données en raiſons quelconques d'autant de lignes données Ff, Hh, Kk, Pp, Ss, &c. deſquelles puiſſances une ſeule quelconque, par exemple, F, ſoit appliquée à un Levier quelconque en un point donné Q, ſuivant une direction pareillement donnée QF : on demande les points d'application à ce Levier, requis à toutes les autres puiſſances, & les directions qu'elles doivent avoir pour faire équilibre toutes enſemble avec la premiere F ſur un appui donné B de ce Levier.*

SOLUTION.

I. Sur la direction donnée QF de cette premiere puiſſance donnée F, ſoit priſe QG=F*f*, & de ſon point G ſoit menée (en angle quelconque avec elle) la droite GO égale à la derniere des proportionnelles aux puiſſances ici données ; laquelle derniere proportionnelle étant ici S*s*, il faudra ici GO=S*s*. De ſon point O (en angle quelconque avec elle) ſoit menée OI=P*p* : de ſon point I (en angle auſſi quelconque avec elle) ſoit menée IT=K*k* : de ſon point T (en angle encore quelconque avec elle) ſoit menée TL=H*h* ; & toûjours de même juſqu'à celle incluſivement de ces proportionnelles, qui ſuit immediatement

ment la premiere F*f*, laquelle ſeconde proportionnelle eſt ici H*h*. Du point G par les points I, T, L, &c. ſoient menées les droites GI, GT, GL, &c. Et du point Q par le dernier de ceux-là, qui eſt ici L, ſoit auſſi menée la droite QL.

II. Après cela, du point d'appui donné B, ſoit menée la droite BC parallele à QL, & qui rencontre en C la direction donnée QF prolongée de ce côté-là; ſur laquelle direction ſoit priſe CD=QG (*art.* 1.)=F*f*. De ſon point D ſoit menée DA parallele à GL; laquelle DA rencontrant BC en A, comme GL rencontre en L la droite QL parallele à CB, formera avec CD, CA, le triangle CDA ſemblable à QGL, & qui ayant (*Hyp.*) CD=QG, aura conſequemment auſſi DA=GL, & CA=QL. Après avoir achevé le parallelogramme CDAE, qui aura CE =DA=GL, faites CM parallele à GT, & EM parallele à LT; leſquelles CM, EM, ſe rencontrant en M, comme leurs paralleles GT, LT, ſe rencontrent en T, formeront avec CE le triangle CME ſemblable à GTL: de ſorte que venant de trouver CE=GL, ces deux triangles ſemblables auront conſequemment auſſi EM=TL (*art.* 1.)=H*h*, & CM=GT. Des points C, M, ſoient faites de même CX parallele à GI, & MX parallele à TI; ce qui avec CM formera auſſi le triangle CXM ſemblable à GIT: de ſorte que venant de trouver CM= GT, l'on aura pareillement ici MX=TI (*art.* 1.)=K*k*; & CX=GI. Des points C, X, ſoient auſſi faites Cβ parallele à GO, & Xβ parallele à OI; ce qui avec CX formera de même le triangle CβX ſemblable à GOI: de ſorte que venant de trouver CX=GI, l'on aura pareillement ici Xβ=OI (*art.* 1.)=P*p*, & Cβ=GO (*art.* 1.) =S*s*, qui eſt ici la derniere des proportionnelles aux puiſſances qui s'y trouvent données. C'eſt ainſi qu'il faudroit continuer de faire juſqu'à la derniere, s'il y en avoit davantage qu'ici, en quelque nombre qu'elles fuſſent.

III. Soient preſentement achevez les parallelogrammes CMEN, CXMY, CβXδ, &c. juſqu'au dernier fait des

deux dernieres proportionnelles, s'il y en avoit davantage, comme CβXσ eſt fait ici (*art.* 1.) des deux Cβ (*art.* 2.) =GO=Ss, & Cσ=βX (*art.* 2.) =OI=Pp, qui s'y trouvent les dernieres. Soient enfin prolongez depuis C juſqu'au Levier BQ pareillement prolongé, tout ce que ces parallelogrammes ont de côtez oppoſez à EM, MX, Xβ, &c. juſqu'au dernier incluſivement de ces parallelogrammes, qui eſt ici CβXσ, duquel ſeul les deux côtez Cσ, Cβ, qui paſſent par C, doivent être ainſi prolongez; c'eſt-à-dire ici, que les côtez CN, CY, Cσ, Cβ, des parallelogrammes CMEN, CXMY, CβXσ, ſont les ſeuls qui doivent y être ainſi prolongez juſqu'au Levier BQ pareillement prolongé en ligne quelconque juſqu'à ſa rencontre avec eux en V, R, Z, ω, ainſi que le côté CD du premier parallelogramme l'eſt juſqu'au point Q de ce Levier. Ces côtez CN, CY, Cσ, Cβ, ainſi prolongez juſqu'aux points V, R, Z, ω, du Levier ZBQω, ſoient auſſi prolongez juſqu'en H, K, P, S, vers les endroits que regardent les extrêmitez differentes E, M, X, les diagonales CE, CM, CX, de leurs parallelogrammes CMEN, CXMY, CβXσ.

IV. Cela fait, je dis que les points V, R, Z, ω, du Levier ZBQω, trouvez dans le précedent art. 3. ſont les requis ou les puiſſances ici données H, K, P, S, doivent être appliquées à ce Levier, aux côtez ou on les voit; & que les lignes droites CVH, CRK, CZP, ωCS, trouvées auſſi dans le même art. 3. ſont les directions que ces quatre puiſſances ici données, y doivent avoir pour faire équilibre ſur l'appui donné B, avec la cinquiéme auſſi donnée F, & de direction QF ou CQF pareillement donnée; c'eſt-à-dire, que ces cinq puiſſances ici données F, H, K, P, S, étant appliquées en Q, V, R, Z, ω, ſuivant QF, VH, RH, ZP, ωS, au Levier ZBQω d'appui donné B, feront ici équilibre entr'elles ſur cet appui, & ainſi de tant d'autres puiſſances données qu'on voudra, d'une ſeule quelconque deſquelles la direction ſoit donnée avec ſon point d'application à un Levier quelconque d'appui donné. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Puiſque des parallelogrammes CDAE, CMEN, CXMY, CβX♪, des art. 2. 3. de la ſolution, ſon art. 2. fait voir que le premier CDAE a ſon côté CD=F*f*; que le ſecond CMEN rend CN=ME=H*h*; que le troiſiéme CXMY rend CY=XM=K*k*; que le quatriéme CβX♪ rend C♪ =βX=P*p*; & que Cβ=S*s*: les côtez CD, CN, CY, C♪, de ces parallelogrammes, & Cβ, ſont proportionnels aux lignes F*f*, H*h*, K*k*, P*p*, S*s*, leſquelles l'étant (*Hyp.*) aux puiſſances données F, H, K, P, S; ces côtez CD, CN, CY, C♪, & Cβ, ſont auſſi proportionnels à ces mêmes puiſſances F, H, K, P, S. Donc,

1°. Ayant ainſi S. P :: Cβ. C♪ l'effort ou la force (que j'appelle X) reſultante du concours d'action de ces deux puiſſances S, P, ſera ici (*Lem.* 3. *Cor.* 1. *p.* 1.) de C vers X ſuivant CX, & à la puiſſance P comme cette diagonale CX du parallelogramme CβX♪ eſt à ſon côté C♪; c'eſt-à-dire, X. P :: CX. C♪. Or on vient de trouver P. K :: C♪. CY. Donc (en raiſon ordonnée) X. K :: CX. CY.

2°. Par conſequent l'effort ou la force (que j'appelle M) reſultante du concours de la premiere compoſée X, & de la puiſſance K, c'eſt-à-dire (*nomb.* 1.) reſultante du concours d'action des trois puiſſances S, P, K, ſera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de C vers M ſuivant CM, & à la puiſſance K comme cette diagonale CM du parallelogramme CXMY eſt à ſon côté CY; c'eſt-à-dire, M. K :: CM. CY. Or on vient de trouver K. H :: CY. CN. Donc (en raiſon ordonnée) M. H :: CM. CN.

3°. Par conſequent l'effort ou la force (que j'appelle E) reſultante du concours de la ſeconde compoſée M & de la puiſſance H, c'eſt-à-dire (*nomb.* 2.) reſultante du concours d'action des quatre puiſſances S, P, K, H, ſera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de C vers E ſuivant CE, & à la puiſſance H comme cette diagonale CE du parallelogramme CMEN eſt à ſon côté CN; c'eſt-à-dire, E. H :: CE. CN.

Or on vient de trouver H. F :: CN. CD. Donc (en raiſon ordonnée (E. F :: CE. CD.

4°. Par conſequent l'effort ou la force reſultante du concours de la troiſiéme compoſée E & de la puiſſance F, c'eſt-à-dire (*nomb.* 3.) reſultante du concours d'action des cinq puiſſances données S, P, K, H, F, ſera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de C vers A ſuivant la diagonale CA du parallelogramme CDAE, laquelle diagonale prolongée vers l'appui donné B, paſſe (*ſolution art.* 2.) par cet appui.

5°. Donc enfin (*Th.* 21. *part.* 6.) il y aura ici équilibre entre ces cinq puiſſances données F, H, K, P, S, ſur cet appui donné B : & ainſi de tant d'autres puiſſances qu'on voudra, d'une ſeule quelconque deſquelles la direction ſoit donnée avec ſon point d'application à un Levier quelconque d'appui donné. *Ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Suivant l'art. 2. de la ſolution, les côtez Cβ, βX, XM, ME, des parallelogrammes CβXδ, CXMY, CMEN, ſont paralleles aux côtez GO, OI, IT, TL, du poligone GOITL, chacun à chacun dans l'orde qu'ils ont ici. Or ſuivant l'art. 3. de la même ſolution, les directions demandées ωCS, CP, CK, CH, des puiſſances données, S, P, K, H, ſont, la premiere ωCS ſuivant Cβ, & les autres CP, CK, CH, paralleles à βX, XM, ME. Donc ces directions demandées ωCS, CP, CK, CH, des puiſſances données S, P, K, H, ſont auſſi paralleles à GO, OI, IT, TL, chacune à chacune. D'ou l'on voit que pour avoir ſimplement ces directions demandées des puiſſances données S, P, K, H, ſans ſe mettre en peine de quels côtez du Levier ces puiſſances doivent être placées ; il n'y avoit ſans le ſecours d'aucun parallelogramme, qu'à mener tout d'un coup ces directions ωS, CP, CK, CH, par le point C trouvé dès le commencement de l'art. 2. de la ſolution, paralleles ainſi à ces côtez GO, OI, IT, TL,

Digitized by Google

du poligone GOITL fait comme dans l'art. 1. de la même ſolution. Mais les parallelogrammes qu'on y vient d'employer, y étoient neceſſaires (*ſolut. art.* 3. 4.) pour reconnoître de quels côtez du Levier ZBQω ces puiſſances S, P, K, H, de directions demandées, devroient être placées, le devant être (*ſolut. art.* 3.) ſuivant ces directions (preſentement trouvées) vers les endroits que regardent les extrêmitez differentes X, M, E, des parallelogrammes CβXδ, CXMY, CMEN, qui ont leurs côtez Cβ, Cδ, CY, CN, ſur ces directions ωS, CP, CK, CH: le tout par la même raiſon que dans le Corol. du précedent Probl. 23.

COROLLAIRE II.

Si l'on conſidere que dans le Corol. 2. de ce Probl. 23. les variabilitez, chacune à l'infini, des deux ſeuls angles arbitraires QGT, GTL, des Fig. 394. 395. 396. y fourniſſent enſemble une infinité d'infinité de directions differentes à chacune des puiſſances H, K, au lieu d'une qu'on y demandoit pour chacune; & en conſequence y fourniſſent auſſi une infinité d'infinité tant de ſolutions de ce Probl. 23. que (ſuivant ſon Corol. 3.) de charges de l'appui qui eſt donné, & que de directions de ces charges: cela (dis-je) conſideré, on verra que les differentes combinaiſons des variabilitez, chacune auſſi à l'infini, des quatre angles QGO, GOI, OIT, ITL, ici arbitraires dans la Fig. 398. y doivent donner un nombre beaucoup plus de fois infini de directions à chacune des puiſſances H, K, P, S, au lieu de chacune une qu'on leur demandoit pareillement ici; & auſſi en conſequence un pareil nombre de ſolutions tant du Problême dont il s'agit ici, que de charges differentes de l'appui qui y eſt donné, & que de directions de ces charges.

On voit de là que ce nombre de ſolutions du Problême, de charges de l'appui donné, & de directions de ces charges, augmenteroit d'infini en infini, à proportion qu'il y

auroit plus de puiſſances données dans ce Problême, deſquelles une ſeule auroit ſa direction donnée avec ſon point d'application au Levier propoſé d'appui donné, ſur lequel il faudroit mettre (comme dans la ſolution précedente) toutes ces puiſſances données en équilibre entr'elles, quel qu'en fût le nombre; c'eſt-à-dire, à proportion qu'il y auroit plus de puiſſances de directions demandées dans ce Problême avec leur point d'application au Levier propoſé d'appui donné.

SCHOLIE.

Voilà juſqu'ici pour trouver l'équilibre, &c. ſur un appui donné d'un Levier quelconque entre tant de puiſſances qu'on voudra, données ou ſeulement de rapports donnez à volonté; deſquelles une ſeule quelconque auroit ſa direction donnée avec ſon point d'application à ce Levier, & toutes les autres de directions demandées avec leurs points d'application à ce même Levier. Preſentement ſi au lieu de la direction & du point d'application d'une ſeule de ces puiſſances à ce Levier, les directions de deux ou de pluſieurs d'entr'elles étoient données avec leurs points d'application au même Levier quelconque d'appui donné, & qu'il ne s'agit plus que de trouver les points d'application à ce Levier, & les directions requiſes aux autres puiſſances pour les mettre en équilibre avec celles-là ſur cet appui, c'eſt-à-dire, pour mettre ſur lui en équilibre entr'elles tout ce qu'il y en auroit ici de données: il n'y auroit qu'à chercher, comme dans le Problême 17. en quel point du Levier propoſé il faudroit mettre un appui (le donné étant ôté pour un moment) ſur lequel ſeul ces ſeules puiſſances de directions données feroient équilibre entr'elles, quelle ſeroit la charge qui de leur concours reſulteroit à ce point d'appui, & la direction de cette charge; prendre enſuite cette charge ainſi connue avec ſa direction, pour une ſeule puiſſance (que j'appelle π) qui lui ſeroit égale, appliquée en ſa place ſuivant

F——f=QG=CD
H——h=TL=EM=CN
K——k=GT=CM

Fig 393

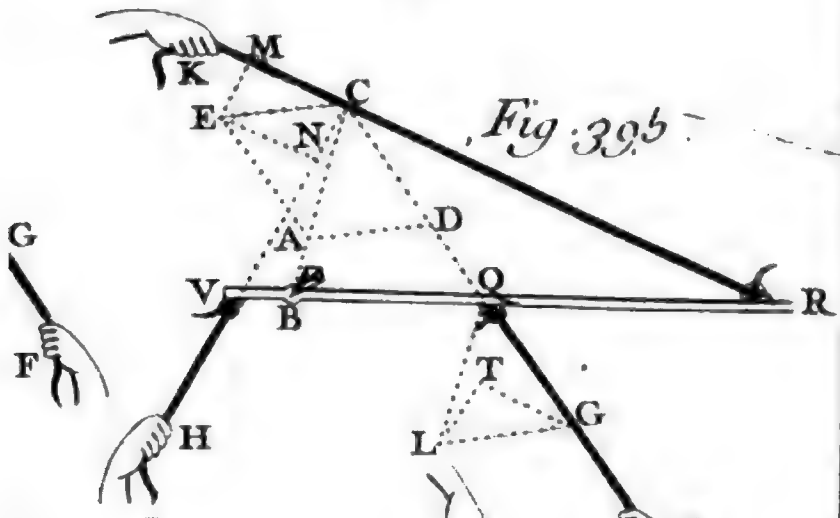


Fig 395

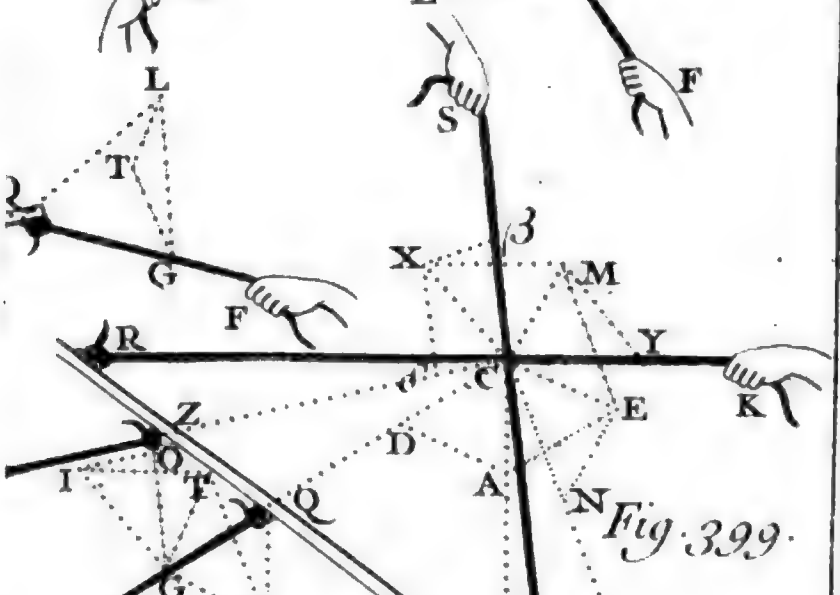


Fig 399

Fig 397

F——f=QG=CD=
H——h=TL=ME=CN
K——k=TI=MX=CY
P——p=OI=βX=Cδ
S——f=GO=Cβ=

Digitized by Google

ſa direction au point d'appui trouvé du Levier, ſur lequel toutes ces puiſſances de directions données feroient ſeules équilibre entr'elles. Alors (reſtituant l'appui donné, & ôtant le ſuppoſé) le Problême ainſi réduit à cette nouvelle puiſſance connue π, ſeule de point d'application & de direction connues, & aux autres toutes de points d'application & de directions demandées, ſeroit dans les conditions du dernier qu'on vient de reſoudre, & conſequemment ſe reſoudroit alors comme lui.

MACHINES
SANS FROTTEMENT,

Démontrées ſuivant les principes de la Nouvelle Mécanique.

TOut ce que l'on voit de Machines ſans frottement, eſt fait d'un rouleau ou cylindre, qui ſert d'eſſieu à une roue en forme de poulie. Ce rouleau auquel pend un fardeau, eſt ſoûtenu par deux cables attachez au haut d'une eſpece de grue, en ſorte que ces cordes & celle du fardeau s'entortillent neceſſairement autour de ce rouleau dès que la puiſſance appliquée à ſa roue l'oblige de tourner.

La ſeule vûe de ces Machines fait à la verité voir que tout cela s'y execute ſans frottemens ; mais en échange le rapport de la puiſſance au poids qu'elle doit enlever, y paroît ſi conſiderablement au-deſſus de ce qu'il ſeroit, ſi cette poulie ne tournoit que ſur un centre fixe, qu'il y a grand lieu d'appréhender qu'on ne perde bien autant, & peut-être plus, de ce côté-là, qu'on ne gagne de l'autre.

Fig. 400. En effet, ſans même avoir d'égard à la peſanteur de la poulie & de ſon rouleau, ſi l'on conſidere, lorſque cette Machine MHN s'appuye en H ſur les bras de gruau CD, que la puiſſance E ſoûtient le poids F, de meme qu'elle feroit avec un levier GL, dont l'appui ſeroit en H, & auquel cette puiſſance & ce poids ſeroient appliquez en G & en L ; l'on trouvera que cette puiſſance & ce poids doivent ici être entr'eux en raiſon reciproque des perpendiculaires tirées du point H ſur leurs directions EG & FL ; c'eſt-à-dire, lorſque ces directions ſont paralleles, comme HL à HG, ou bien (en faiſant HI parallele à ces directions, & par le centre A l'horiſontale MN) comme IN à IM ;

IM ; au lieu que dans l'uſage ordinaire où cette Machine tourneroit autour de ſon centre A ſur un pivot fixe (faiſant abſtraction du frottement qu'il y auroit) la puiſſance E ſeroit toûjours au poids F, quelques directions qu'ils euſſent, comme le rayon AN du rouleau HN au rayon AM de la poulie : ce qui demande un ſurcroît de forces dans la puiſſance E d'autant plus conſiderable que les bras de gruau CD font un plus grand angle avec l'horiſon ; parce qu'alors IA en devenant plus grande, le rapport de IN à IM en ſurpaſſe auſſi d'autant plus celui de AN à AM.

Par exemple, ſuppoſé que ces bras de gruau CD faſſent un angle de 30. deg. avec l'horiſon auquel les directions EG & FL ſoient perpendiculaires, l'angle IHA, étant auſſi pour lors de 30. degrez, IA ſera la moitié de AN : faiſant donc AN de deux parties, dont le rayon AM en contienne, ſi l'on veut, 10. AN ſera en ce cas à MA, comme 2. à 10. & IN ſera à MI, comme 3. à 9. Ainſi ſi le poids F étoit, par exemple, de 100. liv. dans l'uſage ordinaire où le point fixe ſeroit en A, la puiſſance E ne ſeroit que de 20. liv. & dans l'uſage preſent elle devroit être de 33. liv. $\frac{1}{3}$. Si l'angle de ces bras de gruau avec l'horiſon étoit de 50. deg. l'angle IHA étant auſſi pour lors de 50. deg. AI ſeroit de $1.\frac{18301127}{25000000}$. ce qui ſeroit IN de $3.\frac{18301127}{25000000}$. & IM de $8.\frac{66980712}{25000002}$. ainſi la puiſſance E ſeroit alors de 45. liv. $\frac{18654117}{20009877}$ ce qui eſt plus du double de ce qu'elle ſeroit dans l'uſage ordinaire. Si l'angle de gruaux avec l'horiſon étoit de 70. deg. par un ſemblable changement, la puiſſance E ſeroit de 47. liv. $\frac{15674061}{20301537}$. & ainſi toûjours en augmentant à meſure que cet angle augmentera, juſqu'à ce qu'enfin ces bras de gruau ſoient perpendiculaires à l'horiſon ; & alors l'appui du rouleau HA ſe trouvant en B, comme dans la Machine où ce rouleau ne ſeroit ſoutenu qu'avec des cordes perpendiculaires KB, la puiſſance E ſeroit au poids F,

comme le diamétre BN du rouleau HN à BM moitié de la difference qui eſt entre ce diamétre & celui de la poulie ; c'eſt-à-dire ici, comme 4. à 8. ou comme 50. liv. contre 100. liv. & par conſequent une fois & demi plus grande qu'il n'auroit fallu dans l'uſage ordinaire. Après cela je laiſſe à juger s'il y a du gain ou de la perte à ſauver ainſi les frottemens.

Il eſt vrai que le poids F doit monter ici plus vîte que dans les Machines ordinaires, puiſqu'il monte ici, & parce que ſa corde s'entortille au rouleau HN, & parce que ce rouleau lui-même monte encore ; au lieu que dans les Machines ordinaires ce poids ne monte que par l'entortillement de ſa corde autour de ce rouleau : mais ce ſurcroît de vîteſſe n'eſt point du tout à comparer à cette augmentation de puiſſance, vû qu'on eſt bien plus maître du tems que des forces : outre qu'à toute rigueur, c'eſt-à-dire, toute vîteſſe bien comptée, cette augmentation de forces ſeroit encore aſſez conſiderable pour faire douter s'il n'y a point plus de perte que de gain à ſauver ainſi les frottemens. En effet à prendre même la plus grande vîteſſe que ce poids puiſſe avoir avec ce rouleau mobile ; c'eſt-à-dire, à la prendre double de ce qu'elle ſeroit ſi ce rouleau avoit ſon axe fixe ; la puiſſance E ne devroit être alors tout au plus que double de ce qu'elle ſeroit dans ce dernier état ; & par conſequent n'étant ici que de 20. liv. pour l'axe fixe de ce rouleau, elle ne devroit être tout au plus que de 40. liv. ſur cet axe mobile. On la vient cependant de trouver de 50. liv. c'eſt donc 10. liv. pour les frottemens que cauſeroient à ce rouleau fixe une puiſſance de 20. liv. contre un poids de 100. Ce qui non ſeulement ici, où l'on ſuppoſe AM à AN, comme 10. à 2. mais encore dans tout autre rapport de ces rayons, fait aſſez voir qu'une telle puiſſance eſt toûjours à ce qu'il en coûte pour ſauver ainſi les frottemens, *comme la difference du rayon de la roue à celui de ſon rouleau, eſt au diametre entier de ce même rouleau.* Et cela, comme l'on voit, ſans compter ce qu'il faut encore ici dépenſer de forces pour des vîteſſes dont on ſe paſſeroit bien.

DEMONSTRATION.

La force de la puiſſance E ſeroit au poids F ſur le point A comme AM à MA, ou comme BN à 2MA : & ce poids F lui ſeroit ſur l'appui B comme MB à BN : la force de la puiſſance E ſur ce point A ſeroit donc à celle qu'il lui faudroit ſur B, comme BM à 2MA, retirant donc 2BM de 2MA, comme l'on vient de faire 40. de 50. pour fournir à la vîteſſe qu'on trouve ici double de ce qu'elle ſeroit ſur ce point A. Ce reſte ſera donc 2BA ou BA pour la meſure de ce qu'il en faudroit encore, toute vîteſſe bien comptée par ces frottemens. Ainſi la force de la puiſſance E ſur le point A devroit toûjours être à celle des frottemens qu'elle y cauſeroit, comme BM à BN, c'eſt-à-dire, *comme la difference du rayon de la roue à celui de ſon rouleau, eſt au diametre entier de ce méme rouleau.* C.Q.F.D.

Je ne compte point non plus ce qu'il faudroit encore de forces pour enlever la poulie avec ſon rouleau, qu'on a juſqu'ici regardez comme ſans peſanteur. Voici le tout en general, & pour tous les cas poſſibles.

PROPOSITION PREMIERE.

Soit la puiſſance E appliquée ſuivant EC à la poulie CG, dont l'axe eſt un rouleau BA tellement ſoûtenu avec les cordes BK ſur les bras de gruau IT, que ces cordes, auſſi-bien que AF, qui eſt celle du poids F, s'entortillent neceſſairement autour de ce rouleau dès que l'on fera tourner la roue CG conformément à l'effort de la puiſſance E. Quelque angle OPA que la direction OP du centre de gravité O commun à la roue CG & à ſon rouleau BA, faſſe avec la direction AF du poids F : quelque angle auſſi PZC que la direction PQ de l'impreſſion commune qui reſulte de leur concours d'action, faſſe avec CE direction de la puiſſance E ; je dis qu'en cas d'equilibre, Fig 401. 402. 403.

1°. *La puiſſance E ſera à la charge des bras de gruau IT ſur leſquels le rouleau BA eſt appuyé, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles KHZ & QZE.*

2°. *La puiſſance E ſera à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK, c'eſt-à-dire, la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles ZHO, & QZE.*

3°. *La puiſſance E ſera à tout le poids de la poulie CG & de ſon rouleau BA, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA, au produit des ſinus des angles EZH & ZPA.*

4°. *La puiſſance E ſera au poids F, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA, au produit des ſinus des angles EZH & OPZ.*

DEMONSTRATION.

Pour avoir les angles des directions AP, OP, CE & KB, concevons-les toutes dans un même plan perpendiculaire à l'axe du rouleau BA, de même que ſeroient les coupes faites ſur ce plan par autant d'autres plans qui paſſant par ces lignes, lui ſeroient perpendiculaires. De-là quelque angle APO que faſſent entr'elles AP & OP directions du poids F, & de la Machine CA faite de la poulie CG & du rouleau BA; il eſt clair par toutes les propoſitions de la nouvelle Mécanique, que tout ce que cette Machine en reçoit d'impreſſion, non ſeulement ſe fait ſuivant la diagonale PQ de quelque parallelogramme MN, dont les côtez PM & PN ſont pris ſur les directions AP, OP, mais encore que cette impreſſion compoſée ſur la Machine CA, eſt la même (*Corol. 6. Lem. 3.*) que ſi au lieu de la peſanteur de cette Machine & du poids F, elle étoit ſeulement pouſſée ſuivant PQ par une force égale à celle que lui cauſent ces deux enſemble. On peut donc regarder cette Machine ainſi tirée en même tems par ſa peſanteur, par le poids F, & par la puiſſance E, comme ſi elle ne l'étoit que par cette nouvelle force appliquée ſuivant PQ & par la puiſſance E appliquée ſuivant CE: ainſi quelque angle QZE que ces directions faſſent entr'elles, il faut encore pour la même raiſon que ce que la Machine CA recevra d'impreſſion de ces deux forces, c'eſt-à-dire, du concours d'action de ſa peſanteur, de

Digitized by Google

celle du poids F, & de la puiſſance E, ſuivie de même la diagonale ZX de quelqu'autre parallelogramme VY, dont les côtez ZV & ZY ſoient pris ſur PQ & CE prolongées ; & de plus que cette commune impreſſion ſoit la même ſur cette Machine, que ſi au lieu de ces trois forces, elle étoit ſeulement pouſſée ſuivant ZX par une autre force égale à celle que lui cauſent ces trois enſemble. On peut donc encore regarder cette Machine comme n'ayant d'impreſſion de toute ſa charge, que ce que cette nouvelle force lui en pourroit donner ſuivant ZX contre la reſiſtance du crochet K ; & alors ainſi chargée, elle ſera comme un poids d'une direction ſuivant ZX que le crochet K ſuivant KB qui rencontre ZX prolongée en H, retiendra ſur la ſurface IT ; de ſorte qu'en cas d'équilibre, il faudra (*Th.* 26.) que de l'impreſſion ſuivant HZ, que l'on peut encore regarder comme compoſée de deux autres, dont l'une ſuivroit KH prolongée vers β, & l'autre une ligne OHω perpendiculaire au bras de gruau IT, (la reſiſtance du crochet K ſoûtenant celle qui ſuivroit Hβ) il n'en reſte à cette Machine CA que ſuivant ligne Hω.

Achevant donc le parallelogramme ωβ, dont la diagonale Hϖ ſe trouve dans la direction HZ, l'on trouvera (*Corol.* 1. *Lem.* 3.) qu'en cas d'équilibre la charge des bras de gruau repreſentez par IT, doit être à la reſiſtance des crochets K, & à l'impreſſion ſuivant HZ de la charge entiere de la Machine CA, comme le côté Hω au côté Hβ, & à la diagonale Hϖ du parallelogramme ωβ ; de ſorte que cette impreſſion totale ſuivant HZ, la reſiſtance des crochets K, & la charge des bras de gruau IT, ſont alors entr'elles comme les lignes Hϖ, Hβ, & Hω ; c'eſt-à-dire, comme les ſinus des angles ωHβ, ωHϖ, & βHϖ ; ou comme les ſinus des angles KHO, ZHO, & KHZ.

Or à cauſe que cette impreſſion ſuivant HZ ſuit (*Hyp.*) la diagonale ZX du parallelogramme VY, dont les côtez ZY & ZV ont été pris ſur les directions des forces dont

cette impreſſion eſt compoſée, c'eſt-à-dire, ſur les directions prolongées CZ & PZ de la puiſſance E & de la force qui ſuit IQ ; cette puiſſance E, cette force ſuivant QZ, & cette impreſſion ſuivant HZ ſont auſſi entr'elles (*Cor.* 1. *Lem.* 3.) comme ZY, ZV, & ZX, comme les ſinus des angles VZX, YZX, & VZY, c'eſt-à-dire, comme les ſinus des angles QZH, EZH, & QZE.

De plus la force qui ſuit QZ, ſuivant auſſi (*Hyp.*) la diagonale PQ du parallelogramme MN, dont les côtez PM & PN ont été pris ſur les directions AM & ON du poids F & de la peſanteur de la Machine CA ; cette force, le poids F, & la peſanteur de cette Machine, pour la même raiſon, ſont encore entr'eux comme les ſinus des angles NPM, NPQ, & MPQ, c'eſt-à-dire, comme les ſinus des angles OPA, OPZ, & APZ.

Donc en multipliant deux à deux ſelon l'ordre de leurs termes toutes ces rangées de proportionnelles :

Impreſ. ſuiv. HZ.	ch. des bras de gr. IT	::	ſKHO. ſKHZ.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. HZ	::	ſQZH. ſQZE.
Impreſ. ſuiv. HZ.	reſiſt. des crochets K	::	ſKHO. ſZHO.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. HZ	::	ſQZH. ſQZE.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. QZ	::	ſQZH. ſEZH.
Impreſ. ſuiv. QZ.	peſ. de la Mach. CA	::	ſOPA. ſAPZ.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. QZ	::	ſQZH. ſEZH
Impreſ. ſuiv. QZ.	poids F	::	ſOPA. ſOPZ

L'on aura, 1°. la puiſſance E à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles KHZ & QZE. 2°. La puiſſance E à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles ZHO & QZE. 3°. La puiſſance E au poids de la Machine CA, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA au produit des ſinus des angles EZH & APZ. 4°. La puiſſance E au poids F, comme le produit

des ſinus des angles QZH & OPA au produit des ſinus des angles EZH & OPZ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

De-là ſuppléant les figures de tous les autres cas, il ſeroit aiſé de tirer une infinité de Corollaires, qui découvriroient encore non ſeulement en general les rapports qui ſont entre la charge des bras de gruau IT, la reſiſtance des crochets K, la peſanteur de la Machine CA, & le poids F dans toutes les combinaiſons poſſibles; mais auſſi le détail tant de ces rapports que des précedens pour toutes les inclinaiſons poſſibles des bras de gruau IT, & pour toutes les directions imaginables des cordes BK, de la puiſſance E, du poids F, & de la Machine CA. Je paſſe tout cela, parce qu'il eſt plus long que difficile à conclure; outre que le ſeul cas des directions paralleles que j'ai d'abord examiné, ſuffit avec quelques experiences ſur les frottemens, pour juger s'il y a du gain ou de la perte à les ſauver ainſi.

Outre cette maniere de ſauver les frottemens de la Machine CA, l'on pourroit encore en imaginer une autre, où les crochets K ſeroient vers le bas, & où cette machine devroit deſcendre pour enlever le poids F; & cette maniere ſeroit d'autant au-deſſus de l'autre, que, 1°. l'on n'auroit plus cette machine à enlever; 2°. au contraire elle aideroit elle-même par ſa peſanteur à enlever le poids F; 3°. regardant la puiſſance E & le poids F appliquez en G & en L à un Levier HG, dont l'appui fût en H, l'on trouveroit auſſi que le bras de la puiſſance E ſeroit à celui du poids F en plus grande raiſon que dans la maniere de M. Perault: mais auſſi d'un autre côté on ne ſauveroit pas tous les frottemens de la machine entiere; puiſque la poulie I, ſur laquelle la corde du poids F doit paſſer, y ſeroit toûjours ſujette. FIG. 404.

PROPOSITION II.

En ce cas le rapport general de la puiſſance E ſeroit, 1°. à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des ſinus

des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles KHZ & QZE : 2°. à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles ZHO & QZE : 3°. à tout le poids de la machine faite de la poulie CG & de ſon rouleau BA, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA au produit des ſinus des angles EZH & APZ : 4°. au poids F, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA au produit des ſinus des angles EZH & OPZ : 5°. à la charge de la poulie I, comme le produit des ſinus des angles QZH, OPA, & ADI au produit des ſinus des angles EZH, OPZ, & ADF.

DEMONSTRATION.

Tout cela ſe démontrera encore dans toute ſon étendue par la démonſtration précedente, excepté l'art. 5. pour lequel il faut de plus ajouter ſuivant la part. 2. du Th. 14. que le poids F eſt à la charge de la poulie I, comme le ſinus de l'angle ADI, au ſinus de l'angle ADF ; afin que multipliant cette rangée de proportionnelles par celle de l'art. 4. où la puiſſance E eſt au poids F, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA au produit des ſinus des angles EZH & OPZ ; la puiſſance E ſe trouve à la charge de la poulie I, comme le produit des ſinus des angles QZH, OPA, & ADI, au produit des ſinus EZH, OPZ, & ADF ; c'eſt-à-dire (dans l'hypotheſe ordinaire, où les directions PO & DF de la peſanteur de la machine CA & du poids F, paſſent pour paralleles) comme le produit des ſinus des angles QZH & ADI au produit des ſinus des angles EZH & OPZ.

La combinaiſon & le détail de tous ces rapports ſont encore plus longs que difficiles ; outre qu'il n'eſt pas ici tout-à-fait queſtion de cette derniere maniere de ſauver les frottemens. Je paſſe donc à l'autre.

PROP.

Digitized by Google

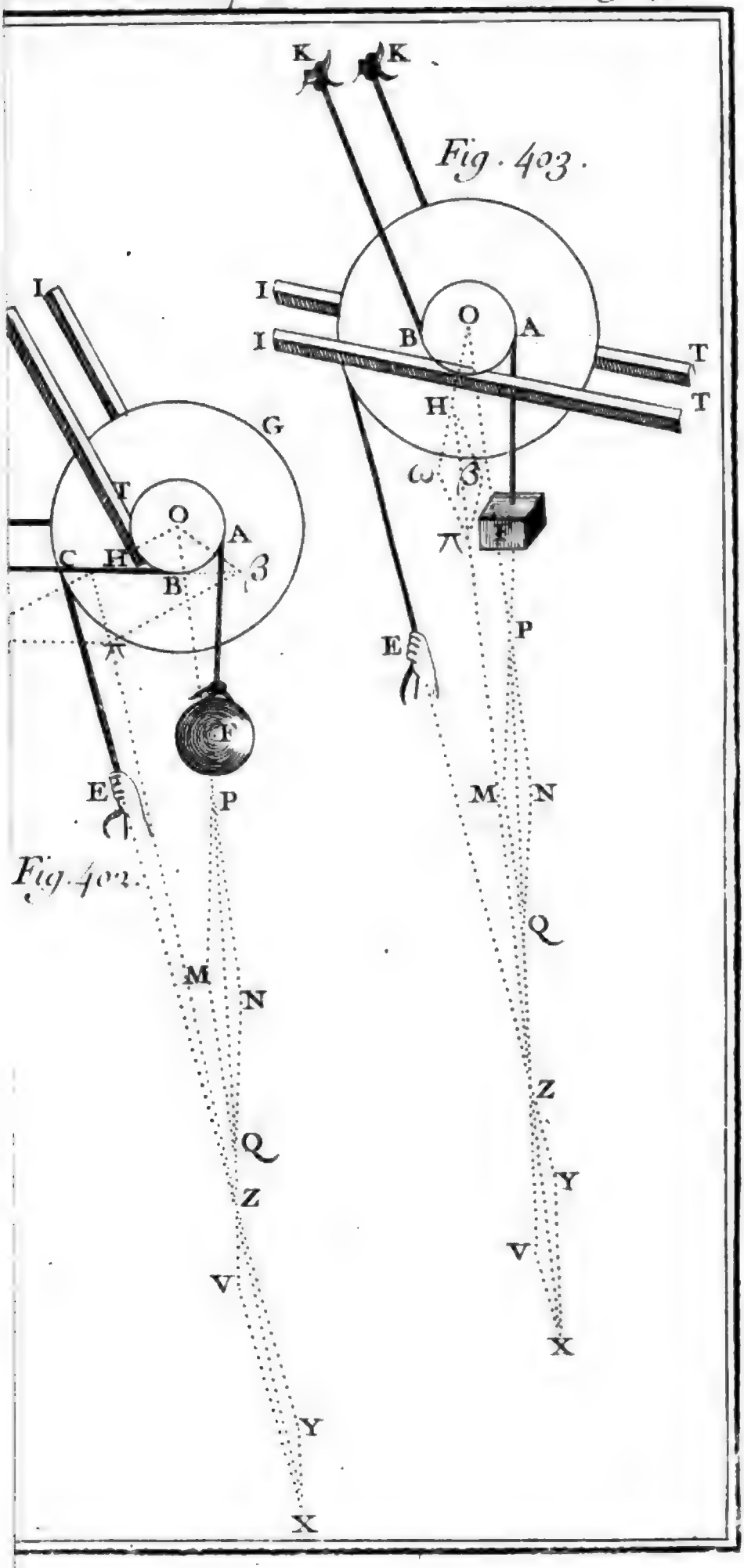


Fig. 403.

Fig. 402.

Digitized by Google

PROPOSITION III.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans la premiere propoſition, quelque angle OPC que la direction DP du centre de gravité O commun à la roue CG & à ſon rouleau BA, faſſe avec la direction CP de la puiſſance E : quelque angle auſſi PZA que la direction PQ de l'impreſſion commune qui reſulte de leur concours d'action, faſſe avec ZA direction du poids F; je dis encore qu'en cas d'équilibre, FIG. 405.

1°. *La puiſſance E eſt à la charge des bras de grueau IT, ſur leſquels le rouleau BA eſt appuyé, comme le produit des ſinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des ſinus des angles OPC, PZA, & KHZ.*

2°. *La puiſſance E eſt à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK, c'eſt-à-dire, à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des ſinus des angles OPC, PZA, & ZHO.*

3°. *La puiſſance E eſt à tout le poids de la poulie CG & de ſon rouleau BA, comme le ſinus de l'angle OPQ à celui de l'angle CPQ.*

4°. *La puiſſance E eſt au poids F, comme le produit des ſinus des angles OPQ & HZA, au produit des ſinus des angles OPC & PZH.*

DEMONSTRATION.

Par un raiſonnement tout ſemblable à celui des démonſtrations précedentes, quelque angle CPO que les directions CP & OP de la puiſſance E & de la machine CA, faſſent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impreſſion commune; & faiſant ſur leurs directions particulieres le parallelogramme MN, dont la diagonale ſoit ſur PQ; l'on trouvera que la puiſſance E, le poids de la machine CA, & la force de ce qui reſulte d'impreſſion de leur concours d'action ſuivant PQ, ſont entr'eux comme les ſinus des angles OPQ, CPQ, & OPC. De même quelque angle PZA que PQ prolongée faſſe avec

la direction ZA du poids F, faiſant ſur ces lignes le parallelogramme V Y, dont la diagonale ZX prolongée paſſe par le point H, ou la corde KB concourt avec la ligne O∞ tirée du centre O du rouleau BA perpendiculairement ſur le bras de gruau IT; l'on trouvera encore que le poids F, la force qui ſuit PQ, & celle de l'impreſſion qui reſulte de leur concours d'action ſuivant ZX ou HZ, ſont entr'eux comme les ſinus des angles PZH, AZH, & PZA. Enfin ſur O∞ & KB prolongée achevant le parallelogramme ∞β, dont la diagonale Hπ ſoit ſur HZ, l'on aura encore de la même maniere l'impreſſion qui ſuit ainſi ZX ou HZ, la charge des bras de gruau IT, & la reſiſtance des crochets K entr'elles comme les ſinus des angles KHO, KHZ, & ZHO.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici ſous un même crochet:

Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	::	ſOPQ. ſOPC.
Impreſ. ſuiv. PQ.	impreſſion ſuiv. ZX	::	ſHZA. ſPZA.
Impreſ. ſuiv. ZX.	ch. des bras de gr. IT	::	ſKHO. ſKHZ.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	::	ſOPQ. ſOPC.
Impreſ. ſuiv. PQ.	impreſſion ſuiv. ZX	::	ſHZA. ſPZA.
Impreſ. ſuiv. ZX.	reſiſt. des crochets K	::	ſKHO. ſZHO.
Puiſſance E.	poids de la Mach. CA	::	ſOPQ. ſCPQ.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	::	ſOPQ. ſOPC.
Impreſ. ſuiv. PQ.	poids F.	::	ſHZA. ſPZH.

L'on aura, 1°. la puiſſance E à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des ſinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des ſinus des angles OPC, PZA, & KHZ. 2°. La puiſſance E à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des ſinus des angles OPC, PZA, & ZHO. 3°. La puiſſance E à tout le poids de la machine faite de la roue

CG & de ſon rouleau BA, comme le ſinus de l'angle OPQ au ſinus de l'angle CPQ. 4°. La puiſſance au poids F, comme le produit des ſinus des angles OPQ & HZA au produit des ſinus des angles OPC & PZH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION IV.

Toutes choſes demeurant encore les mêmes que dans la propoſition précedente, quelque angle APC que la direction AP du poids F, faſſe avec la direction CP de la puiſſance E : quelque angle auſſi PZO que la direction PQ de l'impreſſion commune qui reſulte du concours d'action, faſſe avec ZO direction du centre de gravité O commun à la roue CG & à ſon rouleau BA : je dis encore qu'en cas d'équilibre, Fig. 406.

1°. *La puiſſance E eſt à la charge des bras de gruau IT, ſur leſquels le rouleau BA eſt appuyé, comme le produit des ſinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des ſinus des angles CPA, PZO, & KHZ.*

2°. *La puiſſance E eſt à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK, c'eſt-à-dire, à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des ſinus des angles CPA, PZO, & ZHO.*

3°. *La puiſſance E eſt à tout le poids de la poulie CG & de ſon rouleau BA, comme le produit des ſinus des angles APQ, & HZO, au produit des ſinus des angles CPA & PZH.*

4°. *La puiſſance E eſt au poids F comme le ſinus de l'angle APQ à celui de l'angle CPQ.*

DEMONSTRATION.

Par un raiſonnement encore tout ſemblable à celui des démonſtrations précedentes, quelque angle CPA que les directions CP & AP de la puiſſance E & du poids F, faſſent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impreſſion commune, & faiſant ſur leurs directions particulieres le parallelogramme MN, dont la diagonale ſoit ſur PQ, l'on trouvera que la puiſſance E, le poids F, & la

force de ce qui reſulte d'impreſſion de leur concours d'action ſuivant PQ, ſont entr'eux comme les ſinus des angles APQ, CPQ, & CPA. De même quelque angle PZO que PQ prolongée faſſe avec la direction ZO de la machine CA, faiſant ſur ces lignes le parallelogramme VY, dont la diagonale ZX prolongée paſſe par le point H où la corde KB concourt avec la ligne O*, tirée du centre O du rouleau BA perpendiculairement ſur le bras de gruau IT; l'on trouvera encore que le poids de la machine CA, la force qui ſuit PQ, & celle de l'impreſſion qui reſulte de leur concours d'action ſuivant ZX ou ZH, ſont entr'eux comme les ſinus des angles PZH, HZO, & PZO. Enfin ſur O* & KB prolongée faiſant le parallelogramme *ß dont la diagonale H* ſoit ſur HZ; l'on aura encore de la même maniere l'impreſſion qui ſuit ainſi ZX ou HZ, la charge des bras de gruau IT, & la reſiſtance des crochets K entr'elles, comme le ſinus des angles KHO, KHZ, & ZHO.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici ſous un même crochet:

Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	:: ſAPQ. ſCPA.
Impreſ. ſuiv. PQ.	impreſſion ſuiv. ZX	:: ſHZO. ſPZO.
Impreſ. ſuiv. ZX.	ch. des bras de gr. IT	:: ſKHO. ſKHZ.

Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	:: ſAPQ. ſCPA.
Impreſ. ſuiv. PQ.	impreſſion ſuiv. ZX	:: ſHZO. ſPZO.
Impreſ. ſuiv. ZX.	reſiſt. des crochets K	:: ſKHO. ſZHO.

Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	:: ſAPQ. ſCPA.
Impreſ. ſuiv. PQ.	poids de la Mach. CA	:: ſHZO. ſPZH.

Puiſſance E.	poids F.	:: ſAPQ. ſCPQ.

L'on aura, 1°. la puiſſance E à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des ſinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des ſinus des angles CPA,

Digitized by Google

PZO, & KHZ. 2°. La puiſſance E à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles AIQ, HZO, & KHO, au produit des ſinus des angles CPA, PZO, & ZHO. 3°. La puiſſance E à tout le poids de la machine faite de la roue CG & de ſon rouleau BA, comme le produit des ſinus des angles APQ & HZO au produit des ſinus des angles CPA & PZH. 4°. La puiſſance E au poids F, comme le ſinus de l'angle APQ au ſinus de l'angle CPQ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je ne dis rien encore de tous les Corollaires qu'on pourroit tirer de ces deux propoſitions, en ſuppléant, comme dans la premiere, les figures de tous les cas que leur univerſalité comprend. Il ſuffit de faire remarquer que l'uſage de la premiere propoſition eſt (la peſanteur de la machine CA & le poids F étant donnez avec leurs directions & celle de la puiſſance E) de faire trouver la valeur de la puiſſance E, &c. L'uſage de la troiſiéme eſt (la puiſſance E, & la peſanteur de la machine CA étant donnée avec leurs directions, & celle du poids F) de faire trouver la valeur du poids F, &c. L'uſage de la quatriéme eſt (la puiſſance E & le poids F étant donnez avec leurs directions & celle de la machine CA) de faire trouver la peſanteur de la machine CA, &c.

Voilà, ce me ſemble, tout ce que l'on peut demander par rapport à l'uſage preſent de la machine CA. Je paſſe donc au rouleau que M. Perault fait encore agir ſans frottement au pied de ſa machine, pour en augmenter, dit-il, la force.

Ce rouleau eſt GG tellement lié dans les cordes HI, que lorſqu'on le fait tourner en abaiſſant les Leviers LN, les cordes I s'entortillent à l'entour, les cordes H ſe détortillent, & le rouleau deſcend. D'ou il arrive que ſi la puiſſance E tient aſſez ferme contre le poids E, la corde ED pour l'empêcher de gliſſer ſur ce rouleau, ce poids ſe trouve obligé de monter, & parce que ce rouleau deſcend, & parce que ſa corde doit auſſi pour lors s'entortiller autour de ce même rouleau. FIG. 407.

Digitized by Google

Fig. 408. Il eſt encore manifeſte que dans cet uſage du rouleau GG, ſon mouvement ne ſe fait point ſur ſon axe, mais ſeulement ſur une ligne qui joint les points ou les cordes H & I ſe rencontrent ; c'eſt-à-dire (en regardant ce rouleau de profil) ſeulement comme ſur l'extrêmité K de cette ligne, avec un levier LK, auquel ſont appliquez en L, G, & M, la puiſſance L, le poids du rouleau G, & le poids F, dont je ſuppoſe la corde DE retenue par la puiſſance E ſur le rouleau G, de même que ſi elle y étoit ſeulement attachée. Ainſi, 1°. le poids du rouleau G, & ce qu'il ſoutient pour ſa part du poids F, doivent ici être entr'eux en raiſon reciproque des perpendiculaires tirées de l'appui K ſur leurs directions. 2°. La puiſſance L, & le reſte du poids F, ſont auſſi entr'eux en raiſon reciproque des perpendiculaires tirées du même point K ſur leurs directions : de ſorte que lorſque ces directions ſont paralleles à la partie de corde KI ou KH, dont l'extrêmité ſert d'appui K, ces perpendiculaires ſe confondant avec le diamétre KN & le levier LN, que je lui ſuppoſe en ligne droite ; le poids du rouleau G ſera à ce qu'il ſoûtient pour ſa part du poids F, comme le diamétre KN à ſa moitié KG ; & la puiſſance L au reſte du poids F, comme le diamétre KN à la ſomme LK faite de ce diamétre & du levier LN.

D'où il s'enſuit que ſi en ce cas le diamétre KN étoit de 4. parties, dont le levier LN fût (ſi l'on veut) de 10. que de plus le poids F fût de 100. liv. & la peſanteur du rouleau G de 10. liv. puiſque cette peſanteur du rouleau G eſt à ce qu'elle ſoutient du poids F, comme le diamétre NK à ſa moitié GK, c'eſt-à-dire, comme 2. à 1. cette partie du poids F que la peſanteur du rouleau G ſoûtiendroit pour ſa partie, ſeroit de 5. liv. ainſi ce reſte ſoûtenu par la puiſſance L ſeroit de 95. liv. leſquelles étant auſſi à cette puiſſance L, comme LK à NC, c'eſt-à-dire ici, comme 14. à 4. cette même puiſſance, quoique ſecourue de la peſanteur du rouleau G, ſeroit encore de 27. liv. $\frac{1}{7}$ au lieu que dans l'uſage ordinaire de ce rouleau,

Digitized by Google

où ſon axe G ſeroit fixe, cette puiſſance L ne ſeroit que de 16. liv. $\frac{2}{3}$. c'eſt-à-dire, près de la moitié moins qu'ici. Voici le tout en general, & pour tous les cas poſſibles.

PROPOSITION V.

Soit la puiſſance L appliquée par le moyen d'un levier LN au rouleau G lié, comme l'on vient de dire, ſuivant HNMI dans une corde attachée par ſes extrémitez aux crochets H & I, & auquel le poids F ſoit auſſi appliqué avec une corde DM, laquelle entortillée auſſi autour, ſoit retenue deſſus par quelque puiſſance ou autrement: quelque angle LPG que faſſent entr'elles les directions LP & GP de la puiſſance L, & du rouleau G: quelque angle auſſi QZD que la direction PQ de l'impreſſion commune qui reſulte de leur concours d'action, faſſe dans ſa rencontre en Z avec DM direction du poids F. FIG. 409. juſqu'à 412.

Je dis qu'en cas d'équilibre,

1°. *La puiſſance L eſt au poids du rouleau G, comme le ſinus de l'angle ZPG, au ſinus de l'angle ZPL.*

2°. *La puiſſance L eſt au poids F, comme le produit des ſinus ZPG & DZK, au produit des ſinus des angles LPG & QZK.*

3°. *La puiſſance L eſt à la reſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des ſinus des angles LPG, QZD, & ZKH.*

4°. *La puiſſance L eſt à la reſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des ſinus des angles LPG, QZD, & ZKI.*

DEMONSTRATION.

Quelqu'angle LPG que faſſent entr'elles LP & GP directions de la puiſſance L & du rouleau G, équipé comme il eſt ici, il eſt clair par toutes les propoſitions de la Nouvelle Mécanique, que ce que ce rouleau en reçoit d'impreſſion, non ſeulement ſe fait ſuivant la diagonale PQ de quelque parallelogramme RS, dont les côtez ſoient pris ſur les directions de LP & de GP, mais encore

que cette impreſſion compoſée ſur le rouleau G, eſt la même (*Corol.* 2. *Lem.* 3.) que ſi au lieu de la puiſſance L & de la peſanteur de ce rouleau, il étoit ſeulement pouſſé ſuivant PQ par une force égale à celle que lui cauſent ces deux enſemble : l'on peut donc regarder ce rouleau ainſi tiré en même tems par ſa peſanteur, par la puiſſance L, & par le poids F, comme s'il ne l'étoit que par cette nouvelle force appliquée ſuivant PQ, & par le poids F appliqué ſuivant DM ; ainſi quelque angle DZQ que ces directions faſſent entr'elles, il faut encore pour la même raiſon que ce que le rouleau G recevra d'impreſſion de ces deux forces, c'eſt-à-dire, du concours d'action de ſa peſanteur, de celle du poids F, & de la puiſſance L, ſuive de même la diagonale ZX de quelqu'autre parallelogramme AB, dont les côtez ſoient pris ſur PQ & DM prolongées, & que cette commune impreſſion ſoit la même ſur ce rouleau ; que ſi au lieu de ces trois forces, il étoit ſeulement pouſſé ſuivant ZX par une autre force égale à celle que lui cauſent ces trois enſemble. On peut donc encore regarder ce rouleau comme n'ayant d'impreſſion en tout que ce que cette nouvelle force lui en pourroit donner ſuivant ZX contre la reſiſtance des cordes HK & KI.

Ainſi cette direction ZX prolongée doit paſſer (*Corol.* 15. *Lem.* 3.) par le point K où ces cordes concourent ; & en cas d'équilibre (*Corol* 5. *Th.* 1.) la force de cette impreſſion ſuivant ZX, doit être à la reſiſtance de chaque crochet I & K, comme le ſinus de l'angle HKI à chacun des ſinus des angles ZKH & ZKI.

Or à cauſe que cette impreſſion ſuivant ZK ſuit (*Hyp.*) la diagonale ZX du parallelogramme AB, dont les côtez ZA & ZB ont été pris ſur les directions des forces dont cette impreſſion eſt compoſée, c'eſt-à-dire, ſur les directions DM & QZ du poids F, & de la force qui ſuit PQ ; cette impreſſion ſuivant ZX doit être (*Lem.* 3. *part.* 1.) au poids F, & à la force qui ſuit ZQ, comme la diagonale ZX du parallelogramme AB à ſes côtez ZA & ZB: de

de ſorte que cette impreſſion ſuivant ZX, le poids F, & la force qui ſuit ZQ, ſont entr'eux comme ZX, ZA, & ZB, ou comme les ſinus des angles QZD, QZK, & DZK.

De plus la force qui ſuit ZQ, ſuivant auſſi (*Hyp.*) la diagonale PQ du parallelogramme RS, dont les cotez PS & PR ont été pris ſur les directions LP & GP de la puiſſance L & du rouleau G; cette force ſuivant ZQ, la puiſſance L, & le poids du rouleau G, pour la même raiſon, ſont encore entr'eux comme les ſinus des angles LPG, ZPG, & ZPL.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici ſous un même crochet:

Puiſſance L. poids du roul. G :: ſZPG. ſZPL.

Puiſſance L. impreſ. ſuiv. ZQ :: ſZPG. ſLPG.
Impr. ſuiv. ZQ. poids F :: ſDZK. ſQZK.

Puiſſance L. impreſ. ſuiv. ZQ :: ſZPG. ſLPG.
Impr. ſuiv. ZQ. impreſ. ſuiv. ZX :: ſDZK. ſQZD.
Impr. ſuiv. ZX. reſiſt. du croch. I :: ſHKI. ſZKH.

Puiſſance L. impreſ. ſuiv. ZQ :: ſZPG. ſLPG.
Impr. ſuiv. ZQ. impreſ. ſuiv. ZX :: ſDZK. ſQZD.
Impr. ſuiv. ZX. reſiſt. du croch. H :: ſHKI. ſZKI.

L'on aura, 1°. la puiſſance L au poids du rouleau G, comme le ſinus de l'angle ZPG au ſinus de l'angle ZPL. 2°. La puiſſance L au poids F, comme le produit des ſinus des angles ZPG & DZK, au produit des ſinus des angles LPG & QZK. 3°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des ſinus des angles LPG, QZD, & ZKH. 4°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des ſinus des angles LPG, QZD, & ZKI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VI.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans la propoſition précedente, quelque angle MZG que faſſent entr'elles les directions DM & GZ du poids F & du rouleau G : quelque angle auſſi LPZ que la direction ZX de l'impreſſion commune qui reſulte de leur concours d'action, faſſe dans ſa rencontre en P avec LP direction de la puiſſance L ; je dis encore qu'en cas d'équilibre :

1°. *La puiſſance L eſt au poids du rouleau G, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & MZP.*

2°. *La puiſſance L eſt au poids F, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & IZG.*

3°. *La puiſſance L eſt à la reſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKH.*

4°. *La puiſſance L eſt à la reſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKI.*

DEMONSTRATION.

Par un raiſonnement tout ſemblable à celui de la démonſtration précedente, quelque angle MZG que les directions GZ & MZ du rouleau G & du poids F, faſſent entr'elles, prenant ZX pour la direction de leur impreſſion commune, & faiſant ſur leurs directions particulieres le parallelogramme AB, dont la diagonale ſoit ſur ZX ; l'on trouvera que la peſanteur du rouleau G, le poids F, & la force de ce qui réſulte d'impreſſion de leur concours d'action ſuivant ZX, ſont entr'eux comme les ſinus des angles MZP, PZG, & MZG. De même quelque angle LPZ que ZX prolongée faſſe avec la direction LP de la puiſſance L, faiſant ſur ces lignes le parallelogramme RS, dont la diagonale PQ prolongée paſſe

par le point K, où les cordes HK & IK concourent ; l'on trouvera encore que la puiſſance L, la force qui ſuit ZX, & celle de l'impreſſion qui réſulte de leur concours d'action ſuivant PQ, ſont entr'elles comme les ſinus des angles ZPK, LPK, & LPZ. Enfin l'on trouvera encore (*Corol.* 5. *Th.* 1.) que la force qui ſuit ainſi PK, doit être à la réſiſtance de chaque crochet I & H, comme le ſinus de l'angle IKH à chacun des ſinus des angles PKH & PKI.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & les multipliant deux à deux ſelon l'ordre de leurs termes :

Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. ZX	::	ſZPK.	ſLPK.
Impr. ſuiv. ZX.	peſant. du roul. G	::	ſMZG.	ſMZP.
Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. ZX	::	ſZPK.	ſLPK.
Impr. ſuiv. ZX.	poids F	::	ſMZG.	ſPZG.
Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. PQ	::	ſZPK.	ſLPZ.
Impr. ſuiv. PQ.	réſiſt. du croch. I	::	ſIKH.	ſPKH.
Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. PQ	::	ſZPK.	ſLPZ.
Impr. ſuiv. PQ.	réſiſt. du croch. H	::	ſIKH.	ſPKI.

L'on aura, 1°. la puiſſance L au poids du rouleau G, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & MZP. 2°. La puiſſance L au poids F, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & PZG. 3°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKH. 4°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VII.

Toutes choſes demeurant encore les mêmes que deſſus, quelque angle LPM que faſſent entr'elles les directions LP & DM de la puiſſance L & du poids F: quelque angle auſſi PZG que la direction PQ de l'impreſſion commune qui reſulte de leur concours d'action, faſſe dans ſa rencontre en Z avec ZG direction du rouleau G; je dis encore qu'en cas d'équilibre,

1°. *La puiſſance L eſt au poids du rouleau G, comme le produit des ſinus des angles MPZ & GZK, au produit des ſinus des angles LPM & PZK.*

2°. *La puiſſance L au poids F, comme le ſinus de l'angle MPZ, au ſinus de l'angle LPZ.*

3°. *La puiſſance L à la reſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des ſinus des angles LPM, GZP, & ZKH.*

4°. *La puiſſance L à la réſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des ſinus des angles LPM, GZP, & ZKI.*

DEMONSTRATION.

Par un raiſonnement encore tout ſemblable à celui de la démonſtration précedente, quelque angle LPM que les directions LP & DM de la puiſſance L & du poids F faſſent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impreſſion commune, & faiſant ſur leurs directions particulieres le parallelogramme RS, dont la diagonale ſoit ſur PQ, l'on trouvera que la puiſſance L, le poids F, & la force de ce qui réſulte d'impreſſion de leur concours d'action ſuivant PQ, ſont entr'eux comme les ſinus des angles MPZ, LPZ, & LPM. De même quelque angle PZG que PQ prolongée faſſe avec la direction ZG du rouleau G, faiſant ſur ces lignes le parallelogramme AB, dont la diagonale ZX prolongée paſſe par le point K où les cordes HK & IK concourent; l'on trouvera encore que la peſanteur du rouleau G, la force qui ſuit PQ, &

celle de l'impreſſion qui réſulte de leur concours d'action ſuivant ZX, ſont entr'elles comme les ſinus des angles PZK, GZK, & PZG. Enfin l'on trouvera encore que la force qui ſuit ainſi ZK, doit être à la réſiſtance de chaque crochet I & H, comme le ſinus de l'angle IKH à chacun des ſinus des angles ZKH & ZKI.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on voit ici ſous un même crochet:

Puiſſance L. impreſ ſuiv. PQ :: ſMPZ. ſLPM.
Impr. ſuiv. PQ. peſant. du roul. G :: ſGZK. ſPZK.

Puiſſance L. poids F. :: ſMPZ. ſLPZ.

Puiſſance L. impreſ ſuiv. PQ :: ſMPZ. ſLPM.
Impr. ſuiv. PQ. impreſ ſuiv. ZX :: ſGZK. ſGZP.
Impr. ſuiv. ZX. reſiſt. du croch. I :: ſIKH. ſZKH.

Puiſſance L. impreſ ſuiv. PQ :: ſMPZ. ſLPM.
Impr. ſuiv. PQ. impreſ ſuiv. ZX :: ſGZK. ſGZP.
Impr. ſuiv. ZX. reſiſt. du croch. H :: ſIKH. ſZKI.

L'on aura, 1°. la puiſſance L à la peſanteur du rouleau G, comme le produit des ſinus des angles MPZ & GZK au produit des ſinus des angles LPM & PZK. 2°. La puiſſance L au poids F, comme le ſinus de l'angle MPZ au ſinus de l'angle LPZ. 3°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des ſinus des angles LPM, GZP, & ZKH. 4°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des ſinus des angles LPM, GZP, & ZKI. *Ce qu'il falloit demontrer.*

Je n'entre point encore dans le détail de tous les Corollaires qu'on pourroit tirer de ces trois dernieres propoſitions, en ſuppléant dans la ſixiéme & la ſeptiéme, comme dans la cinquiéme, les Figures de tous les cas que leur

univerſalité comprend. Il ſuffit encore de faire remarquer que l'uſage de la cinquiéme propoſition eſt (la puiſſance L & le poids du rouleau G étant donnez avec leurs directions, & celle du poids F) de faire trouver la valeur du poids F, &c. L'uſage de la ſixiéme eſt (le poids F & la peſanteur du rouleau G étant donnez avec leurs directions, & celle de la puiſſance L) de faire trouver la valeur de la puiſſance L, &c. L'uſage de la ſeptiéme eſt (la puiſſance L & le poids F étant donnez avec leurs directions, & celle du rouleau G) de faire trouver le poids du rouleau G, &c.

L'application de tout cela aux Machines en queſtion, fera voir ce que l'on doit attendre de cet uſage du rouleau G: ce que j'en ai dit pour le cas des directions paralleles immédiatement avant la cinquiéme propoſition, doit déja en avoir fait comprendre quelque choſe.

FIG. 408. Mais on le verra encore mieux ſi l'on fait reflexion que lorſqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir repriſe, il faut encore plus de force dans la puiſſance L, que lorſqu'il le faut abaiſſer. Pour le comprendre, il faut conſiderer, 1°. *que la puiſſance E doit être plus grande que le poids F joint aux frottemens de ſa corde ſur le rouleau G, pour ne point ſe laiſſer emporter, lorſque, pour avoir repriſe, il faut relever le levier LN*, puiſqu'elle doit alors ſurmonter tout ce que ce poids joint à ces frottemens fait de reſiſtance pour empêcher ſa corde de gliſſer. 2°. *Au contraire la puiſſance E jointe à la reſiſtance de ces frottemens, ne doit valoir que le poids F, pour empêcher ſa corde de gliſſer ſur le rouleau G, lorſqu'il eſt queſtion de faire monter ce poids par l'abaiſſement du levier LN*; puiſqu'il n'eſt alors beſoin que de s'oppoſer à ce que ce poids fait d'efforts pour cela.

De là il ſuit, 1°. que dans l'abaiſſement du levier LN, la puiſſance E doit être égale à la difference qui eſt entre le poids F, & la reſiſtance du frottement de ſa corde avec le rouleau G. 2°. Que ce qu'il faut de forces en tout dans la puiſſance E pour un abaiſſement plus une élevation du levier LN, eſt plus grand que deux fois ce poids F. 3°. Que

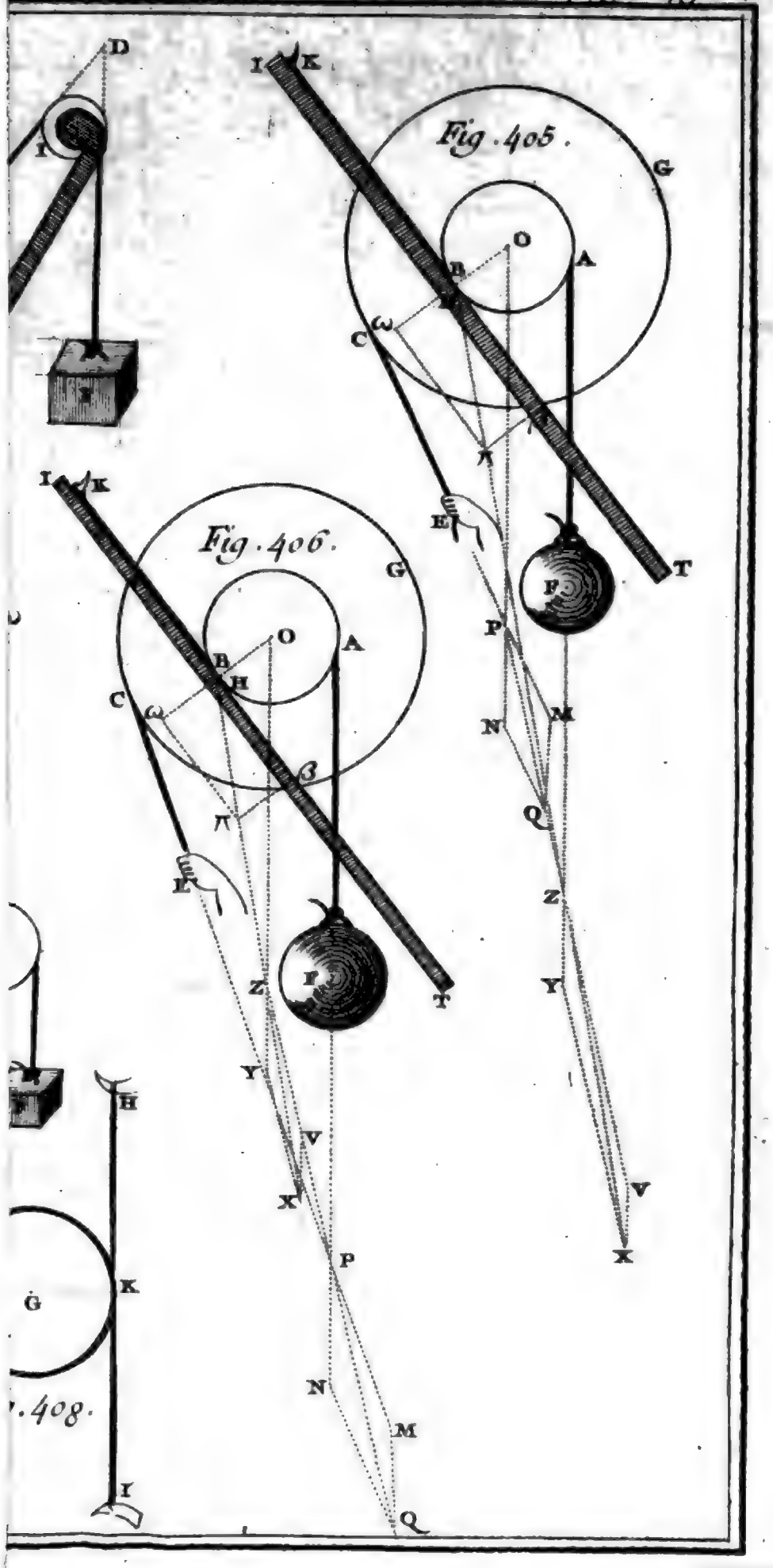
Digitized by Google

tout ce qu'il faut de forces à cette puiſſance pour l'élevation de ce levier, doit ſurpaſſer ce qu'il lui en faut pour l'abaiſſement de ce même levier, de plus de deux fois la reſiſtance des frottemens de ſa corde avec le rouleau G. 4°. Que dans l'élevation du levier LN la puiſſance L agiſſant contre la puiſſance E, de même que dans l'abaiſſement de ce levier, elle agit contre le poids F: & (toutes choſes d'ailleurs égales) cette puiſſance L employant des forces proportionnelles aux reſiſtances que ce poids & la puiſſance E lui font tour à tour; ce que cette puiſſance L employe de forces dans l'abaiſſement du levier LN, doit être à ce qu'elle en employe dans l'élevation de ce levier, comme le poids F (je ne compte point le frottement de la poulie D) eſt à ce même poids plus la reſiſtance des frottemens de ſa corde avec le rouleau G.

Il ne reſte plus qu'un mot à dire de la roideur des cables qui ſe doivent entortiller autour des rouleaux dont on ſe ſert ici. M. Perault prétend que *bien loin que la roideur que leur donne le poids qu'ils ſoûtiennent, repugne à leur pliement; il eſt vrai qu'au contraire plus le cable eſt étendu par la peſanteur du fardeau, & plus il a de diſpoſition à ſe plier. Car*, dit-il, *il faut conſiderer que, comme pour le pliement d'un cable il eſt neceſſaire que les parties qui ſont au côté où il ſe plie, s'acourciſſent, il eſt certain que ce qui diſpoſe ces parties à s'acourcir, diſpoſe le cable à ſe plier. Or il eſt évident que plus les parties ont été allongées, & plus elles demandent à s'acourcir, quand la cauſe qui les allongeoit vient à ceſſer; & c'eſt ce qui arrive aux parties qui ſont du côté vers lequel le cable ſe plie.* Au contraire, ces parties ne ceſſant point d'être tendues, n'ont nulle liberté de ſe racourcir pour ſe plier. Il eſt vrai que *la traction qui allongeoit les parties qui ſont depuis le fardeau, ou le point de ſuſpenſion juſqu'au rouleau, n'allonge plus celles qui ſont à l'entour de ce rouleau.* Mais auſſi cette traction durant toûjours, elle ne permet point non plus aux parties du cable qui ſont du côté de ſon rouleau, de ſe racourcir lorſqu'elles s'y appliquent: ainſi elles ne ceſſent point pour cela de de-

meurer toûjours également tendues. Ce n'eſt donc point parce que ces parties internes ſe racourciſſent d'elles-mêmes, que ce cable ſe plie autour de ſon rouleau, mais ſeulement parce qu'on l'y force en allongeant encore les parties externes, juſqu'à ce qu'elles puiſſent fournir à la convexité qu'elles doivent avoir pour cela; c'eſt-à-dire, en les allongeant encore de la difference du circuit de la baſe de leur rouleau, aux cercles qu'elles décrivent autour de lui. Il faut donc encore pour entortiller ces cables autour des rouleaux dont on ſe ſert icî, une nouvelle force d'autant plus conſiderable, que ces cables ſont naturellement plus roides, que le poids qu'ils ſoûtiennent les a déja plus tendus, qu'ils ſont d'un plus grand diamétre, & que celui de leur rouleau eſt plus petit. Je n'entre point dans un plus grand examen de cette force, de peur de me trop écarter. Paſſons à l'application de tout ce que je viens de dire.

APPLICATION


D
I
K
Fig. 405.
G
O
A
B
C
ω
E
T
F
P
N
M
Q
Z
Y
V
X
Fig. 406.
H
β
π
L
G
K
I
.408.

Digitized by Google

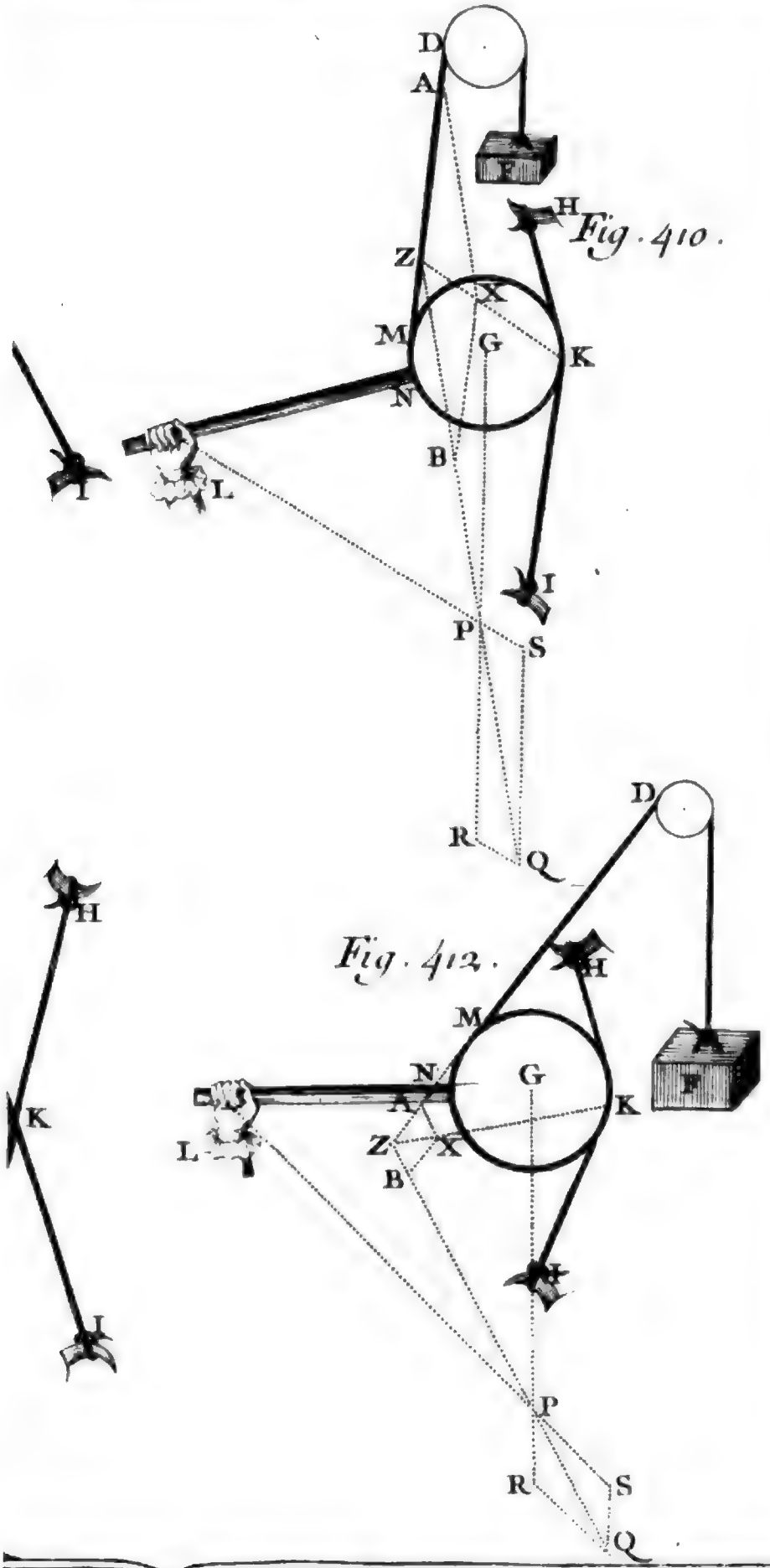
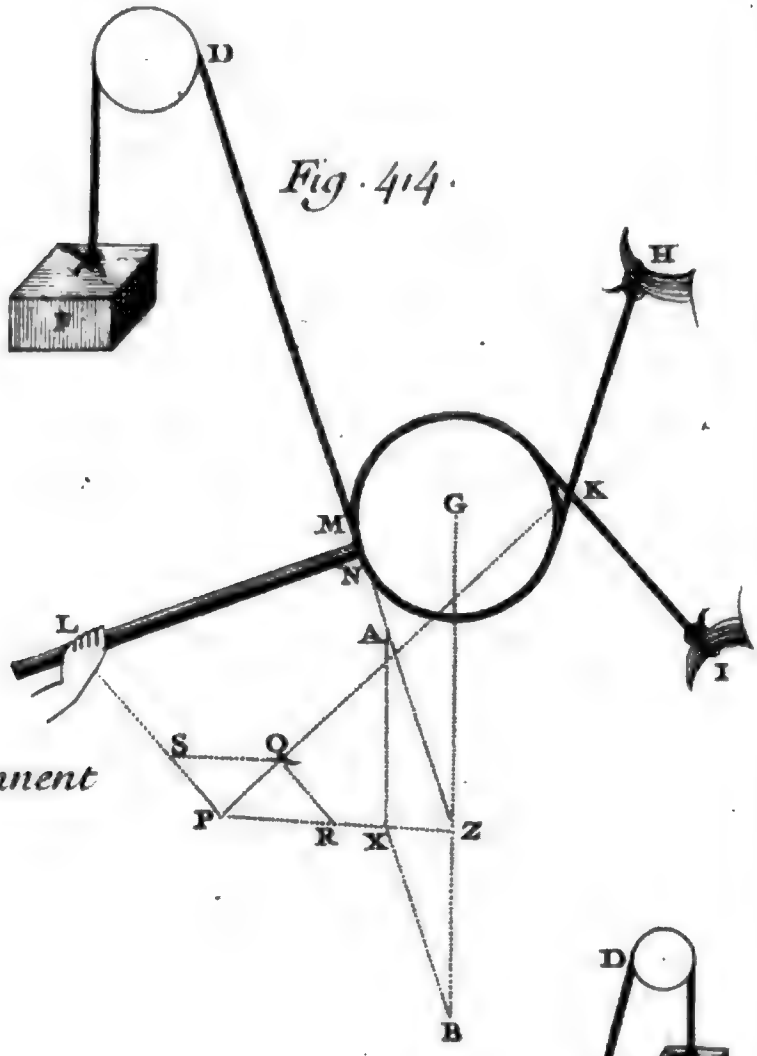


Fig. 410.

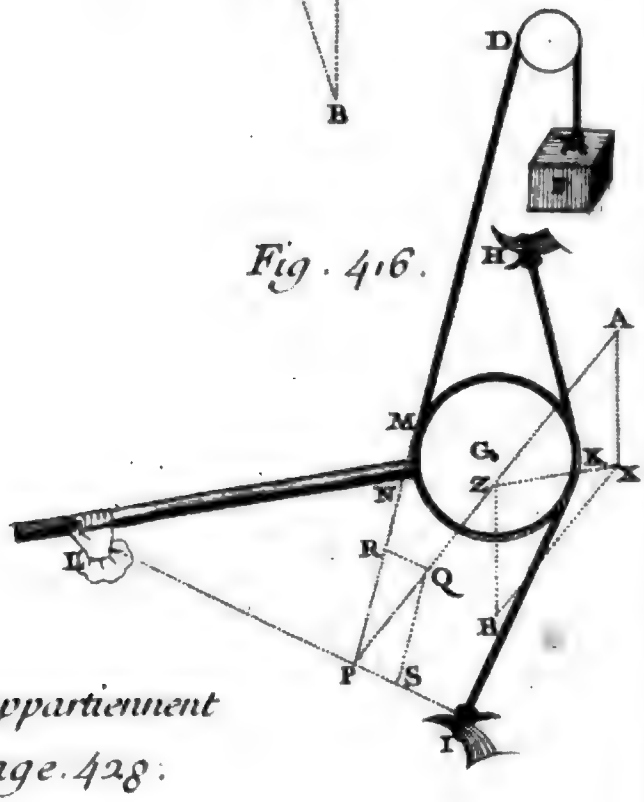
Fig. 412.

Fig. 414.



ppartiennent
426.

Fig. 416.



ns 415. et 416. appartiennent
position 7. page 428.

Digitized by Google

APPLICATION

DES PROPOSITIONS PRECEDENTES aux Machines ſans frottement, dont il eſt ici queſtion.

Comparaiſon de ces Machines avec elles-mêmes priſes à l'ordinaire.

JUſqu'ici je n'ai examiné ces Machines que par parties: en voici preſentement une toute entiere, dont l'examen ſervira de modéle, non ſeulement pour découvrir par les propoſitions précedentes ce qu'il faut de forces en tout ſur ces ſortes de Machines; mais encore pour en calculer des plus impliquées par la voye de la Nouvelle Mécanique. Fig. 417.

I.

Calcul de la dépenſe des forces qu'il faut employer ſur les Machines ſans frotement dont il eſt ici queſtion, ſuppoſé que les directions des poids concourent quelque part.

1°. Soit donc, ſi l'on veut, dans la Fig. 417. l'angle OPA fait par les directions OP & AP de la Machine CA & du poids F de 6'. l'angle de la corde AF ou de la direction AP avec l'horiſon de 89. 58'. l'angle de la corde CM avec l'horiſon de 50. deg. l'angle des bras de gruau VT avec l'horiſon de 60. deg. le poids F de 100 livres, la peſanteur de la Machine CA faite de la poulie CF, & de ſon rouleau HA, de 15 livres, le rayon CO de la poulie de 12 pouces; & le rayon OH de ſon rouleau de 2 pouces.

2°. Preſentement puiſque (*nomb.* 1.) l'angle de la corde CM ou CX avec l'horiſon, eſt de 50. deg. & que celui de la direction AP ou AX avec ce même horiſon eſt de 89. 58'. l'angle CXA doit être de 40. 2'. & CXP ou SXP de 139. 58'. Ainſi puiſque (*nomb.* 1.) l'angle APO

ou XPS eſt de 6′. l'on aura l'angle XSP ou CSO de 39°. 56′. Tirant donc le rayon OC par le point C, où la corde CM touche la poulie CA, l'on aura auſſi l'angle COS de 50. 4′. D'où l'on aura ces deux analogies : comme 64189. ſinus de l'angle CSO de 39. 56′. eſt à 76679. ſinus de ſon complement COS de 50. 4′. ainſi CO (*n.* 1.) de 12. pouces eſt à CS. Et comme 64189. ſinus de l'angle CSO de 39. 56′. à 100000. ſinus de l'angle droit OCS, ainſi CO (*Hyp.*) de 12. pouces à OS. Ce qui donnera CS de 14. pouces $\frac{11502}{64189}$, & OS de 18. pouces $\frac{14508}{64189}$.

3°. Après cela ſi l'on tire le rayon OA par le point A, où la corde FA touche le rouleau HA, l'angle OAP étant droit, & l'angle OPA étant (*n.* 1.) de 6′. l'on aura encore cette analogie : comme 147. ſinus de 6′. à 100000. ſinus total, ainſi OA (*n.* 1.) de 2. pouces à OP. Ce qui donnera OP de 1149. pouces $\frac{17}{87}$. L'on vient de trouver (*n.* 2.) OS de 18. pouces $\frac{14508}{64189}$; SP ſera donc de 1130. pouces $\frac{72904511}{6418944}$. De-là par cette analogie : comme 64323. ſinus de l'angle SXP, qu'on vient de voir (*n.* 2.) de 139. 58′. à 147. ſinus de l'angle XPS qu'on a ſuppoſé (*n.* 1.) de 6′. Ainſi SP de 1130. pouces $\frac{72904511}{6418944}$ à SX. Ce qui donnera SX de 2. pouces $\frac{2096875497517}{3398064447004}$.

4°. De plus prenant ſur les directions prolongées de la Machine CA & du poids F des parties PN & PM, qui ſoient entr'elles comme les peſanteurs de cette Machine & de ce poids, c'eſt-à-dire (*n.* 1.) comme 15. à 100. Et achevant le parallelogramme MN, dont la diagonale ſoit PQ qui prolongée vers D, rencontre la corde CM en Z, on aura les deux côtez PN & NQ du triangle PNQ entr'eux comme 15. à 100. avec l'angle PNQ de 179. 54′. Et par conſequent auſſi cette analogie : comme 115. ſomme des côtez PN & NQ à leur difference 85. Ainſi 8727. tangente de 37. moitié de la ſomme des angles NPQ & NQP à 6450 $\frac{7}{87}$ tangente de la moitié de leur differen-

ce. Ce qui donnera 2′. 11″. 21‴. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ajoûtée à 3′. moitié de la ſomme de ces angles, donnera 5′. 11″. 21‴. pour le plus grand NPQ ou SPZ, & 48″. 39‴. pour l'autre NQP ou XPZ. Ainſi puiſque l'on ſçait déja (*n.* 2.) que l'angle SXP ou ZXP eſt de 139. 58′. & que l'angle XSP ou ZSP eſt de 39. 56′. on aura encore XZP de 40. 1′. 11″. 21‴. & SZP de 139. 58′. 48″. 39‴.

5°. Preſentement à cauſe que ZX eſt à ZP comme 2358. ſinus de XPZ de (*n.* 4.) 48″. 39‴. eſt à 6432332. ſinus de ZXP de (*n.* 2) 139. 58′. Et que de plus ZP eſt à ZS comme 6418958. ſinus de ZSP de (*n.* 2.) 39. 56′. eſt à 15094. ſinus de SPZ de 5′. 11″. 21‴. l'on aura ZX à ZS, comme le produit de 2358. & 6418958. ſinus des angles XPZ & ZSP, au produit de 6432332. & 15094. ſinus des angles ZXP & SPZ. Ainſi diviſant SX, qu'on vient de trouver (*n.* 3.) de deux pouces $\frac{2096875497577}{3592054487044}$, en une telle raiſon ; l'on aura ZS de 2. pouces $\frac{4167828128295198519317856}{9180057013096658046271}$, c'eſt-à-dire, d'environ 2. pouces $\frac{4}{9}$. Ajoûtant donc 2. pouces $\frac{4}{9}$ à la valeur de CS, qu'on vient de trouver (*n.* 2.) de 14. pouces $\frac{2150}{6412}$, c'eſt-à-dire, encore d'environ 14. pouces $\frac{1}{3}$; l'on aura environ 16. pouces $\frac{7}{9}$ pour la valeur de CZ.

6°. D'ailleurs puiſque (*n.* 1.) l'angle de la corde CM avec l'horiſon eſt de 50. deg. & que celui des bras de gruau VT avec le même horiſon eſt de 60. deg. l'angle CMH, ou ſon égal HOC (je ſuppoſe HO perpendiculaire à VT) ſera de 10. deg. & dans le triangle OHC la ſomme des angles ſur la baſe HC, ſera de 170. degrez. Ainſi ayant (*n.* 1.) HO de 2. & OC de 12. pouces, l'on aura cette analogie : comme 14. ſomme des côtez HO & OC, ſont à la difference 10. de ces mêmes côtez, ainſi 1143005. tangente de 85. deg. moitié de la ſomme des angles OCH & OHC, eſt à 8164321. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 83. 1′. 1″. 4‴.

pour cette moitié de difference, laquelle moitié ſouſtraite de 85. moitié de la ſomme de ces angles, laiſſera 1. 58. 58″. 56‴. pour la valeur du plus petit HCO ; lequel ajoûté à l'angle droit OCZ, donnera 91. 58′. 58″. 56‴. pour la valeur de l'angle HCZ ; cette analogie : comme 3459. ſinus de l'angle HCO de 1. 58′ 58″. 56‴. au côté HO de 2. pouces, ainſi 17364. ſinus de l'angle HOC de 10. deg. au côté HC, donnera HC de 10. pouces $\frac{1258}{3459}$.

7°. Ainſi puiſque l'on a déja (*n.* 5.) 16. pouces $\frac{7}{9}$ pour la valeur de CZ, & que l'angle HCZ de (*n.* 6.) 91. 58′. 58″. 56‴. laiſſe 88. 1′. 1″. 4‴. pour la ſomme des angles CHZ & CZH, l'on aura encore cette analogie : comme 26. pouces $\frac{2545}{3131}$. ſomme des côtez CH de (*n.* 6.) 10. pouces $\frac{1258}{3459}$. & CZ de (*n.* 5.) 16. pouces $\frac{7}{9}$ eſt à $6\frac{2397}{3131}$. leur difference ; ainſi 96597. tangente de 44. 0′. 30″. 34‴. moitié de la ſomme des angles CHZ & CZH, à 242333/4. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 13. 37′. 40″. 29‴. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ſouſtraite de 44. 0′. 30″. 34‴. moitié de la ſomme de ces angles, laiſſera 30. 22′. 50″. 5‴. pour la valeur du plus petit CZH : d'où l'on aura encore HZD de 9. 38′. 21″. 16‴. puiſque l'on vient de voir (*n.* 4.) CZD ou XZP de 40. 1′. 11″. 21‴.

8°. L'on aura donc par ce moyen les quatre angles DZH de (*n.* 7.) 9. 38′. 21″. 16‴. CZH de (*n.* 7.) 30. 22′. 50″. 5‴. OPA de 6′. & OPD ou SPZ de (*n.* 4.) 5′. 11″. 21‴. avec leurs ſinus 16744. 50574. 174. & 150. Ainſi puiſque (*prop.* 1. *n.* 4.) le poids F eſt à la puiſſance, qui appliquée, ſi l'on veut, en R, le ſoûtiendroit avec la corde CR ou CM, comme le produit des ſinus des angles CZH & OPD, au produit des ſinus des angles DZH & OPA, c'eſt-à-dire ici, comme 7586100.

à 2913456. le poids F étant (*n.* 1.) de 100 livres, cette puiſſance en R ſeroit de 38 livres $\frac{10728}{75861}$.

9°. Soit encore au pied de la grue le rouleau G d'une direction BY perpendiculaire à l'horiſon, & entortillé, comme aux propoſitions 5.6.&7. dans la corde IKMNKH, dont les extrêmitez HK & IK faſſent avec l'horiſon des angles de 62. & de 58. deg. Que le levier LN de ce rouleau ſoit, ſi l'on veut, incliné à l'horiſon de 8. deg. & que la puiſſance L lui ſoit appliquée ſuivant une ligne Lβ, qui faſſe avec le levier LN un angle de 82. deg. Enfin que le rouleau G (j'y comprends auſſi ſon levier) ſoit de 5 livres, le diamétre de ce rouleau de 4 pouces, & le levier LN de 10 pouces.

10°. Cela étant, l'on aura l'angle GBM de 40. degrez; puiſque (*n.* 1.) BM eſt incliné de 50. deg. à l'horiſon, auquel on ſuppoſe (*n.* 9.) que GB eſt perpendiculaire. Tirant donc le rayon GM par le point M où la corde BM touche le rouleau G, l'angle GMB étant droit, l'on aura cette analogie : comme 64278. ſinus de l'angle GBM de 40. deg. au rayon GM (*n.* 9.) de 2. pouces, ainſi 100000. ſinus de l'angle droit GMB eſt à GB. Ce qui donnera 3. pouces $\frac{11813}{12119}$. pour la valeur de GB.

11°. De plus puiſque (*n.* 9.) les parties de corde HK & IK font avec l'horiſon des angles de 62. & de 58. deg. l'angle HKI qu'elles font entr'elles, ſera de 176. deg. Ainſi tirant GK du centre G au point K, où ces cordes prolongées concourent, l'on aura les angles GKI & GKH de chacun 88. deg. Tirant donc encore le rayon Gϖ par le point ϖ, où la corde IK touche le rouleau G, l'angle GϖK étant droit, on aura cette analogie : comme 99939. ſinus de l'angle GKϖ de 88. deg. au rayon Gϖ (*n.* 9.) de 2. pouces, ainſi 100000. ſinus de l'angle droit GϖK au côté GK. Ce qui donnera 2. pouces $\frac{61}{49966}$. pour la valeur de GK.

12°. D'ailleurs (*n.* 9.) l'angle de la corde IK avec l'ho-

riſon étant de 58. deg. & BY étant perpendiculaire à l'horiſon, l'angle KYG ſera de 32. deg. l'on vient de voir (*n.* 11.) que l'angle GKY eſt de 88. deg. Il faut donc que l'angle KGB, qui eſt égal à ces deux pris enſemble, ſoit de 120. deg. Ce qui donnera 60. deg. pour la ſomme des angles GKB & GBK: ainſi puiſque l'on connoît déja les côtez GB (*n.* 10.) de 3. pouces $\frac{15811}{52199}$. & GK (*n.* 11.) de 2. pouces $\frac{61}{49966}$. qui leur ſont oppoſez dans le triangle KGB, l'on aura cette analogie: comme 5 pouces $\frac{180988657}{180518757374}$. ſomme des côtez GB & GK, à leur difference 1. pouce $\frac{177067699}{180518757374}$. c'eſt-à-dire, ſans beaucoup s'éloigner de la préciſion, comme 5 $\frac{1}{180}$. à 1 $\frac{1}{180}$. ainſi 57735. tangente de 30. deg. moitié de la ſomme des angles GKB & GBK à 12364 $\frac{11}{61}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera environ 7. 3'. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ôtée de 30. deg. laiſſera 22. 57'. pour la valeur du plus petit angle GBK.

13°. De-là par cette analogie: comme 38992. ſinus de l'angle GBK (*n.* 12.) de 22. 57'. au côté GK (*n.* 11.) de 2. pouces $\frac{61}{49966}$. ainſi 86602. ſinus de l'angle KGB (*n.* 12.) de 120. degrez à KB; l'on aura 3. pouces $\frac{3111110960}{4870960013}$. c'eſt-à-dire, quaſi 4. pouces pour la valeur de KB.

14°. Après avoir ainſi trouvé la valeur de KB & de l'angle GBK, ſoient priſes ſur la corde CM, & ſur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG, qui ſoient entr'elles comme la puiſſance de 38 liv. $\frac{19795}{51861}$. qu'on vient de voir (*n.* 8.) neceſſaire pour retenir ici le poids F avec la ſeule corde CR, eſt au poids du rouleau G, qu'on ſuppoſe (*n.* 9.) de 5. livres; & ache-

vant le parallelogramme RG, ſoit la diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction Lβ de la puiſſance L. Cela fait, puiſque (*n.* 10.) l'angle GBM eſt de 40. deg. l'angle GBR ſera de 140. deg. Ainſi, puiſque les paralleles BG & RY rendent les deux angles RYB & RBY pris enſemble égaux à l'angle GBR, leur ſomme ſera auſſi de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY, comme 38 $\frac{10798}{71861}$. & 5. avec 140. deg. pour la ſomme des angles RYB & RBY, qui leur ſont oppoſez; & par conſequent l'on aura auſſi cette analogie: comme 43 $\frac{10798}{71861}$. ſomme des côtez RB & RY à leur difference 33 $\frac{10798}{71861}$. Ainſi 174747. tangente de 70. deg. moitié de la ſomme des angles RYB & RBY à 208829 $\frac{244003}{1131181}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 64. 24′. 43″. 44‴. pour cette moitié de difference; laquelle moitié étant ajoûtée à 70. deg. moitié de la ſomme des angles RYB & RBY, donnera 134. 24′. 43″. 44‴. pour la valeur du plus grand RYB ou de ſon égal YBG. D'où l'on aura l'angle GBβ de 45. 35′. 16″. 16‴. lequel ajoûté à l'angle GBK, qu'on vient de trouver (*n.* 12.) de 22. 57′. donnera 68. 32′. 16″. 16‴. pour la valeur de tout l'angle KBβ.

15°. L'on voit (*n.* 14.) que l'angle GBω eſt de 45. 35′. 16″. 16‴. L'on voit auſſi que l'angle BGω doit être de 82. deg. puiſque (*n.* 9.) BG eſt perpendiculaire à l'horiſon, & que le levier LN n'eſt incliné à l'horiſon que de 8. deg. L'on aura donc encore l'angle BωG de 52. 24′. 43″. 44‴. Ainſi puiſque l'on a déja (*n.* 10.) le côté GB de 3. pouces $\frac{1183}{12109}$. l'on aura auſſi ces deux analogies tout à la fois: comme 79241. ſinus de l'angle BωG de 52. 24′. 43″. 44‴. au côté GB de (*nomb.* 10.) 3. pouces $\frac{1183}{12109}$. Ainſi 71432. ſinus de l'angle GBω de 45. 35′. 16″. 16‴. au côté Gω; ainſi encore 99026. ſinus

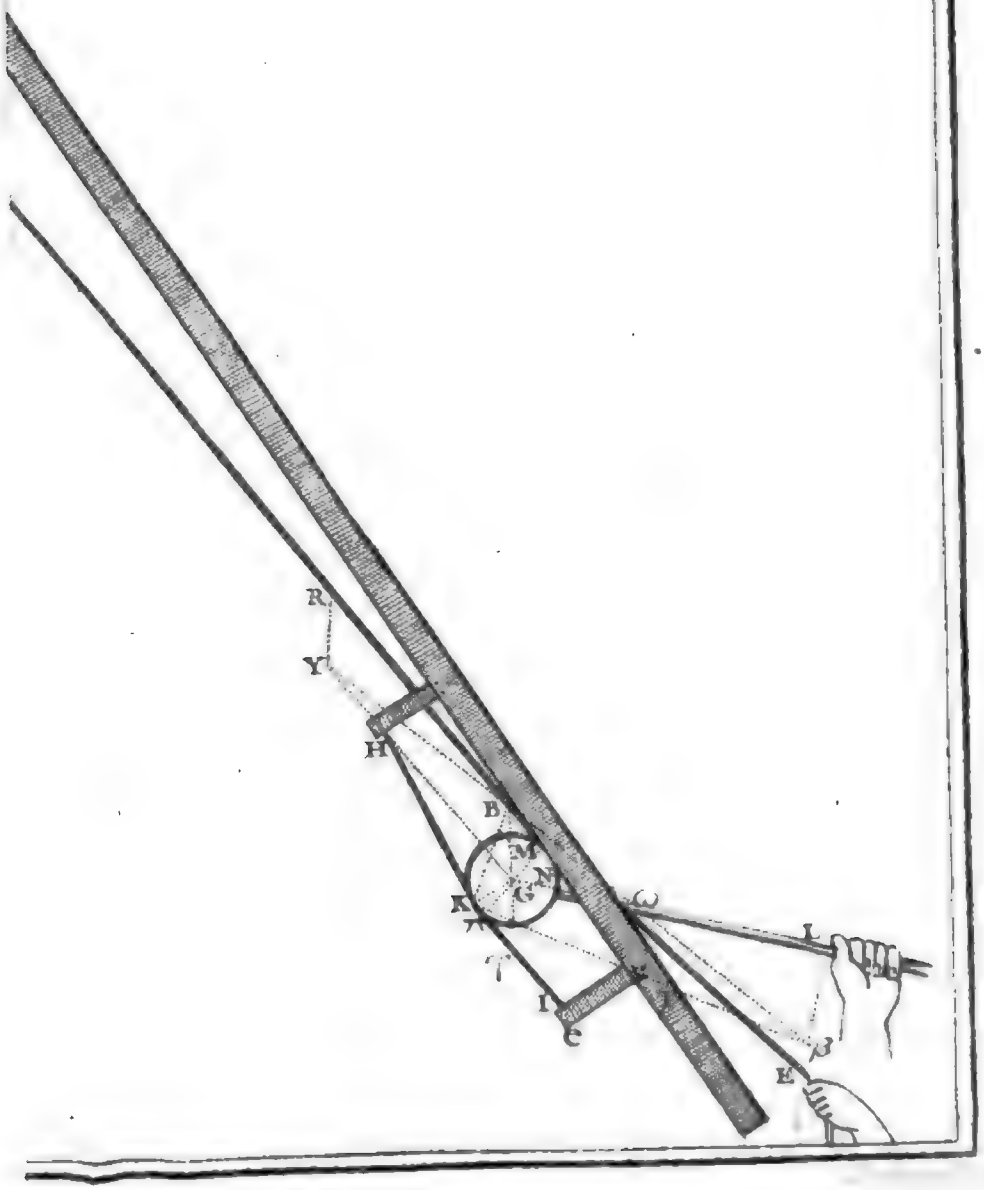
de l'angle BGω de 82. deg. au côté Bω. Ce qui donnera 2. pouces $\frac{2051097843}{2551480959}$. pour la valeur de Gω, & 3. pouces $\frac{2267921803}{2551480959}$. pour celle de Bω; c'eſt-à-dire, ſans beaucoup s'éloigner de la préciſion, 3. pouces pour la valeur de Gω, & 4. pouces pour celle de Bω.

16°. De ce que Gω eſt de 3. pouces, puiſque GL (n. 9.) eſt de 12. pouces, ωL ſera de 9. pouces; & de ce que l'angle BωG ou βωL eſt (n. 15.) de 52. 35'. 16". 16"'. l'angle βLω étant (n. 9.) de 82. deg. l'angle Lβω ſera de 45. 35'. 16". 16"'. Ayant donc le côté ωL de 9. pouces, l'on aura encore cette analogie: comme 71432. ſinus de l'angle Lβω de 45. 35'. 16". 16"'. au côté ωL de 9. pouces: ainſi 99026. ſinus de l'angle βLω de 82. deg. au côté ωβ. Ce qui donnera ωβ de 12 pouces $\frac{5}{7}\frac{40510}{14432}$. c'eſt-à-dire, encore d'environ 12. pouces $\frac{1}{2}$. qui avec 4. pouces valeur (n. 15.) de Bω, feront 16. pouces $\frac{1}{2}$. pour celle de toute la ligne Bβ.

17°. De-là, puiſque l'on a d'ailleurs le côté KB (n. 15.) de 4. pouces avec l'angle KBβ de 68. 32'. 16". 16"'. c'eſt-à-dire, 111. 27'. 43". 44"'. pour la ſomme des angles BKβ & BβK, qui ſont ſur la baſe Kβ du triangle KBβ; l'on aura encore cette analogie: comme 20 $\frac{1}{2}$. ſomme des côtez Bβ & KB, à 12 $\frac{1}{2}$. leur difference, ainſi 146764. tangente de 55. 43'. 51". 52"'. moitié de la ſomme des angles BKβ & BβK, à 89490 $\frac{10}{41}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 41. 49'. 31". 58"'. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ſouſtraite de 55. 43'. 51". 52"'. moitié de la ſomme des angles BKβ & BβK, laiſſera 13. 54'. 19". 54"'. pour la valeur du plus petit BβK, lequel joint à l'angle Lβω (n. 16.) de 45. 35'. 16". 16"'. donnera 59. 29'. 36". 10"'. pour la valeur de tout l'angle KβL.

18°. L'on aura donc encore par ce moyen les quatre angles

Fig. 417.



angles KβB (*n.* 17.) de 13. 54′. 19″. 54‴. KβL (*n.* 17.) de 59. 29′. 36″. 10‴. GBM (*n.* 10.) de 40. deg. & GBβ (*n.* 14.) de 45. 35′. 16″. 16‴. avec leurs ſinus 24031 $\frac{1111}{1800}$, 86156 $\frac{60}{180}$, 64278, & 71431 $\frac{55}{75}$. Ainſi puiſque l'impreſſion que le poids F fait ſuivant la corde CM contre la puiſſance L, eſt égale à la puiſſance qu'il faudroit en R pour le ſoûtenir avec cette corde ſeule, & que d'ailleurs en cas d'équilibre (*prop.* 6. *n.* 2.) cette impreſſion eſt à la puiſſance L, (je ſuppoſe que la puiſſance E ne ſert alors qu'à empêcher que la corde CMNϖME ne gliſſe ſur le rouleau G) comme le produit des ſinus des angles KβL & GBβ au produit des ſinus des angles KβB & GBM; la puiſſance qu'il faudroit en R pour ſoûtenir le poids F avec la ſeule corde CM eſt auſſi à la puiſſance L, comme le produit des ſinus des angles KβL & GBβ au produit des ſinus des angles KβB & GBM, c'eſt-à-dire ici, comme 747, 520, 045, 047, 657. à 187, 680, 905, 132, 445. Cette puiſſance R étant donc ici (*n.* 8.) de 38 liv. $\frac{10788}{75861}$; la puiſſance L ſera dans ce cas de 9 liv. $\frac{1066256094532882641 7}{5070761813736030767 7}$. c'eſt-à-dire, d'un peu plus que de 9 liv. $\frac{1}{8}$.

II.

Calcul de la dépenſe des forces qu'il faut employer ſur les Machines ſans frotement dont il eſt ici queſtion, ſuppoſé que les lignes de directions des poids ſoient paralleles entr'elles.

1°. Telle eſt la maniere de calculer la valeur de la puiſſance L pour tous les cas où les directions OP & AP de la machine CA & du poids F feroient quelque angle entre-elles. Voici preſentement pour le cas où ces directions ſeroient paralleles entr'elles, & toutes deux perpendiculaires à l'horiſon, comme on le ſuppoſe ordinairement.

2°. Soient donc Hρ & Hλ paralleles aux lignes CO & OA. De-là, & de ce que CO eſt perpendiculaire en C à Mρ, & que l'angle HCO eſt (*n.* 6. *art.* 1.) de 1. 58′. 58″. 56‴. il ſuit que l'angle HρC eſt droit, & que l'angle HCρ eſt de 88. 1′. 1″. 4‴. Ce qui fait que par l'analogie des ſinus de ces angles avec les côtez qui leur ſont

oppoſez dans le triangle HCρ, ſon côté HC de (*n.* 6. *a.* 1.) 10. pouces $\frac{138}{3459}$. donne Hρ de 10. pouces $\frac{7921770}{17284603}$. c'eſt-à-dire, d'environ 10. pouces $\frac{1}{24}$.

3°. D'ailleurs puiſque le bras de gruau VT fait (*n.* 1. *a.* 1.) avec l'horiſon auquel OS eſt perpendiculaire, un angle de 60. deg. HO étant perpendiculaire à ce bras de gruau, l'angle HOμ ſera de 60. degr & l'angle HμO ſera droit. Ce qui, ſelon HO de (*n.* 1. *a.* 1.) 2. pouces, donnera Hμ de 1 pouce $\frac{71304}{100000}$.

4°. De plus puiſque les directions AX & OS du poids F & de la machine CA paſſent ici pour paralleles, DZ celle de leur impreſſion commune ſera non ſeulement auſſi parallele à ces lignes, mais encore elle diviſera en D le rayon OA, en ſorte que OD ſoit à DA, comme le poids F à la peſanteur de la machine CA, c'eſt-à-dire (*n.* 1. *a.* 1.) comme 100. à 15. Ce qui, ſelon OA de (*n.* 1. *art.* 1.) 2. pouces, fera OD, & par conſequent auſſi ſon égale μr de 1. pouce $\frac{17}{25}$.

5°. Ajoûtant donc Hμ de (*n.* 3.) 1. pouce $\frac{71304}{100000}$. avec μr de (*nomb.* 4.) 1. pouce $\frac{17}{25}$. l'on aura Hr de 3. pouces $\frac{10821621}{25000000}$. c'eſt-à-dire, d'environ 3. pouces $\frac{1}{2}$. Et parce que Hρ de (*n.* 2.) 10. pouces $\frac{1}{24}$. & Hr de 3. pouces $\frac{1}{2}$ ſont les ſinus des angles CZH & DZH; & que OD & DA de (*n.* 4.) 1. pouce $\frac{17}{25}$. & 2. pouces, ſont auſſi les ſinus des angles OPD & OPA, que le paralleliſme ſuppoſé des lignes OS, DZ, & AX, qu'on ſuppoſe ici, rend infiniment aigus: le produit des ſinus des angles CZH & OPD ſera au produit des ſinus des angles DZH & OPA, comme $17\frac{25}{69}$ à 7. Ainſi puiſque le poids F eſt (*prop.* 1. *n.* 4.) à la puiſſance qui appliquée ſuivant CM, le ſoûtiendroit

avec cette corde ſeule, comme le premier de ces produits au ſecond ; ce poids étant (*n.* 1. *a.* 1.) de 100 livres, cette puiſſance ſera de 40 liv. $\frac{20}{241}$.

6°. La valeur de cette puiſſance reviendra encore la même en prenant à l'ordinaire ρH, pour un levier dont l'appui eſt en H, & qui a un poids de 115 livres perpendiculairement appliqué à ſon extrêmité, par où la direction DZ de l'impreſſion commune à la peſanteur de la machine CA de 15 livres, & au poids F de 100 livres, paſſe d'une force, qui dans ce cas des directions OS & AX ſuppoſées paralleles eſt égale à la ſomme de ces peſanteurs ; car ce poids de 115 livres étant à cette puiſſance comme Hρ de (*n.* 2.) 10. pouces $\frac{1}{24}$. à Hρ de (*n.* 5.) 3. pouces $\frac{1}{4}$. l'on aura encore 40. liv. $\frac{20}{241}$. pour la valeur de cette puiſſance.

7°. Preſentement pour avoir la valeur de la puiſſance L dans le cas preſent, ſoient priſes ſur la corde CM, & ſur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B, où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG qui ſoient entr'elles comme la puiſſance de 40. livres $\frac{20}{241}$. qu'on vient de voir (*n.* 5. *&* 6.) neceſſaire pour retenir le poids F avec la ſeule corde CR, eſt au poids du rouleau G, qu'on ſuppoſe (*n.* 9. *a.* 1.) de 5. livres ; & achevant le parallelogramme RG, ſoit ſa diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction Lβ de la puiſſance L. Cela fait, puiſque (*n.* 10. *a.* 1.) l'angle GBM eſt de 40. deg. l'angle GBR ſera de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY, comme 40. livres $\frac{20}{241}$. & 5. avec 140. deg. pour la ſomme des angles RYB & RBY, qui leur ſont oppoſez ; & par conſequent l'on aura auſſi cette analogie : comme 45 $\frac{20}{241}$. ſomme des côtez RB & RY à leur difference 35 $\frac{20}{241}$. Ainſi 274747. tangente de 70. deg. moi-

tié de la ſomme des angles RYB & RBY à 214001 $\frac{1006}{2971}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 64. 57′. 14″. 13‴. pour cette moitié de difference, laquelle moitié étant ajoûtée à 70. deg. moitié de la ſomme des angles RYB & RBY, donnera 134. 57′. 14″. 13‴. pour la valeur du plus grand RYB, ou de ſon égal YBG. D'où l'on aura l'angle GBβ de 45. 2′. 45″. 47‴. lequel ajoûté à l'angle GBK, que l'on a trouvé (*n.* 12. *a.* 1.) de 22. 57′. donnera 67. 59′. 45″. 47‴. pour la valeur de l'angle KBβ.

8°. Cet angle étant preſque le même que dans le nombre 14. de l'article 1. où on l'a vû de 68. 32′. 16″. 16‴. & toutes choſes d'ailleurs étant égales, le produit des ſinus des angles Kβλ & GBβ ſera encore ici au produit des ſinus des angles KβB & GBM environ comme (*n.* 18. *a.* 1.) 7475200450476 57. à 1876809051324 45. Ainſi puiſque l'impreſſion de 40. livres $\frac{20}{241}$. que fait ici (*n.* 5. *&* 6.) le poids F joint à la peſanteur de la machine CA, ſuivant la corde CM contre la puiſſance L, eſt en cas d'équilibre à cette puiſſance L (*prop.* 6. *n.* 2.) comme le premier de ces produits au ſecond; cette puiſſance L ſera ici d'environ 10. livres $\frac{1147481521457829 60}{1801523308564846 14}$. c'eſt-à-dire, d'un peu plus de 10. livres.

III.

Comparaiſon des machines ſans frottemens, dont il eſt ici queſtion avec elles-mêmes priſes à l'ordinaire.

1°. Voyons preſentement ce qu'il faudroit de forces en L ſuivant Lβ dans l'uſage ordinaire où la machine CA & le rouleau G ne tournent que ſur leurs centres fixes O & G. En ce cas il eſt clair que la puiſſance qu'il faudroit, par exemple, en R pour ſoûtenir le poids F, ſeroit à ce poids, (je n'y compte point les frottemens) comme le rayon AO du rouleau HA au rayon CO de la poulie CF; c'eſt-à-dire ici (*n.* 1. *a.* 1.) comme 2. à 12. Ainſi ce poids étant (*n.* 1. *a.* 1.) de 100. livres, cette puiſſance

ne ſeroit jamais que de 16 livres $\frac{2}{3}$; au lieu qu'en évitant les frottemens, elle ſeroit ici de 38. liv. $\frac{2078}{7561}$. (*n.* 8. *a.* 1.) dans le cas où les directions OP & AP ſeroient entr'elles un angle OPA de 6'. & de 40. livres $\frac{20}{241}$. & (*n.* 5. *&* 6. *art.* 2.) de 40. livres $\frac{20}{241}$. dans celui où ces directions ſeroient paralleles entr'elles, & toutes deux perpendiculaires à l'horiſon. C'eſt déja dans le premier cas près de 22. livres, & dans le ſecond près de 23. livres $\frac{1}{2}$. qu'il en coûte pour les frottemens qu'on y ſauve, comme ſi ces frottemens pouvoient faire près d'une fois & demi autant de réſiſtance que le poids F, qu'on voit n'en faire alors pour ſa part que 16 $\frac{2}{3}$. à la puiſſance qui lui ſeroit appliquée ſuivant CR.

2°. De plus puiſque le poids F ainſi appliquée à la machine CA mobile ſeulement autour de ſon centre fixe, ne tire la corde CM (*n.* 1.) que d'une force de 16 $\frac{2}{3}$. la puiſſance L, qui appliquée au levier LN ſoûtiendroit ce poids à l'aide du rouleau G, mobile ſeulement auſſi autour de ſon centre G, devroit être à cette réſiſtance de 16 livres $\frac{2}{3}$. (je n'y comprends point encore les frottemens) comme le rayon de ce rouleau à la perpendiculaire tirée de ſon centre G ſur la direction Lβ de cette puiſſance ; c'eſt-à-dire, puiſque (*n.* 9. *a.* 1.) ce rayon eſt de 2. pouces, ce levier de 10. & l'angle NLβ de 82. deg. comme 2. à 11 $\frac{110}{133}$. Ce qui donneroit alors 2. livres $\frac{2587}{4456}$. pour la valeur de la puiſſance L. 2. livres $\frac{2587}{4456}$ de réſiſtance eſt donc toute la part que le poids F peut avoir à ce que la puiſſance L en ſentiroit dans l'uſage ordinaire de la poulie CA & du rouleau G ; & le ſurplus doit être compté pour les frottemens que cette poulie & ce rouleau ſouffriroient dans ce dernier uſage. L'on vient

de voir (*n.* 18. *a.* 1. *&* *n.* 8. *a.* 2.) qu'en les ſauvant à la maniere de M. Perault, ce que cette puiſſance L y trouve de réſiſtance dans les circonſtances preſentes, eſt d'environ 9 livres $\frac{1}{2}$, ou 10 livres, c'eſt-à-dire, plus de triple de ce que le poids F lui en feroit pour ſa part dans l'uſage ordinaire de la poulie CA & du rouleau G ; il faudroit donc pour y gagner quelque choſe, & même il faudroit, pour n'y rien perdre, que dans ce dernier uſage la réſiſtance des frottemens fût plus que double de celle du poids F. Ce que l'on aura ſans doute bien de la peine à ſe perſuader.

3°. Mais l'inconvenient en paroîtra encore plus grand, ſi l'on fait réfléxion que lorſqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir repriſe, il faut encore plus de forces dans la puiſſance L qu'il ne lui en a fallu pour l'abaiſſer. La démonſtration s'en tire de ce que par l'article 4. de la pénultiéme réfléxion qui ſuit la démonſtration de la propoſition 7. Ce que la puiſſance L employe de forces dans l'abaiſſement du levier LN doit être à ce qu'elle en employe dans l'élevation de ce levier, comme la réſiſtance que lui fait le poids F pour ſa part ſuivant la corde CM, eſt à cette même réſiſtance plus celle des frottemens de cette même corde avec le rouleau G. Et qui pis eſt encore, ces frottemens ſont d'autant plus conſiderables, ſelon M. Perault lui-même, qu'il ne demande que très-peu de forces à la puiſſance E pour empêcher ſa corde de gliſſer ſur le rouleau G ; c'eſt-à-dire, ſuivant l'article 1. de la réfléxion que je viens de citer, que très-peu de difference de la réſiſtance de ces frottemens à celle que le poids F fait ſuivant CM.

4°. Je ne parle point ici de la force qu'on voit par l'art. 1. de la ſeconde réfléxion qui ſuit la démonſtration de la propoſition 7. qu'il faudroit à la puiſſance E, lorſqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir repriſe, parce que M. Perault l'a ingenieuſement ſuppléé par une machine qu'il appelle *Main*, au travers de laquelle paſſe la

Digitized by Google

corde que l'on voit ici tenir à la puiſſance E, & qui la retient ſans qu'il en coûte aucunes forces. Je ne dis rien non plus de ce qu'il faudroit de forces à cette même puiſſance E pour dans l'abaiſſement du levier LN, empêcher ſa corde de gliſſer ſur le rouleau G; parce qu'on la peut encore ſuppléer par un poids ſuſpendu à l'extrêmité de ſa corde, & égal à ce qu'elle doit avoir de forces; c'eſt-à-dire, par l'article 1. de la pénultiéme réfléxion qui ſuit la démonſtration de la propoſition 7. égal à la difference qui eſt entre la réſiſtance que le poids F fait ſuivant la corde CM, & celle du frottement de cette corde avec le rouleau G. Je paſſe auſſi la peſanteur du rouleau G, qui au lieu d'aider comme en abaiſſant le levier LN, nuit lorſqu'il le faut relever. Je paſſe même ce que la roideur des cables qui ſe doivent entortiller autour des rouleaux dont on ſe ſert ici, demande encore de forces, de peur de m'engager dans une diſcuſſion qui me menât trop loin.

IV.

De quel ſecours il ſeroit de ſauver par un contre-poids la peſanteur de la roue & du rouleau qui doivent monter avec le poids dans les machines ſans frotement dont il eſt ici queſtion.

1°. Ce que l'on peut oppoſer à ces inconveniens, c'eſt que la peſanteur de la roue CF & de ſon rouleau HA, qu'on compte ici, ſe peut ſauver comme M. Perault l'a fait à la Machine ſans frottement qu'il a inſerée dans l'art. 4. de ſes Notes ſur le chap. 5. liv. 10. de ſa Traduction de Vitruve. Mais ce remede, ſans même entrer dans les inconveniens qui lui ſont encore particuliers, n'eſt que d'un très-petit ſecours. L'on en jugera par ce qui ſuit.

2°. L'on a vû (*n.* 3. *a.* 2. que Hμ eſt d'un pouce $\frac{73204}{100000}$. & parce que (*Hyp.*) Oλ eſt un parallelogramme, & que (*n.* 1. *a.* 1.) OA eſt de 2. pouces; μλ eſt auſſi de 2. pouces. Ainſi Hλ eſt de 3. pouces $\frac{73204}{100000}$. c'eſt-à-dire, d'environ 3. pouces $\frac{7}{10}$. Puiſque donc Hρ eſt (*n.* 2. *a.* 2.) de 10. pouces $\frac{1}{24}$. & que le poids F eſt à la puiſſance qu'il faudroit ſur la corde CM pour demeurer contre lui ſeul en équilibre ſur le point H, comme Hρ a Hλ, cette puiſſan-

ce ſeroit encore, ſans compter la peſanteur de la machine CA, de 34. livres $\frac{286}{341}$.

3°. Préſentement pour avoir la valeur de la puiſſance L dans le cas préſent, ſoient priſes ſur la corde CM, & ſur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG, qui ſoient entr'elles comme la puiſſance de 34 livres $\frac{286}{341}$. qu'on vient de voir (*n.* 2.) neceſſaire pour ſoûtenir ici le poids F avec la ſeule corde CR, eſt au poids du rouleau G, qu'on ſuppoſe (*n.* 9. *a.* 1.) de 5. livres; & achevant le parallelogramme RG, ſoit ſa diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction Lβ de la puiſſance L. Cela fait, puiſque (*n.* 10. *a.* 1.) l'angle CBM eſt de 40. deg. l'angle GBR ſera de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY comme 34 livres $\frac{286}{341}$. & 5. avec 140. deg. pour la ſomme des angles RYB & RBY, qui leur ſont oppoſez; & par conſequent l'on aura auſſi cette analogie: comme 39. livres $\frac{286}{341}$. ſomme des côtez RB & RY à leur difference 29 $\frac{286}{341}$. ainſi 274747. tangente de 70. deg. moitié de la ſomme des angles RYB & RBY à 205266 $\frac{515}{1717}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 64. 1′. 33″. 55‴. pour cette moitié de difference, laquelle moitié étant ajoûtée à 70. deg. moitié de la ſomme des angles RYB & RBY, donnera 134. 1′. 33″. 55‴. pour la valeur du plus grand RYB, ou de ſon égal YGB: d'où l'on aura l'angle GBβ de 45. 58′. 26″. 5‴. lequel ajoûté à l'angle GBK, que l'on a trouvé (*n.* 12. *a.* 1.) de 22. 57′. donnera 68. 55′. 26″. 5‴. pour la valeur de l'angle KBβ.

4°. Cet angle étant preſque le même que dans le nombre 14. de l'article 1, où on l'a trouvé de 68. 32′. 16″. 16‴. & toutes choſes d'ailleurs étant égales, le produit des

des ſinus des angles KβA & GBβ, ſera encore ici au produit des ſinus des angles KβB & GBM environ comme (*nomb.* 18. *art.* 1.) 747520045047657 à 187680905132445. Ainſi puiſque l'impreſſion de 34 livres $\frac{286}{341}$ que fait ici (*nomb.* 2.) le ſeul poids F ſuivant la corde CM contre la puiſſance L, eſt en cas d'équilibre à cette puiſſance L (*prop.* 6. *n.* 2.) comme le premier de ces produits au ſecond; cette puiſſance ſera encore ici d'environ 8 livres $\frac{190413447007343138304}{254904133146[illegible]10240}$; ou, ce qui revient preſqu'au même, d'environ 8 livres $\frac{3}{4}$. quoique l'on n'y compte point la peſanteur de la roue CF & de ſon rouleau BA.

5. Le poids F ſera donc encore ici contre la puiſſance L près du triple de ce qu'il lui feroit de reſiſtance pour ſa part dans l'uſage ordinaire, où l'on a vû (*n.* 3. *art.* 3.) que la machine CA & le rouleau G tournant ſur leurs centres fixes, la reſiſtance de ce poids contre cette puiſſance ne feroit que de 2 livres $\frac{258766}{445017}$. Il faudroit donc encore, même pour ne rien perdre à ſauver les frottemens, comme fait M. Perault, que dans l'uſage ordinaire de ces Machines, la reſiſtance de leurs frottemens fût près de double de celle du poids F. Ce qui eſt encore très-difficile à croire. Ajoûtez à ceci les nombres 5. & 6. de l'art. 3.

6. Tels ſont les inconveniens auſquels la premiere Machine ſans frottement, que M. Perault a inſerée dans l'art. 4. de ſes Notes ſur le ch. 5. liv. 10. de ſa Traduction de Vitruve, eſt encore ſujette. L'application en eſt aiſée à faire. M. Perault a encore crû rendre cette Machine d'un uſage plus facile qu'elle n'eſt ici, en faiſant monter à plomb la roue CF avec ſon rouleau BA; mais l'on a vû que c'eſt tout le contraire dès le commencement de cet Ecrit.

EXAMEN
DE L'OPINION
DE M. BORELLI,

Sur les proprietez des Poids ſuſpendus par des cordes.

Digitized by Go

AVERTISSEMENT.

C'EST ici l'Examen promis dans la réflexion qui ſuit la preuve de la premiere propoſition du Projet de la Nouvelle Mécanique. On a été naturellement conduit par les principes qu'on y ſuit, à une propoſition ſur les proprietez des poids ſuſpendus par des cordes, qui s'eſt trouvée la même que celle que Monſieur Borelli avoit critiquée dans Stévin & dans Hérigone; & ç'a été par la neceſſité de la juſtifier, qu'on s'eſt trouvé engagé à l'examen de ſa critique.

On diviſe cet examen en deux Chapitres : Dans le premier on fait voir que le ſentiment que M. Borelli reprend dans Hérigone, dans Stévin & dans les autres, bien loin d'être contraire, comme il l'a crû, à la ſoixante-huitiéme Propoſition du Tome premier de ſon Traité du Mouvement des Animaux, en eſt une ſuite ſi neceſſaire, que s'il eût fait encore quelques pas, il y ſeroit infailliblement entré. On indique enſuite dans ce même Chapitre quelques paralogiſmes que cet Auteur a commis, lors même qu'il croyoit en voir dans les raiſonnemens qu'il a critiquez.

Dans le ſecond Chapitre, après avoir encore donné quelques démonſtrations du ſentiment d'Hérigone & des autres, toutes differentes de celles que M. Borelli a critiquées, on rend par la méthode de la Nouvelle Mécanique les Lemmes ſur leſquels cet Auteur a fondé tout

ce qu'il a dit de la force des Muſcles, beaucoup plus généraux qu'ils ne le peuvent être par la ſienne.

Au reſte ſi l'on attaque une erreur où M. Borelli eſt tombé, on n'en eſt pas moins perſuadé du mérite extraordinaire de ce grand homme, dont les principaux Ouvrages doivent être mis au nombre des Livres les plus originaux qui ayent paru dans ce ſiecle-ci; mais il n'y a perſonne qui ne puiſſe faire un faux pas, ſur-tout dans des matieres auſſi délicates que celles-ci, & où le paralogiſme ſe gliſſe auſſi facilement.

Tout ce qu'on citera de cet Auteur dans cet Examen, ſera pris du Tome premier de ſon Traité du Mouvement des Animaux, de l'Edition de Rome, faite en 1680. On ſpecifie l'Edition, à cauſe des pages qu'on en citera quelquefois.

EXAMEN
DE L'OPINION
DE M. BORELLI,

Sur les proprietez des Poids ſuſpendus par des cordes.

ETAT DE LA QUESTION.

MONSIEUR BORELLI dans ſon Traité du Mouvement des Animaux, Tome 1. ch. 13. a fait une fort longue digreſſion pour prouver qu'Hérigone, Stévin & pluſieurs autres, ſe ſont trompez, d'avoir avancé comme propoſition generale, que *le poids T ſoûtenu avec les cordes obliques AC & BC par deux poids ou deux puiſſances R & S, eſt à chacun d'eux ou d'elles, comme la partie HC de ſa ligne de direction à chacun des côtez CN & MC du parallelogramme MN, dont elle eſt diagonale.* Cet Auteur dit (*pag.* 137.) que cette propoſition priſe dans toute ſon étenduë & ſans reſtriction, lui paroît ſuſpecte, pour

FIG. 3.

» bien des raiſons ; & même qu'il la croit capable de jet-
» ter dans l'erreur.

Il réduit toutes ces prétendues raiſons à trois. 1°. Il dit » (*pag.* 138.) avoir démontré dans le Scholie de la 68. » propoſition du Tome 1. de ce Traité, que les deux » puiſſances R & S appliquées au poids T ſuivant des » directions obliques, peuvent demeurer en équilibre » avec lui, non ſeulement quelque rapport qu'elles ayent » entr'elles, fût-il plus grand ou moindre que celui de » NC à CM, mais encore de quelque maniere que » le rapport de la ſomme de ces deux puiſſances à ce » poids, fût different de celui de la ſomme de NC & MC » à CH. 2°. Il a fait, dit-il, auſſi pluſieurs experiences qui lui paroiſſent confirmer ce ſentiment. 3°. Enfin il a crû voir du paralogiſme dans deux démonſtrations qu'il a critiquées, dont la premiere paroît être du P. Pardie, & l'autre commune au reſte des Auteurs qu'il attaque.

Il eſt conſtant que de toutes ces raiſons, la premiere eſt non ſeulement la principale, mais encore l'unique qui puiſſe ſervir à la déciſion de ce differend. Car, 1°. en fait d'exactitude & de préciſion, l'experience ne prouve rien ; ſur-tout ici, où la reſiſtance qui vient du frottement des poulies avec leurs pivots, &c. rend ces ſortes d'experiences poſſibles en tant de manieres differentes, qu'il n'y a preſque point de ſentiment pour ou contre lequel on n'en puiſſe faire à ſon gré. 2°. Qu'il y ait, ou qu'il n'y ait point de paralogiſme dans les ſentimens que cet Auteur critique, on n'en peut rien conclure, non plus contre le ſentiment qu'il attaque ; puiſque la verité ne dépend point du tout de la maniere dont on l'a démontre.

Toute la queſtion préſente ſe réduit donc à ſçavoir ſi M. Borelli a démontré dans le Scholie de ſa 68. propoſition, Tome 1. » que les deux puiſſances R & S appli-
» quées au poids T ſuivant des directions obliques, peu-
» vent demeurer en équilibre avec lui, non ſeulement

quelque rapport qu'elles ayent entr'elles, fût-il plus « grand ou moindre que celui de NC à CM, mais en- « core de quelque maniere que le rapport de la ſomme « de ces deux puiſſances à ce poids, fût different de ce- « lui de la ſomme de NC & MC à CH. « Que dis-je ? Ce ſeroit aſſez pour détruire la propoſition qu'il rejette, s'il avoit ſeulement démontré un cas où ce poids pût ainſi demeurer en équilibre avec ces puiſſances, ſans être à chacune d'elles, comme la partie CH de ſa ligne de direction, qui fait la diagonale du parallelogramme MN, à chacune des parties de leurs cordes, qui lui ſervent de côtez. Mais bien loin de l'avoir fait, la propoſition d'où il tire le Scholie en queſtion, prouve tout le contraire, je veux dire le ſentiment d'où il a crû qu'elle le devoit éloigner.

C'eſt ce qu'on va faire voir dans le premier Chapitre de cet Examen : & dans le ſecond, après avoir encore donné quelques démonſtrations de ce même ſentiment, toutes differentes de celles que M. Borelli a critiquées, on rendra par la méthode de la Nouvelle Mécanique, les Lemmes qu'il a déduits de ſa 68. propoſition, beaucoup plus generaux qu'ils ne le peuvent être par la ſienne.

CHAPITRE I.

SENTIMENT D'HERIGONE, de Stévin, &c.

SUR LES PROPRIETEZ DES POIDS ſuſpendus par des cordes.

Démontré par la propoſition même que M. Borelli avoit crû leur être contraire.

LE Scholie de la 68. propoſition de M. Borelli, dont il eſt ici queſtion, porte, 1°. » Qu'avec les mêmes
» inclinaiſons de cordes, le poids qui y eſt ſuſpendu, &
FIG. 1. » les forces qui le ſoûtiennent, peuvent varier en mille
» manieres differentes, ſans que pour cela il ceſſe de faire
» équilibre avec elles, pourvû que la *puiſſance* R ſoit à
» *la partie* X *de ce poids*, comme GC à GF, ou comme
» AC à CH; & que la *puiſſance* S ſoit à *ſon autre partie* Z,
» comme IC à IK, ou comme BC à CH..... 2°. Ce mê-
» me Scholie porte reciproquement qu'en retenant les
» mêmes poids, *c'eſt-à-dire ici, les mêmes forces*, (pourvû
» que celui du milieu ſoit moindre que les deux extrê-
» mes) on peut changer l'inclinaiſon de leurs cordes,
» ſans en rompre l'équilibre.

Il eſt clair que la premiere partie de ce Scholie peut avoir deux ſens bien differens. 1°. Elle peut ſignifier que dans cette variation de poids & de forces, ou cet Auteur veut que l'équilibre ſe conſerve ſans changer l'inclinaiſon de leurs cordes, ce poids demeure toûjours à chacune de ces puiſſances en même raiſon que la diagonale CH du parallelogramme MN, à chaque partie de leurs cordes, qui lui ſert de côté; & en cela on va voir que cette conſequence eſt parfaitement juſte, mais auſſi

(*Cor.*

(*Cor.* 21. *Th.* 1. *Nouv. Mécanique*) parfaitement conforme au ſentiment que cet Auteur attaque. 2°. Au contraire, ſi on lui fait ſignifier que cet équilibre puiſſe ſubſiſter ſans un tel rapport, alors on conclud très-mal, & même autant contre cet Auteur que contre Hérigone, &c. J'en dis tout autant de la ſeconde partie de ce même Scholie ; & pour le démontrer, je vais faire voir que la propoſition d'où M. Borelli le tire, prouve tout le contraire, & que s'il y eût fait un peu plus d'attention, elle l'auroit infailliblement conduit au ſentiment d'où il a crû qu'elle le devoit éloigner ; je veux dire, à croire (du moins pour tous les cas qu'elle comprend) que *le poids T ſoûtenu avec les cordes obliques AC & BC par deux poids ou deux puiſſances R & S, eſt toûjours à chacun d'eux ou d'elles, comme la partie HC de ſa ligne de direction, à chacun des côtez CN & MC du parallelogramme MN, dont elle eſt la diagonale.* Voici comment.

DEMONSTRATION
ſuivant M. Borelli.

Selon cet Auteur (*prop.* 68.) lorſque les puiſſances R & S ſoûtiennent enſemble le poids T, la puiſſance R ſoûtient pour ſa part une partie X de ce poids, de même qu'elle feroit, ſi elle étoit appliquée ſuivant ſa même direction AC avec cette partie X au levier horiſontal CG ; & la puiſſance S ſoûtient auſſi pour la ſienne l'autre partie Z de ce même poids, de même qu'elle feroit, ſi elle étoit auſſi appliquée ſuivant ſa même direction CB avec cette partie Z au levier CI qu'on ſuppoſe encore horiſontal & égal au premier : & par conſequent ſi l'on regarde (*Cor.* 2. *Lem.* 2. *Nouv. Mécan.*) l'impreſſion que la puiſſance S fait ſuivant CB ſur le nœud C qui retient enſemble les cordes de ces puiſſances & de ce poids, comme compoſée de deux impreſſions particulieres, dont l'une eſt ſuivant l'horiſontale CO, & l'autre ſuivant la perpendiculaire CH ; on trouvera que ce que cette puiſſance lui en fait ſuivant CO, eſt égal à la reſi-

ſtance que feroit alors contre ce même point, & ſuivant cette même ligne, le levier CG pour empêcher la corde ACX de ſe redreſſer ; c'eſt-à-dire, égal à la charge de l'appui G de ce même levier. Or ſoient appellées G, I, les charges des appuis G, I, c'eſt-à-dire, les efforts dont le nœud C eſt tiré tout à la fois de C vers G, & vers I ; leſquels efforts directement contraires doivent être égaux entr'eux, puiſque (*hyp.*) aucun d'eux n'emporte le nœud C vers aucun des côtez G, I ; ainſi l'on aura ici G=I. Cela poſé,

1°. L'on aura R. G :: AC. CG :: CG. CF :: CI. CF.

Et conſequemment $G=\frac{R\times CF}{CI}$.

2°. L'on aura de même S. I :: BC. CQ :: CI. CK. Et conſequemment auſſi $I=\frac{S\times CK}{CI}$.

Donc $\frac{R\times CF}{CI}=G=I=\frac{S\times CK}{CI}$, ou $R\times CF=S\times CK$; d'où reſulte R. S :: CK. CF. (en prenant CI=CG pour ſinus total, & ſ pour la marque des ſinus) :: ſCIK. ſCGE :: ſHCB. ſHCA (ſoit le parallelogramme MN) :: ſHCM. ſCHM :: HM. CM :: CN. CM. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

Voilà ce que M. Borelli devoit premierement conclure de ſa 68. propoſition, ſinon en general, du moins pour tous les cas qu'elle comprend : Sçavoir, que *lorſque deux puiſſances R & S ſoûtiennent enſemble quelque poids T avec des cordes ſeulement, elles ſont toûjours entr'elles en même raiſon que les parties CN & MC de leurs cordes, qui ſervent de côtez au parallelogramme MN, qui a pour diagonale une partie CH de la ligne de direction du poids qu'elles ſoûtiennent.* De-là en faiſant MP & NQ perpendiculaires ſur HC, ces lignes marquant toûjours CP égale à HQ, cet Auteur auroit trouvé, comme il a fait (*p.* 137.)

que *chacune des puiſſances R & S*, étant toûjours (*par le Corol. de ſa 69. prop.*) à tout ce poids, comme chacun des côtez CN & MC du parallelogramme MN, à la ſomme de leurs ſublimitez CP & CQ, *lui eſt auſſi toûjours comme chacun de ces mêmes côtez à la diagonale CH de ce même parallelogramme.* Ce qu'il falloit démontrer.

Quoique cette conſequence ſuive neceſſairement de la 68. propoſition de M. Borelli, cependant parce que cette propoſition ne peut pas s'appliquer aux cas où une de ces puiſſances ſe trouve avoir ſa direction au-deſſous de l'horiſontale qui paſſe par le point où leurs cordes ſe communiquent, elle n'en eſt pas une ſuite ſi generale que du Théoreme premier des poids ſuſpendus par des cordes de la Nouvelle Mécanique. C'eſt pour cela qu'on ſe contente ici de dire, que ſi cet Auteur eût fait un peu plus d'attention à ſa 68. prop. il auroit apperçû que tout ce que nous venons d'en conclure, eſt abſolument vrai, du moins pour tous les cas qu'elle comprend.

Telle eſt la conſequence que M. Borelli devoit tirer de ſa 68. propoſition; s'il l'eût fait, il auroit apperçû, 1°. que la premiere partie du Scholie qu'il en tire, n'eſt vraye qu'en cas que la variation du poids T & des forces R & S, entre leſquels il dit que l'équilibre ſe peut conſerver ſans changer l'inclinaiſon de leurs cordes, ſoit telle que ce poids demeure toûjours à chacune de ces puiſſances en même raiſon, que la diagonale CH du parallelogramme MN, à chaque partie de leurs cordes qui lui ſert de côté. 2°. Il auroit encore vû que la ſeconde partie de ce même Scholie, eſt abſolument fauſſe; puiſqu'il n'eſt pas poſſible de faire le moindre changement auquel que ce ſoit des angles ACB, ACH & BCH, ſans changer en même tems le rapport qui eſt, ou entre les côtez du parallelogramme MN, ou entre quelqu'un d'eux & ſa diagonale; c'eſt-à-dire, puiſque (*hyp.*) on ne change rien au rapport qui eſt entre ce poids & chacune de ces puiſſances, ſans faire ceſſer la reſſemblance de ces deux rapports; & par conſequent auſſi, ſuivant ce qui

vient d'être conclu de la 68. propoſition de M. Borelli ; ſans rompre l'équilibre de ce poids avec ces puiſſances.

AUTRE DEMONSTRATION.
encore ſuivant M. Borelli.

Fig. 2. La prop. 69. Tom. 1. de M. Borelli, donne encore plus ſimplement ce qu'on vient de déduire de la prop. 68. du même Tome. Dans cette prop. 69. M. Borelli ſuppoſe comme là, & comme nous ci-après dans la Fig. 2. que les puiſſances R, S, ſoûtiennent le poids T ſeulement avec des cordes CR, CS, CT, attachées enſemble par un nœud commun & mobile C. Et après avoir pris CG. CH :: R. S. & fait GP, HQ, perpendiculaires en P, Q, ſur la direction CT du poids T, prolongée vers D; il démontre exactement, & ſans leviers, que R+S. T :: GC+CH. CP+CQ.

Or je dis que de cela ſuit encore la propoſition que M. Borelli conteſte à Hérigone, à Stévin, &c. Pour le voir, ſoit parallelement à CS la droite GD, qui rencontre en D la direction TC du poids T, prolongée juſques-là : l'on aura ainſi un triangle rectangle DPG ſemblable au rectangle CQH ; d'où réſulte GP. HQ :: DP. CQ :: DG. CH. Or on verra ci-après dans la Remarque de la prop. 3. du Chapitre ſuivant, que GP=HQ. Donc auſſi DP=CQ, & DG=CH ; & conſequemment CP+CQ=CP+DP=CD. Or la prop. 69. Tome 1. de M. Borelli, donne R+S. T :: CG+CH. CP+CQ. Donc auſſi R+S. T :: CG+CH. CD. De ſorte que cet Auteur ayant pris ici CG. CH :: R. S. l'on y aura, ſelon lui-même, les puiſſances R, S, & le poids T, en raiſon des lignes CG, CH, CD. Or puiſque ci-deſſus l'on avoit DG=CH, & ces deux droites ſont (*hyp.*) paralleles entr'elles, ſi l'on mene la droite DH, le quadrilatere CGDH ſe trouvera être un parallelogramme, de qui CG, CH, ſeront les côtez, & CD la diagonale. Donc, ſuivant M. Borelli, les puiſſances R, S, ſont non ſeulement comme les côtez CG, CH, du parallelogramme

CGDH, pris ſur leurs directions ; mais auſſi au poids T, comme ces côtez correſpondans ſont à la diagonale CD de ce parallelogramme, priſe de même ſur la direction de ce poids. *Ce qu'il falloit encore démontrer ſuivant M. Borelli, qui le conteſtoit.*

REMARQUE.

Ayant démontré, comme l'on vient de faire, que le ſentiment dont il eſt ici queſtion, bien loin d'être contraire aux prop. 68. 69. Tom. 1. de M. Borelli, comme cet Auteur l'a crû, en eſt une ſuite ſi neceſſaire, que s'il eût fait encore quelques pas, il l'auroit infailliblement trouvé : c'eſt encore une nouvelle raiſon de ne nous point arrêter aux experiences qu'il objecte à Stévin, à Hérigone, & aux autres ; & de ne toucher à la critique qu'il a faite de leurs raiſonnemens, que pour indiquer les fauſſes ſuppoſitions ſur leſquelles il s'eſt appuyé pour y trouver du paralogiſme. Il y en a trois que voici.

1°. Dans la critique qu'il a faite du premier de ces raiſonnemens, qui paroît être du P. Pardie, après avoir dit que ſi l'on regarde la corde AC comme une verge de fer mobile autour du point fixe A, à laquelle le poids T ſoit attaché, ce poids ſera ſoûtenu avec cette verge par ce point fixe, de même que ſur un plan CI perpendiculaire à AC ; il fait IL perpendiculaire à l'horiſontale LC, & (*pag.* 139.) il dit : *Patet quod pondus T..... ad vim quâ idem T innititur, & comprimit idem planum IC, eſt ut IC ad LC.* Cela ſeroit vrai (*Corol.* 20. *Th.* 26.) ſi BC étoit parallele à CI perpendiculaire (*Hyp.*) à AC ; mais non pas (*Corol.* 17. *Th.* 26.) lorſqu'elle lui eſt oblique, comme ici, où le poids S aide au poids T, à charger le plan CI, qui ne le ſeroit que par ce poids T, ſi BC lui étoit parallele. Fig. 31

2°. Dans la critique qu'il fait enſuite du raiſonnement d'Hérigone, de Stévin, &c. après avoir regardé le poids T ſoûtenu par les cordes AC & BC, comme s'il l'étoit Fig. 32

ſur les plans CK perpendiculaire à AC, & CG perpendiculaire à CB, inégalement inclinez, il dit (*pag.* 141.) *Tunc pondus T dum moveri niteretur per duas rectas inclinatas CK & CG, cogeretur moveri, aut niſum exercere per diagonalem CO ſecantem angulum GCK bifariam.* Pour cela il faudroit que ces deux plans CK, CO, fuſſent également inclinez, & conſequemment auſſi les directions RC, SC, qu'on leur ſuppoſe perpendiculaires.

Outre cette ſuppoſition, M. Borelli ſe ſert encore ici de la premiere qu'il a déja faite contre le P. Pardie. Il dit (*pag.* 141.) après avoir fait CP perpendiculaire à l'horiſontale KG : *Idem pondus abſolutum T ad vim quâ comprimit planum CO, eandem rationem habebit quàm CO ad OP.* Cela ſeroit vrai, ſi ce poids T étoit retenu ſur CO par une puiſſance d'une direction parallele à CO.

3°. Enfin ſi ces deux ſuppoſitions ne lui ſuffiſant pas encore pour trouver à redire au raiſonnement d'Hérigone, de Stévin, &c. il y en ajoûte une troiſiéme qui ne vaut pas mieux. *Vis*, dit-il au même endroit, *quam patitur planum CO à compreſſione ponderis T æqualis eſt viribus ambarum potentiarum R & S, quæ ſuſtinendo idem pondus in tali ſitu plani CO inclinati vicem ſupplent.* Cela eſt faux. La force réſultante du concours des deux autres, eſt toûjours moindre que leur ſomme, tant que leurs directions font quelque angle entr'elles ; outre que cette force réſultante le long du plan CO, étant ainſi parallele à ce plan, ne ſeroit pas celle de ſa compreſſion qui réſulteroit du concours de cette force parallele & de la peſanteur du poids ſoûtenu par elle ſur ce plan.

On ne démontre point ici la fauſſeté de toutes ces ſuppoſitions : elle eſt trop évidente par le Th. 26. des Surfaces de la Nouv. Méc. pour s'y arrêter davantage. D'ailleurs c'eſt, ce me ſemble, avoir ſuffiſamment répondu à M. Borelli, que d'avoir démontré, comme l'on vient de faire, le ſentiment d'Hérigone, de Stevin, &c. par la propoſition même que cet Auteur croyoit leur être contraire : c'eſt auſſi tout ce qu'on s'étoit propoſé dans ce premier Chapitre. Paſſons au ſecond.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

NOUVELLES DEMONSTRATIONS du ſentiment d'Hérigone, de Stévin, &c.

Sur les proprietez des poids ſuſpendus par des cordes.

AVEC QUELQUES PROPOSITIONS de M. Borelli, rendues par la méthode de la Nouvelle Mécanique, beaucoup plus generales qu'elles ne le peuvent être par la ſienne.

AVERTISSEMENT.

LE poids T étant ſoûtenu par deux ou pluſieurs puiſſances R, S, &c. ſi des extrémitez G, H, &c. des parties CG, CH, &c. de leurs cordes qui leur ſoient proportionnelles, on fait GP, HQ, &c. perpendiculaires ſur ſa ligne de direction CD, elles y déſigneront depuis leurs points de rencontre P, Q, &c. juſqu'au point C, où ceste ligne concourt avec ces cordes, certaines parties CP, CQ, &c. dont nous parlerons ſouvent dans la ſuite. C'eſt pourquoi nous leur allons donner des noms. Fig. 5, 6

DEFINITION I.

Lorſque ces parties CP, CQ, &c. ſe trouveront au-deſſus du point C, nous les appellerons les *ſublimitez* des puiſſances qui les auront déterminées par leurs proportionnelles.

DEFINITION II.

Et celles des lignes qui ſe trouveront au-deſſous de ce-

même point C, nous les appellerons les *profondeurs* de ces mêmes puiſſances.

Selon ces définitions, CP eſt la ſublimité *de la puiſſance R dans les fig. 5. & 6. CQ eſt encore la* ſublimité *de la puiſſance S dans la fig. 5. mais dans la fig. 6. CQ eſt la* profondeur *de cette même puiſſance.*

On avertit encore que lorſqu'on comparera à la ſublimité ou à la profondeur de ces puiſſances, des parties de leurs cordes qui leur ſoient proportionnelles, on ne l'entendra pas indifféremment de toutes les proportionnelles qu'on pourroit leur aſſigner, mais ſeulement de celles qui déterminent les ſublimitez ou les profondeurs en queſtion.

PROPOSITION I.

Fig. 5. 6. 7. 8. *LE poids T ſoûtenu avec les cordes AC & BC par les puiſſances R & S, & en équilibre avec elles, eſt toûjours à chacune d'elles, comme la partie DC de ſa ligne de direction, à chacun des côtez GC & HC du parallelogramme GH, dont elle eſt diagonale.*

DEMONSTRATIONS.

1°. Voyez celle qu'on a donnée du Th. 1.

2°. Voyez ci-après la Remarque qui ſuit le Corollaire de la prop. 3.

Fig. 5. 6. 3°. Soient conçûs les leviers MC & NC placez chacun en ligne droite avec chacune des directions AC & BC des puiſſances R & S. De leurs points d'appui M & N pris à diſcrétion, ſoient tirées MF & NK perpendiculairement à ces mêmes lignes reciproquement priſes, & ML avec NO perpendiculaires auſſi à la ligne de direction DCE de ce même poids. Enfin de quelqu'un des points D de cette même ligne faite DH & DG paralleles à AC & à CB. Cela fait, il eſt clair que le levier CN étant (*hyp.*) en ligne droite avec la ligne de direction CB

de

de la puiſſance S, ſupplée neceſſairement tout l'effet de cette puiſſance ; & que par conſequent la puiſſance R pourroit ſuivant ſa même direction AC, ſoutenir ſeule le poids T avec ce levier ainſi placé, de même qu'elle le ſoûtient preſentement avec la puiſſance S. Pour la même raiſon, la puiſſance S pourroit auſſi le ſoûtenir ſeule avec le levier CM, de même qu'elle le ſoûtient preſentement avec la puiſſance R : le poids T eſt donc ſoûtenu par le concours d'action des puiſſances R & S, de même qu'il le ſeroit par la ſeule puiſſance R appliquée avec lui au levier NC, ou bien par la ſeule puiſſance S appliquée auſſi avec lui au levier CM. Or dans le premier cas la puiſſance R ſeroit (*Th.* 21. *Cor.* 13. *de la Nouv. Mécan.*) au poids T, comme NO à NK ; c'eſt-à-dire, comme le ſinus de l'angle NCO, ou de DCH à celui de l'angle NCK, ou de CHD. Et dans le ſecond cas le poids T, pour la même raiſon, ſeroit à la puiſſance S, comme MF à ML ; c'eſt-à-dire encore, comme le ſinus de l'angle MCF, ou de CHD, à celui de l'angle MCL, ou de HDC. Donc la puiſſance R, le poids T, & la puiſſance S, ſont entr'eux, comme les ſinus des angles DCH, CHD, & HDC ; c'eſt-à-dire, comme les lignes DH, CD, & CH. Le poids T eſt donc à la puiſſance R, comme CD à DH, ou à GC ; & à la puiſſance S, comme la même CD à CH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

4°. Si au lieu des puiſſances R & S, les cordes AC & BC étoient attachées aux extrêmitez de quelque levier AB, dont l'appui D fût dans la ligne de direction DCE du poids T, il eſt clair qu'en quelque ſituation que ce levier ſe trouvât alors, il y demeureroit, & que la charge de ſon point d'appui ſeroit alors égale au poids T. Il eſt encore clair que les extrêmitez A & B de ce même levier ſeroient auſſi tirées ſuivant AC & BC, chacune avec une force égale à celle de la puiſſance R ou S, qu'elle ſupplée. Or les forces avec leſquelles les points A & B de ce levier ſeroient ainſi tirées ſuivant AC & BC, ſeroient entr'elles (*Th.* 21. *Cor.* 13. *Nouv. Mécan.*) Fig. 7.

comme DF & DK tirées du point D perpendiculairement ſur BC & AC ; c'eſt-à-dire, en faiſant le parallelogramme GH, comme les ſinus des angles DCH & CDH, ou comme les côtez DH & HC de ce parallelogramme. Ces mêmes forces ſeroient auſſi (*Th.* 21. *part.* 2. 3. 4.) chacune à la charge du point d'appui D de ce levier, c'eſt-à-dire, au poids T, comme chacun de ces mêmes côtez à la diagonale DC : les forces des puiſſances R & S, c'eſt-à-dire, ces mêmes puiſſances elles-mêmes, ſont donc entr'elles, comme DH, ou GC & HC ; & au poids T, comme chacun de ces mêmes côtez du parallelogramme GH à ſa diagonale DC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On pourroit encore démontrer cette même propoſition en ſe ſervant des plans inclinez, pourvû qu'on en prît un qui fût perpendiculaire à la direction de quelqu'une des deux puiſſances qui ſoûtiennent ce poids : car cette puiſſance, & la charge de ce plan alors égales, n'ayant qu'un même rapport avec ce poids, non plus qu'avec l'autre puiſſance qu'on conſidere en ce cas comme le ſoûtenant ſeule ſur ce plan ; on trouveroit par le Cor. 9. du Th. 26. que ce poids eſt toûjours à chacune de ces puiſſances, comme le ſinus de l'angle que leurs cordes font entr'elles, à chacun des ſinus des angles que font avec la ligne de direction de ce poids chacune de ces cordes reciproquement priſes. Tout cela eſt preſentement trop clair pour s'y arrêter davantage.

COROLLAIRE I.

Fig. 5. 6. 7. 8.

On peut conclure generalement de ces démonſtrations, ce que nous n'avons conclu (*chap.* 1.) de la 68. prop. de M. Borelli, que pour les cas qu'elle comprend ; ſçavoir, qu'il n'y en a aucun de poſſible, où l'on puiſſe conſerver l'équilibre du poids T avec les puiſſances R & S, en changeant le rapport qu'elles ont entr'elles, ou avec lui, à moins qu'on ne change en même tems l'inclinaiſon de ces cordes, ſans changer auſſi le rapport de ces mêmes puiſſances, ou entr'elles, ou avec ce poids ; parce

que ſans cela il n'eſt pas poſſible de faire que chacun des côtez CH & CG du parallelogramme GH, continue d'être à ſa diagonale DC, comme chacune des puiſſances R & S au poids T; ce qui doit cependant être, comme on le vient de voir, pour qu'elles faſſent équilibre avec lui.

On peut comparer ce Corollaire aux Scholies des propoſitions 68. & 69. de M. Borelli.

COROLLAIRE II.

Il ſuit encore de ces démonſtrations que chacune des puiſſances R & S eſt au poids T, comme chacune des parties GC & HC de leurs cordes, qui leur ſont proportionnelles, à la ſomme (*fig.* 5.) de leurs ſublimitez, ou à la difference (*fig.* 6.) qui eſt entre la ſublimité de l'une & la profondeur de l'autre; parce que dans le parallelogramme GH les angles GCD & CDH étant égaux, auſſi-bien que les lignes GC & DH; de plus les angles qui ſe font en P & en Q, étant auſſi (*avert.*) égaux, les triangles GPC & HDQ ſont non ſeulement ſemblables, mais encore leurs côtez CP & DQ ſont égaux. Donc (*fig.* 5.) CP plus CQ eſt égal à DQ plus CQ; & (*fig.* 6.) CP moins CQ ſera auſſi égal à DQ moins CQ. Or (*fig.* 5.) DQ plus CQ eſt égal à CD, de même (*fig.* 6.) que DQ moins CQ. Donc (*fig.* 5.) CP plus CQ eſt égal à CD, auſſi-bien (*fig.* 6.) que CP moins CQ. Or ſelon les démonſtrations précedentes, chacune des puiſſances R & S eſt au poids T, comme chacune de leurs proportionnelles CG & HC à CD. Donc chacune de ces mêmes puiſſances eſt à ce poids, comme chacune de ces mêmes proportionnelles à CP (*fig.* 5.) plus CQ, ou (*fig.* 6.) à CP moins CQ; c'eſt à-dire, (*Déf.* 1. & 2.) à la ſomme (*fig.* 5.) de leurs ſublimitez, ou bien (*fig.* 6.) à la difference qui eſt entre la ſublimité de l'une & la profondeur de l'autre. FIG. 5. & 6.

COROLLAIRE III.

D'où l'on voit que la ſomme des deux puiſſances qui ſoûtiennent un poids avec des cordes, eſt toûjours à ce poids, comme la ſomme des longueurs de leurs cordes, qui leur ſont proportionnelles, à la ſomme de leurs ſublimitez, ou à la difference qui eſt entre la ſublimité de l'une & la profondeur de l'autre.

On peut comparer encore ces deux derniers Corollaires à la 69. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

PROPOSITION II.

FIG. 9. *DE quelque maniere qu'un poids T ſoit ſoûtenu avec des cordes par quelque nombre de puiſſances A, B, D, E, F, &c. que ce ſoit, appliquées à un même nœud C, ſi l'on prend ſur leurs nœuds autant de parties CG, CR, CM, CN, CP, &c. qui leur ſoient proportionnelles, & que ſous deux de ces parties, par exemple, ſous GC & RC, l'on faſſe un parallelograme RG, dont la diagonale CH faſſe encore avec une autre de ces parties CM le parallelogramme HM, dont la diagonale CL faſſe encore avec une autre de ces parties CN le parallelogramme LN, dont la diagonale CQ faſſe encore avec une autre de ces parties CP le parallelogramme PQ, & ainſi juſqu'à la derniere de ces proportionnelles. On verra, 1°. que la diagonale du dernier de ces parallelogrammes, qui eſt ici CK, ſera dans la ligne de direction du poids T. 2°. Et que chacune de ces puiſſances ſera à ce poids, comme chacune des proportionnelles, ſelon qu'elles leur répondent, eſt à cette même diagonale.*

DEMONSTRATION.

1°. Puiſque (*hyp.*) la puiſſance A eſt à la puiſſance B comme CG à CR, il réſultera (*Lem.* 2.) de leur concours d'action ſur le point C une impreſſion compoſée ſuivant CH, d'une force qui ſera (*Cor.* 1. *du même*

Lem.) à chacune de ces puiſſances, comme CH à chacune des lignes CG & CR qui les repreſentent : l'impreſſion que font enſemble ces deux puiſſances ſur le point C, eſt donc la même que celle que feroit ſeule ſur ce même point quelque nouvelle puiſſance, qui lui étant appliquée ſuivant CH, au lieu d'elles, leur ſeroit à chacune, comme CH à chacune des lignes CG & CR ; & par conſequent les trois puiſſances A, B, D, doivent faire enſemble la même impreſſion ſur le point C que cette nouvelle puiſſance (je l'appele H) feroit alors avec la puiſſance D. Or (*Lem.* 2.) l'impreſſion qui réſulteroit alors du concours d'action des puiſſances D & H ſur le point C, ſe feroit ſuivant CL, d'une force qui ſeroit (*Cor.* 1. *du même Lemme*) à celle de la puiſſance D, comme CL à CM. Donc l'impreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action des trois puiſſances A, B, D, ſur le point C, ſe fait en effet ſuivant CL, d'une force qui eſt à celle de la puiſſance D, comme CL à CM : elles ne font donc toutes trois enſemble ſur ce point que la même impreſſion que feroit ſeule quelqu'autre puiſſance (je l'appelle L) qui appliquée ſuivant CL, au lieu de ces trois, ſeroit à la puiſſance D, comme CL à CM ; & par conſequent les quatre puiſſances A, B, D, E, ne doivent faire ſur le point C que la même impreſſion que feroit alors la puiſſance L avec la puiſſance E. Or (*Lem* 2.) l'impreſſion qui réſulteroit alors du concours d'action de ces deux dernieres puiſſances ſur le point C, ſe feroit ſuivant CQ, d'une force qui ſeroit (*Cor.* 2. *du même Lem.*) à celle de la puiſſance E, comme CQ à CN. Donc l'impreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action des quatre puiſſances A, B, D, E, ſur le point C, ſe fait en effet ſuivant la ligne CQ, d'une force qui eſt à celle de la puiſſance E, comme CQ à CN. On prouvera de même que l'impreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action des cinq puiſſances A, B, D, E, F, ſe fait auſſi ſuivant CK, d'une force qui eſt à la puiſſance E, comme CK à CP. Et ainſi toujours de même juſqu'à

la derniere des puiſſances appliquées à ce poids. D'où il ſuit que l'impreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action de toutes ces puiſſances ſur le point C, en quelque nombre qu'elles ſoient, ſe fait toujours ſuivant la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme l'on vient de dire, c'eſt-à-dire ici, ſuivant CK; & par conſequent (*Th.* 1. *Nouv. Méc.*) cette diagonale eſt toûjours en ligne droite avec TC, c'eſt-à-dire, dans la ligne de direction du poids T. *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. On vient de voir que le poids T eſt ſoûtenu par les puiſſances A, B, D, E, F, &c. de même qu'il le ſeroit, par exemple ici, par la puiſſance F aidée d'une autre ſuivant CQ, à qui elle ſeroit comme CP à CQ (les directions de toutes demeurant toûjours les mêmes): Donc (*prop.* 1.) la puiſſance F eſt au poids T, comme CP à CK. Or (*hyp.*) la puiſſance F eſt à chacune des puiſſances E, D, B, A, &c. comme CP à chacune des parties de leurs cordes CN, CM, CR, CG, &c. Donc chacune de ces puiſſances eſt au poids T, comme chacune de ces proportionnelles, ſelon qu'elles leur répondent, eſt à la diagonale CK. Ce qu'on vient de dire de la puiſſance F, ſe prouvera de même de toute autre dont la proportionnelle feroit un des côtez du parallelogramme qu'on vient de démontrer, avoir toûjours ſa diagonale, comme ici CK, dans la ligne de direction du poids T: ainſi en general de quelque maniere qu'un poids ſoit ſoûtenu avec des cordes par quelque nombre de puiſſances que ce ſoit, appliquées à un même nœud, chacune de ces puiſſances eſt toûjours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles qui ſervent de côtez aux parallelogrammes dont il eſt ici queſtion, eſt à la diagonale du dernier, qu'on vient de voir ſe trouver toûjours dans ſa ligne de direction.

COROLLAIRE.

D'où l'on voit que toutes ces puiſſances priſes enſemble, ſont toûjours au poids T, qu'elles ſoûtiennent, com-

Digitized by Google

me la ſomme de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, &c. à la diagonale du parallelogramme qu'on vient de démontrer (*n.* 1.) ſe trouver toûjours dans la ligne de direction de ce poids : de ſorte que lorſque toutes ces puiſſances ſont égales entr'elles, ces mêmes proportionnelles l'étant auſſi, la ſomme de toutes ces puiſſances eſt à ce poids, comme une de ces proportionnelles à une partie de cette diagonale diviſée en autant d'égales qu'il y a de telles puiſſances ; c'eſt-à-dire ici, comme laquelle que ce ſoit des lignes CG, CR, CM, CN, CP, à $\frac{1}{5}$ de CK.

PROPOSITION III.

Toutes choſes étant les mêmes que dans la propoſition précedente, on trouvera preſentement que chacune des puiſſances A, B, D, E, F, &c. eſt au poids T qu'elles ſoûtiennent, comme chacune de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, &c. à la ſomme de leurs ſublimitez moins celle de leurs profondeurs. FIG. 92.

DEMONSTRATION.

De toutes les pointes des parallelogrammes GR, HM, LN, QP, &c. tirez G*g*, H*h*, R*r*, L*l*, M*m*, Q*q*, N*n*, P*p*, &c. perpendiculairement ſur la ligne de direction du poids T, prolongée indéfiniment de part & d'autre. Cela fait, vous trouverez par le Lemme 10. 1°. C*h*=C*g*—C*r*. 2°. C*l*=C*m*—C*h*. Donc C*l*=C*m*—C*g*+C*r*. 3°. C*q*=C*l*+C*n*. Donc C*q*=C*m*—C*g*+C*r*+C*n*. 4°. C*k*=C*q*—C*p*. Donc C*k*=C*m*—C*g*+C*r*+C*n*—C*p*. Enfin continuant toûjours ainſi juſqu'à la diagonale qui ſe trouve toûjours (*prop.* 2.) dans la ligne de direction du poids T, on trouvera de même que cette diagonale eſt toûjours égale à C*m*—C*g*+C*r*+C*n*—C*p*±, &c. Or on vient de voir (*prop.* 2.) que chacune des puiſſances A, B, D, E, F, &c. eſt auſſi toûjours au poids T qu'elles ſoûtien- FIG. 92.

nent, comme chacune de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, à cette même diagonale. Donc chacune de ces puiſſances eſt à ce poids, comme chacune de ces proportionnelles à $Cm+Cr+Cn-Cg-Cp\pm$, &c. c'eſt-à-dire (*Déf.* 1. *&* 2.) à la ſomme de leurs ſublimitez Cm, Cr, Cn, &c. moins la ſomme de leurs profondeurs Cg, Cp, &c. D'où l'on voit en general, que de quelque maniere qu'un poids ſoit ſoûtenu avec des cordes par quelque nombre de puiſſances que ce ſoit, appliquées à un même nœud, chacune de ces puiſſances eſt toûjours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles à la ſomme de leurs ſublimitez moins celle de leurs profondeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

FIG. 10. Soient encore les lignes CG, CR, CM, CN, CP, &c. proportionnelles aux puiſſances A, B, D, E, F, &c. concevez par le point C, où elles ſe communiquent, un plan horiſontal OH, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à la ligne de direction du poids T; tirez enſuite des extrêmitez de ces proportionnelles, G, R, M, N, P, &c. autant de perpendiculaires ſur le plan OH, & ſur la ligne de direction du poids T indéfiniment prolongée de part & d'autre; en faiſant depuis C ſur le plan OH autant de lignes CH, CQ, CL, CO, CK, &c. qui joignent ce point avec les perpendiculaires qui tombent ſur ce plan, on aura autant de parallelogrammes rectangles Hg, Qr, Lm, On, Kp, &c. qui exprimeront (*Lem.* 2. *Cor.* 2.) que chacune de ces puiſſances, par exemple, la puiſſance A, fait la même impreſſion ſur le point C, que feroient deux autres puiſſances appliquées à ce point, l'une ſuivant CH, & l'autre ſuivant Cg, à chacune deſquelles celle-ci ſeroit comme CG à chacune de ces mêmes lignes. Le point C eſt donc tiré vers bas ſuivant la ligne de direction du poids T par la puiſſance A d'une force (*Cor.* 1. *du même Lemme*) à qui cette puiſſance eſt comme CG à Cg. Pour

la

la même raiſon il eſt encore tiré ſuivant la ligne de direction du même poids. 1°. Vers bas, par la puiſſance F d'une force à qui elle eſt comme CP à C*p*, &c. 2°. Vers haut, par la puiſſance B d'une force à qui elle eſt comme CR à C*r*; par la puiſſance D d'une force à qui elle eſt comme CM à C*m*; par la puiſſance E d'une force à qui elle eſt comme CN à C*n*, &c. Or (*hyp.*) la puiſſance A eſt à chacune des puiſſances B, D, E, F, &c. comme ſa proportionnelle CG à chacune des leurs CR, CM, CN, CP, &c. Donc la puiſſance A eſt à chacune des forces avec leſquelles le point C eſt tiré ſuivant la ligne de direction du poids T. 1°. Vers bas, par les puiſſances A, F, &c. comme CG à chacune de leurs profondeurs C*g*, C*p*, &c. 2°. Vers haut, par les puiſſances B, D, E, &c. comme la même CG à chacune de leurs ſublimitez C*r*, C*m*, C*n*, &c. Donc cette même puiſſance A eſt à la ſomme de toutes les forces avec leſquelles le point C eſt tiré ſuivant la ligne de direction du poids T. 1°. Vers bas, par les puiſſances A, F, &c. comme ſa proportionnelle CG à la ſomme de leurs profondeurs C*g*, C*p*, &c. 2°. Vers haut par les puiſſances B, D, E, &c. comme la même CG à la ſomme de leurs ſublimitez C*r*, C*m*, C*n*, &c. Or la ſomme faite de la peſanteur de ce poids, & des forces avec leſquelles le point C eſt tiré vers bas ſuivant la ligne de direction de ce même poids par les puiſſances A, F, &c. étant diamétralement oppoſée à la ſomme de celles avec leſquelles ce même point eſt tiré en même tems vers haut ſuivant cette même ligne par les puiſſances B, D, E, &c. & aucune de ces deux ſommes de force ne l'emportant ſur l'autre; puiſque (*hyp.*) le poids T ne monte ni deſcend : c'eſt une conſequence neceſſaire qu'elles ſoient égales. Donc la puiſſance A eſt non ſeulement à la ſomme des forces avec leſquelles le point C eſt tiré vers bas ſuivant la ligne de direction du poids T par les puiſſances A, F, &c. comme ſa proportionnelle CG à la ſomme de leurs profondeurs C*g*, C*p*, &c. mais auſſi à la ſomme faite de cette premiere & de la peſanteur de ce même poids,

comme la même CG à la ſomme des ſublimitez Cr, Cm, Cn, &c. des puiſſances B, D, E, &c. Donc la puiſſance A eſt à cette derniere ſomme moins la premiere, c'eſt-à-dire, à la peſanteur ſeule du poids T, ou à ce poids lui-même, comme ſa proportionnelle CG à la ſomme des ſublimitez Cr, Cm, Cn, &c. moins la ſomme des profondeurs Cg, Cp, &c. Or (*hyp.*) chacune des puiſſances B, D, E, F, &c. eſt à la puiſſance A, comme chacune de leurs proportionnelles CR, CM, CN, CP, &c. à ſa proportionnelle CG. Donc chacune des puiſſances A, B, D, E, F, &c. eſt au poids T qu'elles ſoûtiennent, comme chacune de leurs proportionnelles à la ſomme de leurs ſublimitez moins celle de leurs profondeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

On voit preſentement en general que la ſomme de toutes les puiſſances qui ſoûtiennent un poids avec des cordes qui ſe tiennent par un même nœud, en quelque nombre qu'elles ſoient, quelque proportion qu'elles ayent entr'elles, & de quelque maniere qu'elles lui ſoient appliquées, eſt toûjours à ce poids, comme la ſomme des parties de leurs cordes qui leur ſont (*chap. 2. avert.*) proportionnelles à la ſomme de leurs ſublimitez moins celle de leurs profondeurs.

On peut comparer tout ceci avec les propoſitions 70. 73. 74. de M. Borelli; & on verra non ſeulement qu'elles ſont très-limitées, mais encore qu'avec ſa méthode on ne peut pas aller ſi loin.

REMARQUE.

Fig. 2. & 22. En faiſant la ſeconde des deux démonſtrations précedentes, il m'en eſt encore venu une de la premiere propoſition. La voici.

Le poids T étant donc ſoûtenu avec des cordes par deux puiſſances R & S, des angles G & H du parallelogramme GH, dont la diagonale CD fait partie de la ligne de direc-

Digitized by Google

sion de ce poids, ſoient faites GM & HN paralleles à cette diagonale, & perpendiculaires à MCN, achevez les parallelogrammes MP & NQ. Cela fait, vous trouverez encore de la maniere que nous avons fait, la ſeconde des deux démonſtrations précedentes, que le poids T eſt aux puiſſances R & S, comme la partie CD de ſa ligne de direction aux parties CG & CH de leurs cordes, qui ſont les côtez du parallelogramme CH, dont elle eſt diagonale.

Car (*Cor. 6. Lem. 3. Nouv. Méc.*) la puiſſance R fait ſur le point C la même impreſſion que feroient deux autres puiſſances appliquées à ce point, l'une ſuivant CP, & l'autre ſuivant CM, à chacune deſquelles celle-ci ſeroit comme CG à chacune de ces lignes. Le point C reçoit donc en même tems deux impreſſions differentes de la puiſſance R, l'une ſuivant CP, d'une force qui eſt à celle de cette puiſſance (*Cor. 5. du même Lem.*) comme CP à CG, & l'autre ſuivant CM, d'une force qui eſt auſſi (*par le même Cor.*) à celle de cette même puiſſance, comme CM à CG. Pour la même raiſon ce même point C reçoit encore en même tems deux impreſſions differentes de la puiſſance S, l'une ſuivant CQ, d'une force qui eſt à celle de cette puiſſance, comme CQ à CH, & l'autre ſuivant CN, d'une force qui eſt auſſi à celle de cette même puiſſance, comme CN à CH. Or, 1°. la force de l'impreſſion que reçoit le point C de la puiſſance R ſuivant CM, eſt égale à celle qu'il reçoit en même tems de la puiſſance S ſuivant CN; puiſqu'elles ſont diamétralement oppoſées, & qu'aucune des deux (*hyp.*) ne ſurmonte l'autre. La force de la puiſſance R eſt donc à celle de l'impreſſion que reçoit le point C de la puiſſance S ſuivant CN, comme CG à CM. Or CM eſt égale à CN, puiſque les triangles GPD & HQC ſemblables, & GD égale à CH, rendent GP égale à HQ, & que les parallelogrammes MP & NQ rendent auſſi GP égale à CM, & HQ égale à CN. Donc la puiſſance R eſt à la force de l'impreſſion que le point C reçoit de la puiſſance S ſuivant CN, comme CG à CN. Or on vient de voir que

la force de cette même impreſſion eſt à la puiſſance S, comme CN à CH. Donc la puiſſance R eſt à la puiſſance S, comme CG à CH. 2°. On vient de voir auſſi que la puiſſance S eſt à la force de l'impreſſion qu'elle fait ſur le point C ſuivant CQ, comme CH à CQ. Donc la puiſſance R eſt auſſi à la force de cette même impreſſion comme CG à CQ, c'eſt-à-dire, comme CG à DP, puiſque les triangles GPD & HQC ſemblables, & GD égale à CH, rendent DP égale à CQ. On vient de voir encore que cette même puiſſance R eſt à la force de l'impreſſion qu'elle fait ſur ce même point C ſuivant CP, comme CG à CP. Donc la puiſſance R eſt à la ſomme, ou à la difference des forces de ces deux impreſſions faites ſur le point C ſuivant CP & CQ, par elle & par la puiſſance S, comme CG à la ſomme ou à la difference de ces deux lignes. Or (*fig.* 2.) la ſomme de ces deux lignes, où (*fig.* 11.) leur difference eſt égale à la diagonale CD du parallelogramme GH; & (*fig.* 2.) la ſomme, ou (*fig.* 11.) la difference des forces de ces deux impreſſions, eſt auſſi égale au poids T. Donc la puiſſance R eſt au poids T, comme CG à CD. On vient de démontrer (*n.* 1.) que cette même puiſſance R eſt auſſi à la puiſſance S, comme CG à CH. Donc les puiſſances R & S, & le poids T ſont entr'eux comme les lignes CG, CH & CD; & par conſequent ce poids eſt à chacune d'elles, comme la partie CD de ſa ligne de direction à chacune des parties de leurs cordes, qui ſont les côtez du parallelogramme GH, dont elle eſt diagonale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On voit de-là que ſi par le point C, où ſe communiquent les deux cordes qui ſoûtiennent quelque poids que ce ſoit, on fait MN perpendiculaire à la ligne de direction de ce poids, & qu'après avoir pris de part & d'autre ſur cette ligne CM & CN égales entr'elles, on faſſe aux points M & N les perpendiculaires MG & NH, qui rencontrent aux points G & H les cordes des puiſſances qui ſoûtiennent ce poids; elles en détermineront des par-

ties CG, CH, qui ſeront toûjours proportionnelles à ces mêmes puiſſances.

Si M. Borelli eût fait reflexion que les puiſſances R & S n'agiſſent pas ſeulement contre le poids T, mais auſſi l'une contre l'autre, & que de méme qu'elles concourent enſemble pour empécher que ce poids n'attire à lui (fig. 2.) *le nœud C, de méme auſſi chacune d'elles concourt avec lui pour empêcher que l'autre ne l'emporte. Si, dis-je, il avoit fait cette reflexion, il auroit vû ſans doute que chacune de ces puiſſances fait impreſſion ſur ce nœud, non ſeulement ſuivant la direction du poids qu'elles ſoûtiennent, pour le tenir toûjours à méme hauteur, mais auſſi ſuivant l'horiſontale MCN, pour empécher qu'aucune d'elles ne l'attire ni à droit ni à gauche. D'où il auroit infailliblement conclu que ces impreſſions horiſontales, étant diamétralement oppoſées, doivent toûjours etre égales. De-là voyant qu'elles augmentent ou diminuent neceſſairement à meſure que les angles que font les cordes de ces puiſſances avec la ligne de direction du poids qu'elles ſoûtiennent, s'approchent ou s'éloignent de l'angle droit, il auroit enfin apperçû l'impoſſibilité de faire, ſinon aucun, du moins un tel changement à leurs directions, ſans en rompre l'équilibre.*

Je dis ſinon aucun changement, *parce qu'il a été démontré* (Cor. 1. prop. 1.) *qu'il n'eſt pas poſſible d'y en faire aucun ſans rompre l'équilibre qui eſt* (hyp.) *entre ces puiſſances, & le poids qu'elles ſoûtiennent. Nous l'avons même conclu* (Chap. 1.) *de la 68. propoſition d'où cet Auteur tire un Scholie tout contraire par un raiſonnement dont le défaut eſt preſentement aiſé à découvrir. Voyez-le.*

Sur ce qu'on vient de dire de l'uſage des impreſſions horiſontales que font ſur le nœud C (fig. 2. & 11.) *les puiſſances R & S, il eſt aiſé de juger de celui des impreſſions ſemblables que font auſſi ſur le nœud C de leurs cordes ſuivant le plan OH* (fig. 10.) *les puiſſances A, B, D, E, F, &c. auſſi ne s'y arrétera-t'on pas davantage.*

On peut encore comparer le Th. 7. & ſon premier Corollaire (Nouv. Mécan.) *à la 78. prop. de M. Borelli.*

On peut auſſi comparer les Corollaires 2. 3. 4. du même Th. à la 71. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

On peut enfin comparer les Corollaires 5. 6. 7. 8. du même Th. 7. à la 72. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

Tels ſont les principes generaux de tout ce que cet Auteur a dit des poids ſuſpendus par des cordes, & de l'uſage qu'il en a fait pour exprimer la force des muſcles. C'eſt ce qu'on s'étoit propoſé d'établir dans ce Chapitre par la méthode de la Nouvelle Mécanique. Qu'on voye preſentement ſi la ſienne peut aller juſques-là, & ſi elle peut conduire à la ſolution du Problême 16. pag. 355. tom. II.

Fin du ſecond Tome.

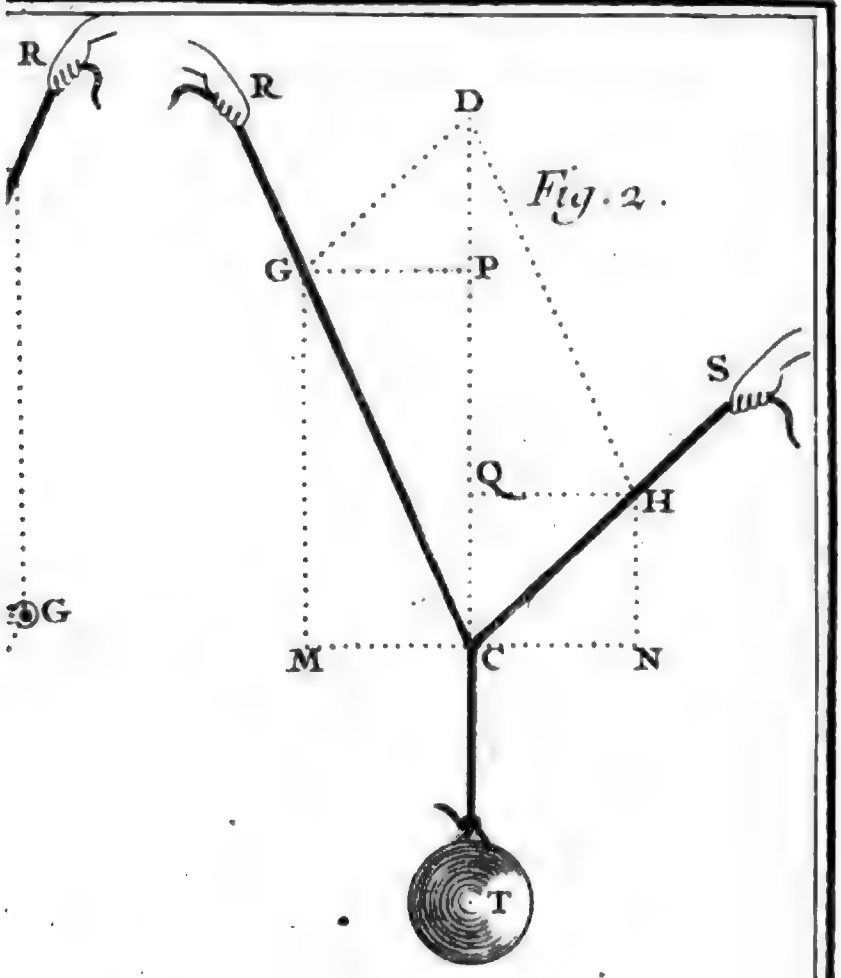


Fig. 2.

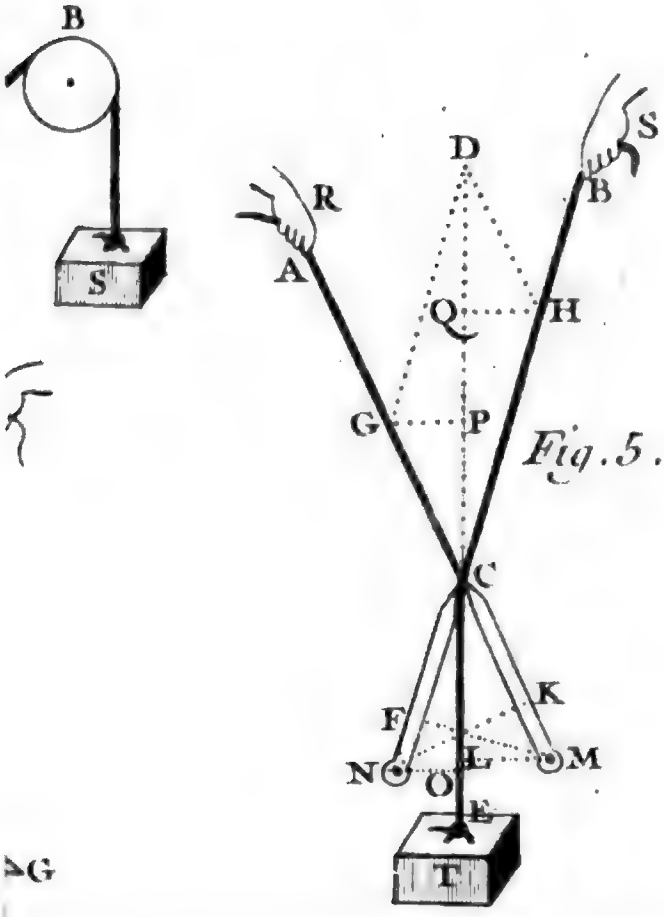


Fig. 5.

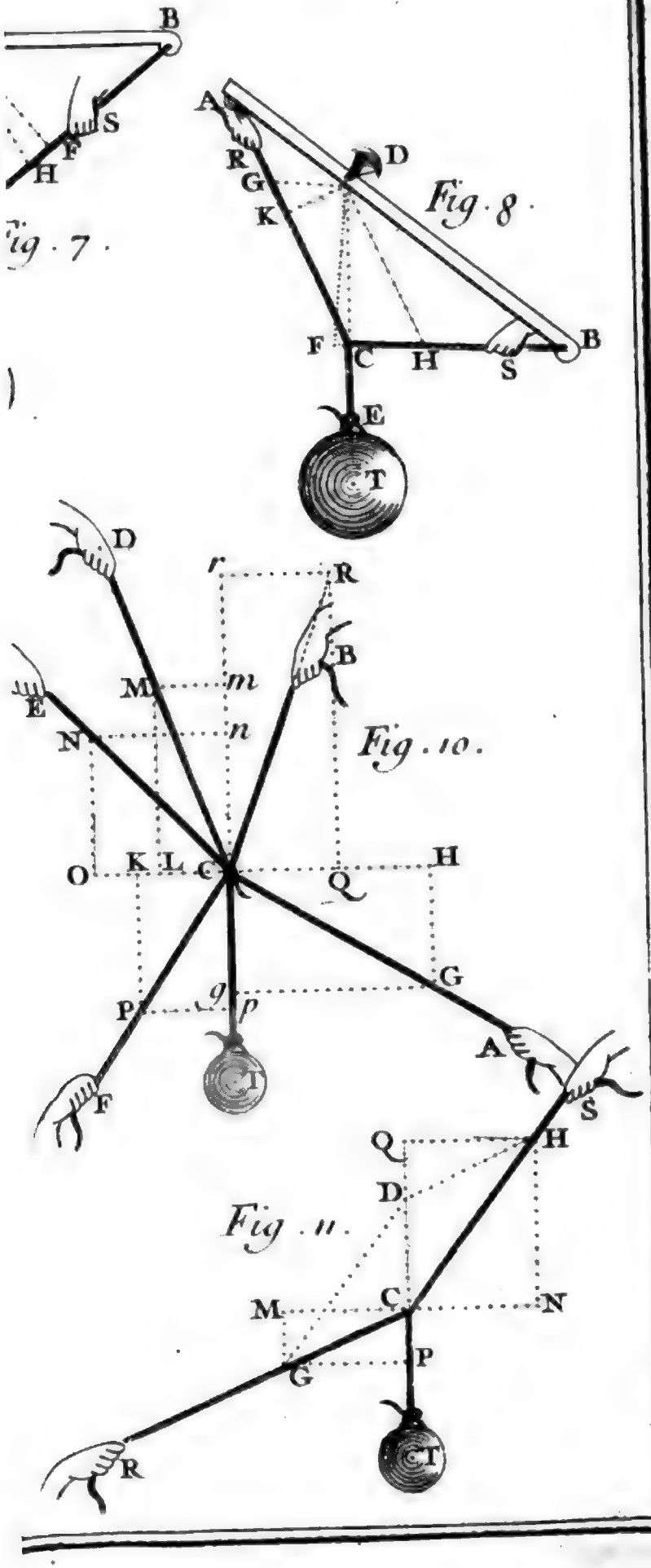


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 10.

Fig. 11.

Digitized by

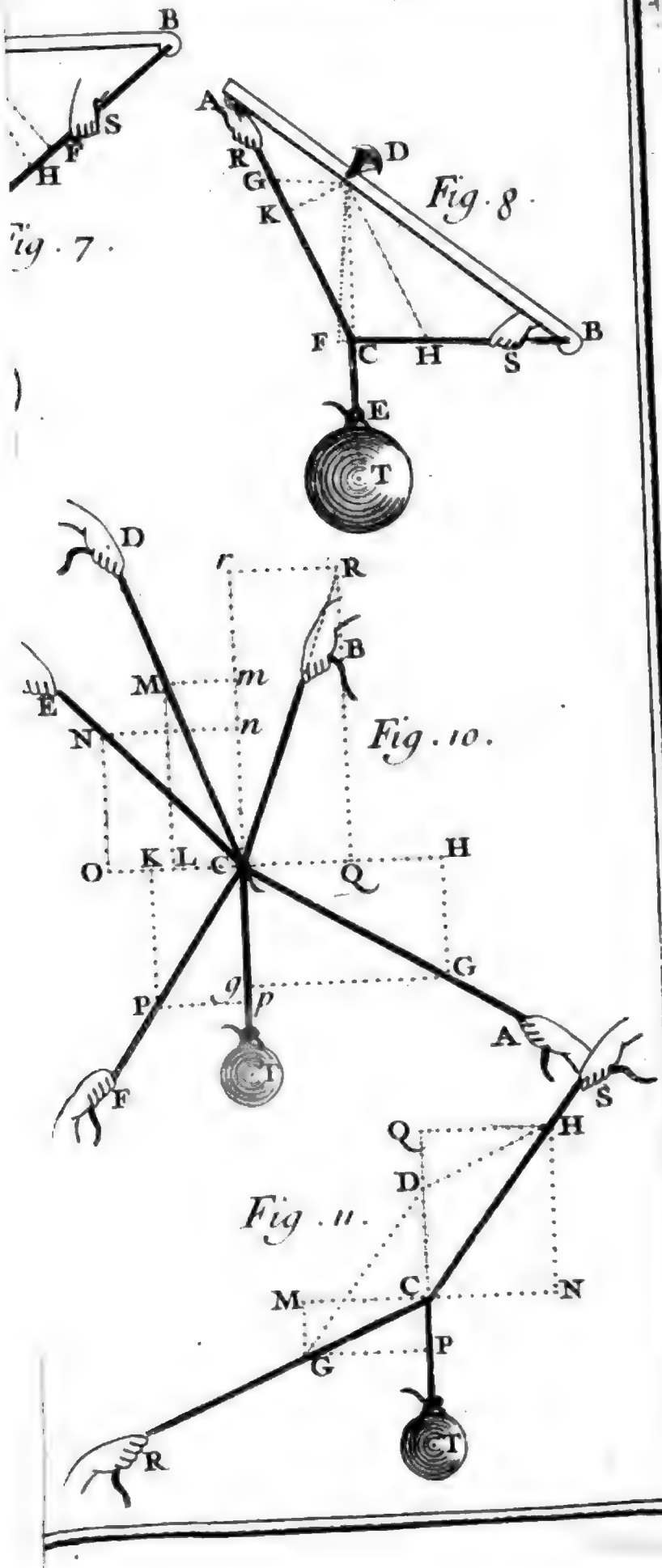


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 10.

Fig. 11.

Digitized by Google

EXTRAIT DES REGISTRES DE L'ACADEMIE Royale des Sciences.

Du 6. Decembre 1724.

MEſſieurs Saurin, de Mairan & de Beaufort, qui avoient été nommez pour examiner la *Nouvelle Mécanique de feu M. Varignon*, ayant dit que cet Ouvrage, dont le Projet avoit été imprimé en 1687. avoit été reçû des Sçavans avec une approbation generale, étoit attendu avec impatience par le merite de l'eſſai, & la grande reputation de l'Auteur, qu'il ſeroit à ſouhaiter qu'il eût pû y mettre la derniere main, & prendre ſoin lui-même de l'Edition; que cependant l'Ouvrage étoit excellent dans l'état où il étoit, & digne du nom de M. Varignon: la Compagnie à jugé qu'il meritoit d'être imprimé. En foi de quoi j'ai ſigné le preſent Certificat. A Paris ce 10. Decembre 1724.

FONTENELLE, *Sec. perp. de l'Ac. R. des Sc.*

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre: A nos amez & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé & féal le *ſieur Jean-Paul Bignon, Conſeiller ordinaire en notre Conſeil d'Etat, & Préſident de notre Académie Royale des Sciences*; Nous ayant fait très-humblement expoſer, que depuis qu'il Nous a plû donner à notredite Académie, par un Reglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'eſt appliquée avec plus de ſoin à cultiver les Sciences, qui ſont l'objet de ſes exercices; en ſorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnez au Public, elle ſeroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaiſoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conſeil d'Etat du treiziéme Août 1713. Et deſirant donner au ſieur Expoſant toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre utiles au Public les travaux de notredite Académie Royale des Sciences; Nous avons permis & permettons par ces Preſentes à ladite Académie, de faire imprimer, vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéïſſance, par tel Imprimeur qu'elle voudra choiſir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui ſemblera, *toutes ſes Recherches ou Obſervations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées*; comme auſſi *les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des Particuliers qui la compoſent*, & generalement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître ſous ſon nom, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion; & ce pendant le tems de quinze années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Preſentes.

Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre Royaume, comme auſſi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun deſdits Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Académie, en tout ni en partie, par extrait ou autrement, ſans le conſentement par écrit de ladite Académie ou de ceux qui auront droit d'eux; à peine contre chacun des contrevenans de confiſcation des Exemplaires contrefaits au profit de ſondit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interêts; à condition que ces Preſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour; que l'impreſſion de chacun deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les expoſer en vente, il en ſera mis de chacun deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre trés-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur Dagueſſeau, le tout à peine de nullité des Preſentes: Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir ladite Académie ou ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie deſdites Preſentes qui ſera imprimée au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenuë pour dûëment ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & féaux Conſeillers & Secretaires foi ſoit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Paris le vingt-troiſiéme jour du mois de Juin l'an de grace mil ſept cens dix-ſept, & de notre Regne le deuxiéme. Par le Roy en ſon Conſeil.

Signé, FOUQUET.

Il eſt ordonné par l'Edit du Roy du mois d'Août 1686. & Arrêt de ſon Conſeil, que les Livres dont l'impreſſion ſe permet par Privilege de Sa Majeſté, ne pourront être vendus que par un Libraire ou Imprimeur.

Regiſtré le preſent Privilege, enſemble la ceſſion écrite ci deſſous ſur le Regiſtre IV. de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, p. 155 N. 205. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arreſt du Conſeil du 13. Août 1703. A Paris le 3. Juillet 1717. Signé, DELAUNE, *Syndic.*

Nous ſouſſigné Préſident de l'Académie Royale des Sciences, déclarons avoir en tant que beſoin cedé le preſent Privilege à ladite Académie, pour par elle & les differens Académiciens qui la compoſent, en joüir pendant le tems & ſuivant les conditions y portées. Fait à Paris le premier Juillet 1717.

Signé, J. P. BIGNON.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 6. Decembre 1724.

PAr déliberation faite ſelon la forme ordinaire, la Compagnie a réſolu de permettre au ſieur JOMBERT, Marchand Libraire, d'imprimer le *Nouvelle Méchanique de M. Parignon*, & de lui ceder à cet égard le Privilege qu'elle a obtenu du Roy en datte du 29. Juin 1717. En foi de quoi j'ai ſigné le preſent Certificat. A Paris ce 6. Decembre 1724.

FONTENELLE, *Sec. perp. de l'Ac. R. des Sc.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google